Н. БУРБАКИ

КОММУТАТИВНАЯ АЛГЕБРА

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

1290 1293 1308 1314

ÉLÉMENTS DE MATÉMATIQUE

par

N. BOURBAKI

FASC. XXVII, XXVIII, XXX, XXXI

ALGÈBRE COMMUTATIVE

CHAPITRE 1. MODULES PLATS

CHAPITRE 2. LOCALISATION

1961

CHAPITRE 3. GRADUATIONS, FILTRATIONS ET TOPOLOGIES

CHAPITRE 4. IDEAUX PREMIERS ASSOCIÉS ET DECOMPOSITION PRIMAIRE

1961

CHAPITRE 5. ENTIERS

CHAPITRE 6. VALUATIONS

1964

CHAPITRE 7. DIVISEURS

1965

HERMANN

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

КОММУТАТИВНАЯ АЛГЕБРА

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
А. А. БЕЛЬСКОГО

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Е. С. ГОЛОДА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА 1971

УДК 519.49 + 512

Книга входит в завоевавшую мировое признание энциклопедию современной математики «Элементы математики», созданную группой французских ученых, выступающих под коллективным псевдонимом Н. Бурбаки.

Все книги этой серии отличаются оригинальностью изложения и высоким научным уровнем. Значительная часть их переведена или переводится на русский язык.

Настоящая книга состоит из семи глав и содержит изложение ряда важнейших вопросов гомологической алгебры, теории примарного разложения, теории целых элементов и нормирований и многих других разделов коммутативной алгебры — одной из фундаментальных областей современной математики.

Подобно прочим книгам Бурбаки, эта монография представляет интерес для самого широкого круга математиков

Редакция литературы по математическим наукам

Инд 2-2-3
6-71

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы, рассматриваемые в предлагаемой книге, появились при развитии теории алгебраических чисел и (позднее) алгебраической геометрии (см. исторический очерк). Большое сходство этих теорий обнаружилось еще в XIX веке. В процессе работы над возникшими в них проблемами был сформулирован ряд общих идей, область применения которых не ограничивается кольцами алгебраических функций, и, как обычно, чтобы глубже понять истинное значение и связи объектов, лучше всего рассмотреть их в наиболее общей форме. Поэтому в нашей книге обсуждаются понятия, которые можно применить в принципе ко всем коммутативным кольцам и модулям над ними. Следует, однако, подчеркнуть, что результаты часто получаются при предположениях о *конечности* (всегда выполняющихся в классическом случае), например при условии, что модули имеют конечный тип или рассматриваются над нётеровыми кольцами.

Изложение первых глав группируется в основном вокруг следующих понятий.

I. *Локализация и глобализация.* Обратимся, например, к системе диофантовых уравнений

$$P_i(x_1, \ldots, x_m) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n), \qquad (*)$$

где P_i — многочлены с целыми рациональными коэффициентами и где требуется найти решения (x_i), образованные *целыми* рациональными числами. К этой задаче можно приступить, отыскивая решения, образованные *рациональными числами.* Такой подход приводит к аналогичной задаче, где коэффициенты многочленов P_i рассматриваются как элементы *поля частных* $\mathbf{Q}$ кольца $\mathbf{Z}$ и надо найти решения в поле $\mathbf{Q}$. Следующий этап заключается в выяснении вопроса о существовании рациональных решений, знаменатели которых не делятся на заданное простое число p (очевидно, что *целые* решения этому условию удовлетворяют). На этот раз мы приходим к подкольцу $\mathbf{Z}_{(p)}$ в поле $\mathbf{Q}$, состоящему из рациональных чисел указанного вида; оно называется *локальным кольцом* кольца $\mathbf{Z}$, соответствующим простому числу p. Ясно, что переход от кольца $\mathbf{Z}$ к полю $\mathbf{Q}$ и переход от кольца $\mathbf{Z}$ к кольцу $\mathbf{Z}_{(p)}$ имеют одинаковую природу: в обоих случаях в знаменатели допускаются только те числа, которые не принадлежат некоторому *простому идеалу* (в данном

случае — идеалу (0) или идеалу (p)). Само понятие «локальное кольцо» происходит из алгебраической геометрии, где оно возникает наиболее естественным образом: например, в кольце $\mathbf{C}(X)$ рациональных функций от одной переменной с комплексными коэффициентами локальное кольцо, соответствующее простому идеалу $(X-\alpha)$, является кольцом рациональных дробей, регулярных в точке α (т. е. не имеющих в этой точке полюса).

Всякая диофантова задача и, если говорить более общим языком, задача об A-модулях (A — коммутативное кольцо) может быть разложена на две части: в первой надо найти решение в локальных кольцах $A_{\mathfrak{p}}$, соответствующих различным простым идеалам $\mathfrak{p}$ кольца A («локализация»), а во второй — выяснить, следует ли из существования решения «локализованной» задачи при *всяком* $\mathfrak{p}$ существование решения исходной задачи («переход от локального случая к глобальному»). Именно этим двум процессам посвящена гл. II, где, впрочем, мы видим, что локализация связана не только с простыми идеалами, но может иметь более общую природу.

II. *Пополнение локальных колец.* Любое локальное кольцо A, подобно полю, обладает *единственным* максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. С помощью этого факта задача об A-модулях сводится в некоторой степени к аналогичной задаче о *векторных пространствах*: сведение состоит в переходе к факторкольцу $A/\mathfrak{m}$, являющемуся полем. Если, например, вернуться к диофантовой системе (*), то указанная идея станет не чем иным, как появившимся еще в первых работах по теории чисел принципом «редукции по модулю p», согласно которому уравнения переводятся в сравнения $\bmod p$.

Очевидно, однако, что нельзя ожидать получения на таком пути полных результатов для исходной задачи. Чтобы иметь более точные сведения об искомом ответе, надо рассматривать не только сравнения по модулю $\mathfrak{m}$, но и «высшие» сравнения по модулю $\mathfrak{m}^n$ при всевозможных целых $n>0$: чем больше n, тем «ближе» мы, в некотором смысле, к данной задаче (возьмем, например, случай $A=\mathbf{Z}$: любое отличное от нуля целое число не может делиться на *все* степени p^n заданного простого числа p; следовательно, если n будет взято достаточно большим, то после редукции $\bmod p^n$ целое число будет отлично от нуля). Математическое выражение этой идеи состоит в рассмотрении *топологии* на кольце A (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 6 [1])),

[1]) Автором книг, на которые делаются такого вида ссылки, является Н. Бурбаки. Ссылки цитируются по-русски или по-французски в зависимости от того, вышел ли уже соответствующий русский перевод или нет. В последнем случае мы по возможности старались помочь читателю подстрочными примечаниями. — *Прим. перев.*

в которой идеалы $\mathfrak{m}^n$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля. Дело в том, что если, например, система сравнений

$$P_i(x_1, \ldots, x_m) \equiv 0 \pmod{p^k} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \qquad (**)$$

решена *при всех целых* $k > 0$, то отсюда еще не следует, что система уравнений (*) имеет решение в локальном кольце $\mathbf{Z}_{(p)}$; отсюда можно лишь сделать заключение о существовании решения этой системы в *пополнении* $\mathbf{Z}_{(p)}$ топологического кольца $\mathbf{Z}_{(p)}$.

Ослабленная таким образом исходная задача свелась, наконец, к аналогичному вопросу для локальных колец типа $A/\mathfrak{m}^n$; они еще больше похожи на поля, чем локальные кольца общего вида, так как содержат лишь нильпотентный радикал. В классической алгебраической геометрии это соответствует «дифференциальному» изучению вопроса в окрестности заданной точки.

В гл. III рассматриваются в общем виде эти приложения топологических понятий к теории локальных колец. В гл. VI изучаются более специальные вопросы, связанные с более тонкими рассмотрениями из алгебраической геометрии и, в особенности, с арифметикой полей алгебраических чисел; встречающиеся там локальные кольца (такие, как $\mathbf{Z}_{(p)}$) принадлежат к наиболее простому классу «колец нормирования», в которых делимость является отношением совершенного *предпорядка* в множестве главных идеалов (*Алгебра*, гл. VI, § 1).

Сравнивая переход от кольца A к его локализации $A_\mathfrak{p}$ с переходом от A к пополнению $\hat{A}$, мы обнаруживаем сходство этих операций. Оба A-модуля — как $A_\mathfrak{p}$, так и $\hat{A}$ — являются *плоскими*. Тензорными произведениями таких A-модулей с произвольными можно оперировать в некотором смысле так же, как тензорными произведениями векторных пространств, т. е. без всяких предосторожностей, необходимых при рассмотрении тензорных произведений в общем случае. Вопросы, связанные с понятием плоского модуля, которое применимо, впрочем, и к модулям над некоммутативными кольцами, изучаются в гл. I.

III. *Целые элементы и разложение идеалов.* Для исследования делимости в полях алгебраических чисел с самого начала оказывается необходимым введение понятия *целого элемента* в таком поле K, обобщающего понятия целого рационального числа в поле $\mathbf{Q}$. Общая теория «целых алгебраических элементов» связана, как мы это увидим, с очень строгими условиями конечности; она развивается в гл. V. Эта теория применяется при рассмотрении *всевозможных* коммутативных колец и представляет большой интерес не только для арифметики, но и для алгебраической геометрии и даже для современной теории «аналитических пространств» над полем $\mathbf{C}$.

Одна из основных трудностей, с которой приходилось сталкиваться при распространении классической арифметики на кольца целых алгебраических элементов, с давних пор заключалась в том, что классическое разложение целого рационального числа на простые множители не переносится, вообще говоря, на кольца указанного типа. Чтобы преодолеть эту трудность, потребовалось создание теории идеалов; для идеалов снова имеется искомое однозначное разложение, причем, разумеется, понятие простого числа заменяется понятием простого идеала. Это можно рассматривать как типичный случай, в котором «переход от локального к глобальному» приводит к удовлетворительному результату: зная для некоторого $x \in K$ значения в x всех «нормирований» поля K, можно восстановить по ним x с точностью до целого обратимого множителя.

Однако результат об однозначном разложении идеала в произведение простых перестает быть верным в кольцах более сложных, чем кольца алгебраических чисел (и даже, кстати сказать, в кольцах многочленов от нескольких переменных). Тем не менее с каждым идеалом можно связать некоторым каноническим образом множество вполне определенных простых идеалов; в алгебраической геометрии, например, если рассматривать в n-мерном аффинном пространстве K^n (K — какое-нибудь поле) подмногообразие, определенное системой полиномиальных уравнений $P_\alpha = 0$, то *неприводимые* компоненты этого подмногообразия взаимно однозначно соответствуют минимальным элементам множества простых идеалов, которые упомянутым образом связаны с идеалом, порожденным многочленами P_α. Можно, кроме того (если ограничиться нётеровыми кольцами), для каждого идеала задать «разложение», не столь точное, как в произведение простых идеалов; произведения в этом случае заменяются пересечениями, а степени простых идеалов — идеалами «примарными», связанными с теми простыми идеалами, которые в свою очередь ассоциированы с рассматриваемым идеалом (примарные идеалы, однако, не являются прямым обобщением степеней простых). Введение простых идеалов, ассоциированных с данным идеалом, и изучение их свойств составляют содержание гл. IV; там же устанавливается существование упомянутого выше «примарного разложения» и рассматриваются некоторые свойства его единственности. В настоящее время, однако, уже ясно, что это разложение играет в приложениях лишь второстепенную роль, а главным объектом является простой идеал, ассоциированный с данным идеалом.

В гл. VII более детально изучаются кольца, которые в том, что касается разложения в произведение простых идеалов, еще больше похожи на кольца целых алгебраических чисел; кроме

того, в этих кольцах оказывается возможным ввести понятие *дивизора*, которое дает геометрическую интерпретацию указанного разложения и играет важную роль в алгебраической геометрии.

Наконец, гл. VIII и следующие будут посвящены вопросам, представляющим для алгебраической геометрии больший интерес, чем для арифметики (в которой они становятся тривиальными), а именно вопросам *размерности.*

Эти понятия находятся на границе алгебраической геометрии в собственном смысле — границе, которая всегда подвижна и которую трудно провести. Дело в том, что коммутативная алгебра является чрезвычайно важным инструментом для развития алгебраической геометрии во всей ее общности; и наоборот (как это уже можно было заметить выше), язык геометрий оказывается необыкновенно удобным для теорем коммутативной алгебры и очень полезным для создания некоторой интуиции, которая, по понятным причинам, в значительной мере отсутствует в абстрактной алгебре. Вместе с современной тенденцией все большего и большего расширения рамок алгебраической геометрии наблюдается как никогда сильное стремление к слиянию алгебраического и геометрического языков.

ГЛАВА I[1])

ПЛОСКИЕ МОДУЛИ

В этой главе, если не оговорено противное, предполагается, что все рассматриваемые кольца содержат единичный элемент, а все гомоморфизмы переводят единичный элемент в единичный. Подкольцом кольца A считается такое подкольцо, которое содержит единичный элемент из A.

Если A — кольцо, M — левый A-модуль и U (соответственно V) *— некоторая аддитивная подгруппа кольца A* (соответственно *модуля M*), *то через UV* или *$U \cdot V$ обозначается аддитивная подгруппа модуля M, порожденная произведениями $u \cdot v$, где $u \in U$, $v \in V$* (*Алгебра*, гл. VIII, § 6, n° 1). *Если $\mathfrak{a}$ — идеал кольца A, то будем считать, что $\mathfrak{a}^0 = A$. Для всякого множества E через 1_E* (*или через 1, если не грозит путаница*) *обозначается тождественное отображение множества E на себя.*

Напомним, что аксиомы модулей включают в себя требование о том, что если E — левый (соответственно *правый*) *A-модуль над кольцом A и если 1 — единичный элемент кольца A, то $1 \cdot x = x$* (соответственно $x \cdot 1 = x$) *для всякого $x \in E$* (*Algébre*, chap. II, 3e éd, § 1, n° 1)[2]). *Если E и F — два левых* (соответственно *правых*) *A-модуля, то через* $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ (или просто через $\mathrm{Hom}(E, F)$) *обозначается аддитивная группа гомоморфизмов модуля E в модуль F* (loc. cit., § 1, n° 2)[3]). *Для краткости через 0 обозначается модуль, состоящий только из одного нулевого элемента.*

§ 1. Диаграммы и точные последовательности

1. Диаграммы

Пусть, например, A, B, C, D, E — пять множеств, и пусть f — отображение из A в B, g — отображение из B в C, h — отображение из D в E, u — отображение из B в D и v — отображение

---

[1]) Материал этой главы, за исключением § 4, не зависит ни от одной другой книги второй части.

[2]) См. также *Алгебра*, гл. II § 1, n°2. — *Прим. перев.*

[3]) См. также *Алгебра*, гл. II, § 2, n° 1, где гомоморфизм называется линейным отображением. — *Прим. перев.*

из C в E. Для того чтобы кратко описать такую ситуацию, часто используют диаграммы; в частности, наш пример может быть описан с помощью следующей диаграммы (*Теория множеств*, гл. II, § 3, n° 4):

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \xrightarrow{g} C \\ & {\scriptstyle u}\downarrow & \downarrow{\scriptstyle v} \\ & D & \xrightarrow{h} E \end{array} \tag{1}$$

В такой диаграмме запись $A \xrightarrow{f} B$ схематически выражает тот факт, что f является отображением множества A в множество B. Когда речь идет только об отображении f, буква f опускается и пишут просто $A \to B$.

Когда A, B, C, D, E — группы (соответственно коммутативные группы) и f, g, h, u, v — гомоморфизмы групп, то для краткости говорят, что диаграмма (1) есть *диаграмма групп* (соответственно *диаграмма коммутативных групп*).

Строго говоря, диаграмма не является математическим объектом; она всего лишь *рисунок*, предназначенный для того, чтобы облегчить чтение того или иного рассуждения. На практике диаграммы часто вводятся как *символы сокращения*, избавляющие от перечисления всех множеств и отображений, которые требуется рассмотреть. Вместо того чтобы сказать «Пусть A, B, C, D, E — пять множеств ... и v — отображение из C в E», часто говорят: «Рассмотрим диаграмму (1)» (см., например, формулировку предложения 1 n° 4).

2. *Коммутативные диаграммы*

Рассмотрим для примера следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & {\scriptstyle b}\downarrow & & {\scriptstyle c}\downarrow & & {\scriptstyle d}\downarrow \\ A' & \xrightarrow[f']{} & B' & \xrightarrow[g']{} & C' & \xrightarrow[h']{} & D' \end{array} \tag{2}$$

Каждому пути, составленному из некоторого числа отрезков диаграммы и пробегаемому в том направлении, которое указано стрелками, ставится в соответствие отображение множества, стоящего в начале первого отрезка, в множество, стоящее в конце последнего, а именно композиция отображений, представляемых пробегаемыми отрезками. При этом считается, что для любой вершины диаграммы, например вершины B, имеется путь, состоящий из одной этой вершины, и ему соответствует тождественное отображение 1_B.

В диаграмме (2), например, есть три пути, начинающиеся в A и кончающиеся в C'; им соответствуют отображения $c \circ g \circ f$, $g' \circ b \circ f$ и $g' \circ f' \circ a$. Говорят, что диаграмма *коммутативна*, если для любых двух ее путей, имеющих общее начало и общий конец, соответствующие отображения равны; например, если у кого-то пути совпадают начало и конец, то соответствующее отображение должно быть тождественным.

Для того чтобы диаграмма (2) была коммутативна, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$f' \circ a = b \circ f, \qquad g' \circ b = c \circ g, \qquad h' \circ c = d \circ h; \tag{3}$$

иначе говоря, необходимо и достаточно, чтобы три квадратные диаграммы из диаграммы (2), взятые порознь, были коммутативны. Действительно, из соотношений (3) следует, что $c \circ g \circ f = g' \circ b \circ f$, так как $c \circ g = g' \circ b$, и что $g' \circ b \circ f = g' \circ f' \circ a$, так как $b \circ f = f' \circ a$; следовательно, все три пути, начинающиеся в A и заканчивающиеся в C', дают одно и то же отображение. Так же проверяется, что четыре пути с началом в A и с концом в D' (соответственно три пути с началом в B и с концом в D') дают одно и то же отображение. Соотношения (3) означают, что отображения, соответствующие путям с началом в A (соответственно в B, C) и концом в B' (соответственно в C', D') одинаковы. Все другие пары вершин диаграммы (2) могут быть соединены только одним путем, так что она коммутативна.

В дальнейшем мы будем представлять читателю формулировку и проверку аналогичных результатов для других видов диаграмм.

3. *Точные последовательности*

Напомним (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 1, n° 4) следующее определение:

Определение. *Пусть A — кольцо, F, G, H — три правых* (соответственно *левых*) *A-модуля, f — гомоморфизм модуля F в G и g — гомоморфизм модуля G в H. Говорят, что пара (f, g) составляет точную последовательность, если $g^{-1}(0) = f(F)$, т. е. если ядро гомоморфизма g равно образу гомоморфизма f.*

В этом случае говорят также, что диаграмма

$$F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \tag{4}$$

является *точной последовательностью.*

Рассмотрим аналогичным образом диаграмму, образованную четырьмя модулями и тремя гомоморфизмами:

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H \tag{5}$$

Эта диаграмма называется *точной в члене F*, если диаграмма $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ представляет собой точную последовательность; если же диаграмма $F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ — точная последовательность, то данная диаграмма (5) называется *точной в члене G*. Если она точна и в члене F, и в члене G, то говорят, что диаграмма (5) *точна* или что она является *точной последовательностью*. Тем же способом определяются точные последовательности с любым числом членов.

Напомним также следующие результаты (loc. cit.). Пусть E, F, G — правые (соответственно левые) A-модули, стрелки обозначают гомоморфизмы и 0 — модуль, состоящий только из нулевого элемента. Тогда

а) утверждение, что $0 \to E \xrightarrow{f} F$ является точной последовательностью, равносильно утверждению, что гомоморфизм f *инъективен*;

б) утверждение, что последовательность $E \xrightarrow{f} F \to 0$ точна, эквивалентно утверждению, что гомоморфизм f *сюръективен*;

в) утверждение, что последовательность $0 \to E \xrightarrow{f} F \to 0$ точна, эквивалентно утверждению, что гомоморфизм f *биективен*, т. е. что f — *изоморфизм* модуля E на модуль F;

г) если F является подмодулем модуля E, i — канонический инъективный гомоморфизм модуля F в E, а p — канонический сюръективный гомоморфизм модуля E на E/F, то диаграмма

$$0 \to F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} E/F \to 0 \tag{6}$$

представляет собой точную последовательность;

д) для произвольного гомоморфизма f: $E \to F$ диаграмма

$$0 \to f^{-1}(0) \xrightarrow{i} E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{p} F/f(E) \to 0, \tag{7}$$

в которой i — канонический инъективный гомоморфизм подмодуля $f^{-1}(0)$ в E, а p — канонический сюръективный гомоморфизм модуля F на $F/f(E)$, есть точная последовательность;

е) для того чтобы диаграмма

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \tag{8}$$

была точной последовательностью, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие модули S, T и гомоморфизмы a: $E \to S$, b: $S \to F$, c: $F \to T$ и d: $T \to G$, что $f = b \circ a$, $g = d \circ c$ и три последовательности

$$E \xrightarrow{a} S \to 0$$

$$0 \to S \xrightarrow{b} F \xrightarrow{c} T \to 0 \tag{9}$$

$$0 \to T \xrightarrow{d} G$$

точны.

В заключение напомним, что для произвольного гомоморфизма A-модулей $f\colon E \to F$ приняты следующие обозначения: $\operatorname{Ker}(f) = f^{-1}(0)$, $\operatorname{Im}(f) = f(E)$, $\operatorname{Coim}(f) = E/f^{-1}(0)$ и $\operatorname{Coker}(f) = F/f(E)$. Соответственно в диаграммах (9) можно взять $S = \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(g)$ и $T = \operatorname{Im}(g)$ (этот модуль канонически изоморфен модулю $\operatorname{Coker}(f)$).

4. *Змеевидная диаграмма*

Предложение 1. *Рассмотрим коммутативную диаграмму коммутативных групп*

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & {\scriptstyle b}\downarrow & & {\scriptstyle c}\downarrow \\ A' & \xrightarrow[u']{} & B' & \xrightarrow[v']{} & C' \end{array} \tag{10}$$

Пусть обе строки в ней точны. Тогда

(i) *если гомоморфизм c инъективен, то*

$$\operatorname{Im}(b) \cap \operatorname{Im}(u') = \operatorname{Im}(u' \circ a) = \operatorname{Im}(b \circ u); \tag{11}$$

(ii) *если гомоморфизм a сюръективен, то*

$$\operatorname{Ker}(b) + \operatorname{Im}(u) = \operatorname{Ker}(v' \circ b) = \operatorname{Ker}(c \circ v). \tag{12}$$

Докажем (i). Очевидно, что

$$\operatorname{Im}(u' \circ a) = \operatorname{Im}(b \circ u) \subset \operatorname{Im}(b) \cap \operatorname{Im}(u').$$

Обратно, пусть $x \in \operatorname{Im}(b) \cap \operatorname{Im}(u')$. Тогда существует такой элемент $y \in B$, что $x = b(y)$. Ввиду того что $v' \circ u' = 0$, имеют место равенства $0 = v'(x) = v'(b(y)) = c(v(y))$, откуда $v(y) = 0$, так как c — инъективный гомоморфизм. Поскольку (u, v) есть точная последовательность, существует такой элемент $z \in A$, что $y = u(z)$, откуда $x = b(u(z))$.

Докажем (ii). Так как $v \circ u = 0$ и $v' \circ u' = 0$, то совершенно ясно, что

$$\operatorname{Ker}(b) + \operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(v' \circ b) = \operatorname{Ker}(c \circ v).$$

Обратно, пусть $x \in \operatorname{Ker}(v' \circ b)$. Тогда $b(x) \in \operatorname{Ker}(v')$ и существует такой элемент $y' \in A'$, что $u'(y') = b(x)$ (в силу точности последовательности (u', v')). Поскольку гомоморфизм a сюръективен, существует $y \in A$, для которого $a(y) = y'$, откуда $b(x) = u'(a(y)) = b(u(y))$; следовательно, $x - u(y) \in \operatorname{Ker}(b)$, что и завершает доказательство.

Лемма 1. *Пусть дана коммутативная диаграмма коммутативных групп*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ A' & \xrightarrow[u']{} & B' \end{array} \tag{13}$$

Тогда существуют, и притом единственные, гомоморфизмы u_1: $\mathrm{Ker}(a) \to \mathrm{Ker}(b)$ и u_2: $\mathrm{Coker}(a) \to \mathrm{Coker}(b)$, *такие, что диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}(a) & \xrightarrow{u_1} & \mathrm{Ker}(b) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ A & \xrightarrow[u]{} & B \end{array} \tag{14}$$

и

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{u'} & B' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \mathrm{Coker}(a) & \xrightarrow[u_2]{} & \mathrm{Coker}(b) \end{array} \tag{15}$$

коммутативны (здесь i *и* j *обозначают канонические инъективные, а* p *и* q *— канонические сюръективные гомоморфизмы).*

Действительно, если $x \in \mathrm{Ker}(a)$, то $a(x) = 0$ и $b(u(x)) = u'(a(x)) = 0$; следовательно, $u(x) \in \mathrm{Ker}(b)$ и потому существование и единственность гомоморфизма u_1 очевидны. Аналогичным образом проверяется, что $u'(a(A)) = b(u(A)) \subset b(B)$; следовательно, гомоморфизм u' определяет при переходе к фактормодулям некоторый гомоморфизм u_2: $\mathrm{Coker}(a) \to \mathrm{Coker}(b)$, который единствен в силу требования коммутативности диаграммы (15).

Обратимся теперь к *коммутативной* диаграмме (10) коммутативных групп; в силу леммы 1, ей соответствует диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ker}(a) & \xrightarrow{u_1} & \mathrm{Ker}(b) & \xrightarrow{v_1} & \mathrm{Ker}(c) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & {\scriptstyle j}\downarrow & & {\scriptstyle k}\downarrow \\ A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & {\scriptstyle b}\downarrow & & {\scriptstyle c}\downarrow \\ A' & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & C' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow & & {\scriptstyle r}\downarrow \\ \mathrm{Coker}(a) & \xrightarrow[u_2]{} & \mathrm{Coker}(b) & \xrightarrow[v_2]{} & \mathrm{Coker}(c) \end{array} \tag{16}$$

где i, j, k — канонические инъективные, а p, q, r — канонические сюръективные гомоморфизмы и где u_1, u_2 (соответственно v_1, v_2) — гомоморфизмы, канонически связанные в силу леммы 1 с гомоморфизмами u, u' (соответственно v, v'). Немедленно проверяется, что эта диаграмма коммутативна.

Предложение 2. *Предположим, что в коммутативной диаграмме* (10) *последовательности* (u, v) *и* (u', v') *точны. Тогда*

(i) *имеет место равенство* $v_1 \circ u_1 = 0$; *если гомоморфизм* u' *инъективен, то последовательность* (u_1, v_1) *точна*;

(ii) *имеет место равенство* $v_2 \circ u_2 = 0$; *если гомоморфизм* v *сюръективен, то последовательность* (u_2, v_2) *точна*;

(iii) *допустим, что* u' *— инъективный, а* v *— сюръективный гомоморфизм. Тогда существует и притом только один гомоморфизм* d: $\operatorname{Ker}(c) \to \operatorname{Coker}(a)$, *обладающий следующим свойством: если элементы* $x \in \operatorname{Ker}(c)$, $y \in B$ *и* $t' \in A'$ *удовлетворяют соотношениям* $v(y) = k(x)$ *и* $u'(t') = b(y)$, *то* $d(x) = p(t')$. *Кроме того, будет точной такая последовательность*:

$$\operatorname{Ker}(a) \xrightarrow{u_1} \operatorname{Ker}(b) \xrightarrow{v_1} \operatorname{Ker}(c) \xrightarrow{d} \xrightarrow{d} \operatorname{Coker}(a) \xrightarrow{u_2} \operatorname{Coker}(b) \xrightarrow{v_2} \operatorname{Coker}(c). \quad (*)$$

Докажем (i). Поскольку гомоморфизмы u_1 и v_1 действуют как ограничения на $\operatorname{Ker}(a)$ и $\operatorname{Ker}(b)$ гомоморфизмов u и v соответственно, то $v_1 \circ u_1 = 0$. Очевидно, имеют место следующие равенства: $\operatorname{Ker}(v_1) = \operatorname{Ker}(b) \cap \operatorname{Ker}(v) = \operatorname{Ker}(b) \cap \operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(j) \cap \operatorname{Im}(u)$. Но в силу предложения 1 (i) имеем $\operatorname{Ker}(v_1) = \operatorname{Im}(j \circ u_1) = \operatorname{Im}(u_1)$ при условии, что u' — инъективный гомоморфизм.

Докажем (ii). Поскольку гомоморфизмы u_2 и v_2 получаются из гомоморфизмов u и v посредством перехода к фактормодулям, совершенно ясно, что $v_2 \circ u_2 = 0$. Пусть гомоморфизм v сюръективен; так как p и q также сюръективны, то в силу предположений и предложения 1 (ii)

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(v_2) &= q(\operatorname{Ker}(v_2 \circ q)) = q(\operatorname{Ker}(v') + \operatorname{Im}(b)) = \\ &= q(\operatorname{Ker}(v')) = q(\operatorname{Im}(u')) = \operatorname{Im}(q \circ u') = \\ &= \operatorname{Im}(u_2 \circ p) = \operatorname{Im}(u_2).\end{aligned}$$

Докажем, наконец, (iii). Для любого $x \in \operatorname{Ker}(c)$ существует такой $y \in B$, что $v(y) = k(x)$, так как гомоморфизм v сюръективен; с другой стороны, $v'(b(y)) = c(k(x)) = 0$ и, следовательно, существует *единственный* элемент $t' \in A'$, для которого $u'(t') = b(y)$ (в силу инъективности u'). Покажем, что элемент $p(t') \in \operatorname{Coker}(a)$ *не зависит* от элемента $y \in B$, для которого $v(y) = k(x)$. Действительно, если существует второй такой элемент $y' \in B$, что $v(y') = k(x)$, то $y' = y + u(z)$, где $z \in A$; если

для элемента $t'' \in A'$ имеет место равенство $u'(t'') = b(y')$, то $t'' = t' + a(z)$, поскольку $u'(t' + a(z)) = u'(t') + u'(a(z)) = b(y) + b(u(z)) = b(y + u(z)) = b(y')$. Наконец, легко показать, что $p(t'') = p(t') + p(a(z)) = p(t')$. Следовательно, можно положить $d(x) = p(t')$, а это и определяет отображение d: $\mathrm{Ker}(c) \to \mathrm{Coker}(a)$.

Если теперь x_1, x_2 — элементы модуля $\mathrm{Ker}(c)$ и $x = x_1 + x_2$, то возьмем элементы y_1 и y_2 из модуля B так, чтобы $v(y_1) = k(x_1)$ и $v(y_2) = k(x_2)$, а в качестве $y \in B$ возьмем элемент $y_1 + y_2$; тогда немедленно получится, что $d(x) = d(x_1) + d(x_2)$, т. е. d — *гомоморфизм*.

Пусть $x = v_1(x')$ для некоторого $x' \in \mathrm{Ker}(b)$, тогда в качестве $y \in B$ возьмем элемент $j(x')$. Так как $b(j(x')) = 0$, то $d(x) = 0$ и, следовательно, $d \circ v_1 = 0$. Обратно, предположим, что $d(x) = 0$. Тогда в прежних обозначениях имеет место равенство $t' = a(s)$, где $s \in A$. Но в таком случае $b(y) = u'(t') = u'(a(s)) = b(u(s))$, откуда вытекает, что $b(y - u(s)) = 0$. Следовательно, элемент $y - u(s)$ имеет вид $j(n)$ для некоторого $n \in \mathrm{Ker}(b)$ и справедливы соотношения $k(x) = v(y) = v(u(s) + j(n)) = v(j(n)) = k(v_1(n))$; благодаря инъективности гомоморфизма k выполняется равенство $x = v_1(n)$, что доказывает точность последовательности (*) в члене $\mathrm{Ker}(c)$.

Наконец (по-прежнему в тех же обозначениях), $u_2(d(x)) = u_2(p(t')) = q(u'(t')) = q(b(y)) = 0$; следовательно, $u_2 \circ d = 0$, Обратно, допустим, что элемент $w = p(t')$ модуля $\mathrm{Coker}(a)$ таков, что $u_2(w) = u_2(p(t')) = 0$ (где $t' \in A'$). Тогда $q(u'(t')) = 0$, и поэтому $u'(t') = b(y)$ для некоторого $y \in B$; так как $v'(u'(t')) = 0$, то $v'(b(y)) = 0$ и, следовательно, $c(v(y)) = 0$; другими словами, $v(y) = k(x)$ при некотором $x \in \mathrm{Ker}(c)$ и по определению $w = d(x)$, что доказывает точность последовательности (*) в члене $\mathrm{Coker}(a)$. Мы уже показали в утверждении (i), что она точна в члене $\mathrm{Ker}(b)$, а в (ii) была доказана ее точность в члене $\mathrm{Coker}(b)$. Доказательство пункта (iii) завершено.

Замечание. Если все группы в диаграмме (10) являются модулями (например, правыми) над кольцом A, а гомоморфизмы представляют собой гомоморфизмы A-модулей, то немедленно проверяется, что гомоморфизм d, определенный в предложении 2 (iii), есть гомоморфизм A-модулей: достаточно заметить, что для $x \in \mathrm{Ker}(c)$, $\alpha \in A$ и элемента $y \in B$, такого, что $v(y) = k(x)$, имеет место равенство $v(y\alpha) = k(x\alpha)$.

Следствие 1. *Пусть диаграмма* (10) *коммутативна и имеет точные строки. Тогда*

(i) *если гомоморфизмы* u', a *и* c *инъективны, то инъективен и гомоморфизм* b;

(ii) *если гомоморфизмы* v, a *и* c *сюръективны, то сюръективен и гомоморфизм* b.

Утверждение (i) является следствием утверждения (i) из предложения 2. Действительно, $\mathrm{Ker}(a) = 0$ и $\mathrm{Ker}(c) = 0$, следовательно, $\mathrm{Ker}(b) = 0$.

Утверждение (ii) является следствием утверждения (ii) из предложения 2. Действительно, $\mathrm{Coker}(a) = 0$ и $\mathrm{Coker}(c) = 0$, следовательно, $\mathrm{Coker}(b) = 0$.

Следствие 2. *Пусть диаграмма* (10) *коммутативна и ее строки точны. При этих условиях*

(i) *если гомоморфизм b инъективен, а гомоморфизмы a и v сюръективны, то гомоморфизм c инъективен*;

(ii) *если гомоморфизм b сюръективен, а гомоморфизмы c и u' инъективны, то гомоморфизм a сюръективен.*

Для доказательства пункта (i) рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} u(A) & \xrightarrow{w} & B & \xrightarrow{v} & C \\ \downarrow{\scriptstyle a'} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle c} \\ u'(A') & \xrightarrow[w']{} & B' & \xrightarrow[v']{} & C' \end{array}$$

в которой отображение a' действует как ограничение гомоморфизма b на модуль $u(A)$, а w и w' — канонические инъективные гомоморфизмы. Очевидно, что эта диаграмма коммутативна и имеет точные строки. С другой стороны, гомоморфизм w' инъективен, а гомоморфизм v по предположению сюръективен. Следовательно, согласно предложению 2 (iii), точна последовательность

$$0 = \mathrm{Ker}(b) \to \mathrm{Ker}(c) \xrightarrow{d} \mathrm{Coker}(a') = 0,$$

в которой равенства объясняются тем, что b — инъективный и a' — сюръективный гомоморфизмы; отсюда вытекает, что $\mathrm{Ker}(c) = 0$.

Для доказательства пункта (ii) рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{w} & v(B) \\ \downarrow{\scriptstyle a} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle c'} \\ A' & \xrightarrow[u']{} & B' & \xrightarrow[w']{} & v'(B') \end{array}$$

где на этот раз отображение c' совпадает с ограничением гомоморфизма c на модуль $v(B)$, а отображения w и w' действуют так же, как гомоморфизмы v и v' соответственно. Эта диаграмма коммутативна, а ее строки — точные последовательности. С другой стороны, гомоморфизм w сюръективен и по

предположению гомоморфизм u' инъективен. Следовательно, в силу предложения 2 (iii), точна последовательность

$$0 = \mathrm{Ker}\,(c') \xrightarrow{d} \mathrm{Coker}\,(a) \to \mathrm{Coker}\,(b) = 0$$

в которой равенства объясняются тем, что b — сюръективный, а c' — инъективный гомоморфизмы. Отсюда вытекает, что $\mathrm{Coker}\,(a) = 0$.

Упражнения

1) Предположим, что в коммутативной диаграмме (10) пара (u', v') является точной последовательностью и что $v \circ u = 0$. Показать, что имеют место равенства

$$\mathrm{Im}\,(b) \cap \mathrm{Im}\,(u') = b\,(\mathrm{Ker}\,(c \circ v)) \quad \text{и} \quad \mathrm{Ker}\,(b) + \mathrm{Ker}\,(v) = b^{-1}\,(\mathrm{Im}\,(u' \circ a)).$$

2) Рассмотрим коммутативную диаграмму коммутативных групп

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & {\scriptstyle b}\downarrow & & {\scriptstyle c}\downarrow \\ A' & \xrightarrow[u']{} & B' & \xrightarrow[v']{} & C' \\ {\scriptstyle a'}\downarrow & & {\scriptstyle b'}\downarrow & & \\ A'' & \xrightarrow[u'']{} & B'' & & \end{array}$$

Предположим, что: 1° пары (u, v) и (b, b') являются точными последовательностями; 2° $v' \circ u' = 0$ и $a' \circ a = 0$; 3° гомоморфизмы c и u' инъективны, а гомоморфизм a' сюръективен. Показать, что тогда инъективным является и гомоморфизм u''.

3) Рассмотрим коммутативную диаграмму коммутативных групп

$$\begin{array}{ccccccc} & & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D \\ & & \downarrow & & \downarrow & & {\scriptstyle d}\downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ A'' & \xrightarrow{u''} & B'' & \longrightarrow & C'' & & \\ {\scriptstyle a''}\downarrow & & \downarrow & & & & \\ A''' & \xrightarrow[u'''']{} & B''' & & & & \end{array}$$

Предположим, что в ней точны строки и столбцы, что гомоморфизмы d и u'' инъективны, а гомоморфизм a'' сюръективен. Показать, что тогда гомоморфизм u''' инъективен. Обобщить полученный результат.

4) Рассмотрим коммутативную диаграмму коммутативных групп

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & {\scriptstyle b}\downarrow & & {\scriptstyle c}\downarrow & & {\scriptstyle d}\downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' \end{array}$$

и предположим, что в ней точны обе строки.

а) Показать, что если гомоморфизм a сюръективен, а гомоморфизмы b и d инъективны, то c — инъективный гомоморфизм.

б) Показать, что если гомоморфизм d инъективен, а гомоморфизмы a и c сюръективны, то b — сюръективный гомоморфизм.

5) Предположим, дана точная последовательность $A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A'' \longrightarrow 0$ и два сюръективных гомоморфизма $B' \xrightarrow{a'} A'$, $B'' \xrightarrow{a''} A''$, где A, A', A'', B', B'' — модули над одним и тем же кольцом. Показать, что если модуль B'' *проективен* [1]), то существует такой сюръективный гомоморфизм a: $B' \oplus B'' \to A$, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc} B' & \xrightarrow{i} & B' \oplus B'' & \xrightarrow{p} & B'' \\ \downarrow{\scriptstyle a'} & & \downarrow{\scriptstyle a} & & \downarrow{\scriptstyle a''} \\ A' & \xrightarrow[u]{} & A & \xrightarrow[v]{} & A'' \end{array}$$

(через i и p обозначены канонические отображения).

6) Предположим, дана точная последовательность $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A''$ и два инъективных гомоморфизма $A' \xrightarrow{a'} C'$, $A'' \xrightarrow{a''} C''$, где A, A', A'', C', C'' — модули над одним и тем же кольцом. Показать, что если модуль C' *инъективен* (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 2, exercice 11) [2]), то существует такой инъективный гомоморфизм a: $A \to C' \oplus C''$, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{u} & A & \xrightarrow{v} & A'' \\ \downarrow{\scriptstyle a'} & & \downarrow{\scriptstyle a} & & \downarrow{\scriptstyle a''} \\ C' & \xrightarrow[i]{} & C' \oplus C'' & \xrightarrow[p]{} & C'' \end{array}$$

(через i и p обозначены канонические отображения).

7) Пусть U, V, W — три коммутативные группы, а f: $U \to V$, g: $V \to W$ — некоторые гомоморфизмы.

а) Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{\alpha} & U \times V & \xrightarrow{\beta} & V & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle -g} & & \\ 0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{\gamma} & W \times V & \xrightarrow{\delta} & W & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Здесь $\alpha(u) = (u, f(u))$, $\beta(u, v) = v - f(u)$, $\gamma(v) = (g(v), v)$, $\delta(w, v) = w - g(v)$, $h(u, v) = (g(f(u), v))$. Показать, что эта диаграмма коммутативна и ее строки точны.

б) Построить с помощью а) и предложения 2 n° 4 точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Ker}\,(f) \to \mathrm{Ker}\,(g \circ f) \to \mathrm{Ker}\,(g) \to \mathrm{Coker}\,(f) \to \mathrm{Coker}\,(g \circ f) \to \mathrm{Coker}\,(g) \to 0.$$

Дать непосредственное описание этой точной последовательности.

---

[1]) См. Маклейн С., Гомология, «Мир», М., 1966, стр. 125, 134, или Ленг С., Алгебра, «Мир», М., 1968, стр. 112, 113. (В дальнейшем мы эти книги будем обозначать [М] и [Л] соответственно.) — *Прим. перев.*

[2]) См. [М], стр. 134, или [Л], стр. 113. — *Прим. перев.*

§ 2. Плоские модули [1])

1. Тензорные произведения

Пусть A — кольцо, E — правый и M — левый A-модули. Тогда определено (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 3, n° 1) [2]) *тензорное произведение* $E \otimes_A M$, являющееся $\mathbf{Z}$-модулем. Если E' (соответственно M') — правый A-модуль (соответственно левый A-модуль) и $u\colon E \to E'$ (соответственно $v\colon M \to M'$) некоторый гомоморфизм, то определен (loc. cit., n° 2) [3]) $\mathbf{Z}$-*гомоморфизм*

$$u \otimes v\colon E \otimes_A M \to E' \otimes_A M'.$$

Лемма 1. *Пусть* $M' \xrightarrow{v} M \xrightarrow{w} M'' \longrightarrow 0$ *— точная последовательность левых* A*-модулей, и пусть* E *— правый* A*-модуль. Тогда последовательность*

$$E \otimes_A M' \xrightarrow{1 \otimes v} E \otimes_A M \xrightarrow{1 \otimes w} E \otimes_A M'' \longrightarrow 0$$

является точной последовательностью коммутативных групп.

См. следствие предложения 5 из *Algébre*, chap. II, 3e éd., § 3, n° 6 [4]).

Из сказанного ясно, что для всякого гомоморфизма левых A-*модулей* $u\colon M \to N$ группа $E \otimes_A (\mathrm{Coker}(u))$ канонически отождествляется с $\mathrm{Coker}(1_E \otimes u)$. Это показывает лемма 1, примененная к точной последовательности

$$M \xrightarrow{u} N \to \mathrm{Coker}(u) \to 0.$$

Как известно (loc. cit.), если гомоморфизм v *инъективен*, т. е. если (в прежних обозначениях) последовательность $0 \to M' \xrightarrow{v} M \xrightarrow{w} M'' \to 0$ точна, то отсюда еще не следует, что инъективен гомоморфизм $1_E \otimes v$ и, следовательно, вообще говоря, $E \otimes_A M'$ нельзя отождествить с подгруппой в $E \otimes_A M$. Напомним, однако (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 3, n° 7, corollaire 5 de la prorosition 7 [5])), следующий результат:

---

[1]) Обратим внимание читателей, уже знакомых с гомологической алгеброй, что в § 4 они найдут другое описание плоских модулей.

[2]) См. также *Алгебра*, гл. III, § 1, n° 2. — *Прим. перев.*

[3]) См. также *Алгебра*, гл. III, § 1, n° 4. — *Прим. перев.*

[4]) См. также [Л], предложение 6, гл. XVI, § 2, или Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, ИЛ, М., 1962 (сокращенно [КЭ]), предложения 4, 5, гл. II. — *Прим. ред.*

[5]) См. также *Алгебра*, гл. III, § 1, n° 3, предложение 7. — *Прим. перев.*

ЛЕММА 2. *Если гомоморфизм* $v\colon M' \to M$ *инъективен и модуль* $v(M')$ *является прямым слагаемым модуля* M, *то инъективен и гомоморфизм* $1_E \otimes v$, *а его образ является прямым слагаемым в* $E \otimes_A M$.

2. *M*-плоские модули

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Пусть* A — *кольцо,* E — *правый и* M — *левый* A-*модули. Модуль* E *называется плоским относительно модуля* M (*или* M-*плоским*), *если для всякого левого* A-*модуля* M' *и любого инъективного гомоморфизма* $v\colon M' \to M$ *гомоморфизм* $1_E \otimes v\colon E \otimes_A M' \to E \otimes_A M$ *инъективен.*

Аналогичным образом для произвольного правого A-модуля N определяется *левый* N-*плоский модуль.* Утверждение, что правый A-модуль E является плоским относительно левого A-модуля M, равносильно утверждению, что модуль E, рассматриваемый как левый A°-модуль (напомним, что через A° обозначается кольцо, антиизоморфное кольцу A [1]), является плоским относительно правого A°-модуля M.

ЛЕММА 3. *Для того чтобы правый* A-*модуль* E *был* M-*плоским, достаточно, чтобы для любого подмодуля* M' *конечного типа модуля* M *канонический гомоморфизм*

$$1_E \otimes j\colon E \otimes_A M' \to E \otimes_A M$$

(j — *каноническое вложение* $M' \to M$) *был инъективен.*

В самом деле, предположим, что это условие выполнено, и пусть N — произвольный подмодуль модуля M. Допустим, что канонический образ элемента $z = \sum_i x_i \otimes y_i \in E \otimes_A N$ (где $x_i \in E$, $y_i \in N$) в модуле $E \otimes_A M$ равен нулю, и обозначим через M' модуль конечного типа модуля N, порожденный элементами y_i. Ввиду того что по условию композиция отображений $E \otimes_A M' \to E \otimes_A N \to E \otimes_A M$ инъективна, сумма $z' = \sum_i x_i \otimes y_i$ как элемент модуля $E \otimes_A M'$ равна нулю. Но поскольку z является образом элемента z', то $z = 0$, откуда и следует утверждение леммы.

ЛЕММА 4. *Пусть* E — *правый* A-*модуль, а* M — *такой левый* A-*модуль, что* E *является* M-*плоским. Если* N — *подмодуль или фактормодуль модуля* M, *то модуль* E *является* N-*плоским.*

---

[1]) В *Алгебре*, гл. I, § 8, n° 1, такое кольцо называется противоположным. — *Прим. ред.*

Случай, когда N является подмодулем, разбирается легко: если N' — подмодуль в N, то композиция гомоморфизмов

$$E \otimes_A N' \to E \otimes_A N \to E \otimes_A M$$

инъективна, а потому инъективен и гомоморфизм $E \otimes_A N' \to E \otimes_A N$. Предположим, таким образом, что N — фактормодуль модуля M, т. е. существует точная последовательность $0 \to R \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N \to 0$. Пусть N' — подмодуль модуля N и $M' = p^{-1}(N')$. Обозначим через i' отображение модуля R в M', действующее так же, как i, через p' — сюръективный гомоморфизм $M' \to N'$, действующий как ограничение на M' гомоморфизма p, через r — тождественное отображение модуля R на R, через m — канонический инъективный гомоморфизм $M' \to M$ и через n — каноническое вложение $N' \to N$. Диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & R & \xrightarrow{i'} & M' & \xrightarrow{p'} & N' \to 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle r} & & \downarrow{\scriptstyle m} & & \downarrow{\scriptstyle n} \\ 0 & \to & R & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & N \to 0 \end{array}$$

коммутативна, а ее строки точны.

Для упрощения записи положим $T(Q) = E \otimes_A Q$ для всякого левого A-модуля Q и $T(v) = 1_E \otimes v$ для всякого гомоморфизма v левых A-модулей. Диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} T(R) & \xrightarrow{T(i')} & T(M') & \xrightarrow{T(p')} & T(N') \to 0 \\ \downarrow{\scriptstyle T(r)} & & \downarrow{\scriptstyle T(m)} & & \downarrow{\scriptstyle T(n)} \\ T(R) & \xrightarrow[T(i)]{} & T(M) & \xrightarrow[T(p)]{} & T(N) \to 0 \end{array}$$

коммутативна, и ее строки точны в силу леммы 1 n° 1. Кроме того, поскольку E является M-плоским модулем, гомоморфизм $T(m)$ инъективен. Так как гомоморфизмы $T(r)$ и $T(p')$ сюръективны, то следствие 2 из предложения 2 § 1, n° 4, доказывает инъективность гомоморфизма $T(n)$, а отсюда вытекает утверждение леммы.

Лемма 5. *Пусть $(M_\iota)_{\iota \in I}$ — некоторое семейство левых A-модулей, $M = \bigoplus_{\iota \in I} M_\iota$ — их прямая сумма и E — правый A-модуль. Если при каждом $\iota \in I$ модуль E является плоским относительно модуля M_ι, то E — плоский и относительно модуля M.*

а) Сначала предположим, что $I = \{1, 2\}$. Пусть M' — какой-нибудь подмодуль прямой суммы $M = M_1 \oplus M_2$, причем M_1 и M_2 каноническим образом отождествлены с подмодулями модуля M. Обозначим через M'_1 пересечение $M' \cap M_1$, а через M'_2 образ мо-

дуля M' в модуле M_2 при канонической проекции p модуля M на M_2. Тогда получается диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & M_1' & \xrightarrow{i'} & M' & \xrightarrow{p'} & M_2' \to 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle v_1} & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle v_2} \\ 0 & \to & M_1 & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{p} & M_2 \to 0 \end{array}$$

в которой v_1, v, v_2, i, i' — канонические вложения, а p' — сюръективное отображение, действующее как ограничение p на M'. Немедленно проверяется, что указанная диаграмма коммутативна и что ее строки точны. Сохраняя за обозначениями $T(Q)$ и $T(v)$ тот же смысл, что и в доказательстве леммы 4, получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} T(M_1') & \xrightarrow{T(i')} & T(M') & \xrightarrow{T(p')} & T(M_2') \\ \downarrow{\scriptstyle T(v_1)} & & \downarrow{\scriptstyle T(v)} & & \downarrow{\scriptstyle T(v_2)} \\ T(M_1) & \xrightarrow[T(i)]{} & T(M) & \xrightarrow[T(p)]{} & T(M_2) \end{array}$$

В силу леммы 1 n° 1 обе строки в этой диаграмме точны. Так как модуль E является плоским относительно M_1 и M_2, то отображения $T(v_1)$ и $T(v_2)$ инъективны; кроме того, в силу леммы 2 n° 1 инъективным является отображение $T(i)$. Поэтому следствие 1 из предложения 2 § 1, n° 4, показывает, что отображение $T(v)$ инъективно и, следовательно, модуль E является M-плоским.

б) Если I — конечное множество из n элементов, то результат получается из пункта а) с помощью индукции по n.

в) Рассматривая общий случай, предположим, что M' — подмодуль *конечного типа* модуля M. Тогда существует такая конечная часть J множества индексов I, что M' содержится в прямой сумме $M_J = \bigoplus_{\iota \in J} M_\iota$. Согласно пункту б), модуль E является плоским относительно M_J; канонический гомоморфизм $E \otimes_A M' \to E \otimes_A M_J$ будет, следовательно, инъективным. С другой стороны, так как M_J служит прямым слагаемым модуля M, инъективен канонический гомоморфизм $E \otimes_A M_J \to E \otimes_A M$ (лемма 2 n° 1). С помощью композиции получается инъективный гомоморфизм $E \otimes_A M' \to E \otimes_A M$, откуда, в силу леммы 3, следует, что E — плоский модуль относительно M.

3. *Плоские модули*

Предложение 1. *Пусть E — правый A-модуль. Следующие три свойства эквивалентны:*

а) *модуль E является плоским относительно A* [1]) *(иначе*

[1]) Определение см. в *Алгебре*, гл. II, § 1, n° 1. — *Прим. ред.*

говоря, для всякого левого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A канонический гомоморфизм $E \otimes_A \mathfrak{a} \to E \otimes_A A_s = E$ инъективен);

б) *E является M-плоским модулем для любого левого A-модуля M;*

в) *для всякой точной последовательности левых A-модулей и гомоморфизмов*

$$M' \xrightarrow{v} M \xrightarrow{w} M''$$

последовательность

$$E \otimes_A M' \xrightarrow{1 \otimes v} E \otimes_A M \xrightarrow{1 \otimes w} E \otimes_A M''$$

точна.

Очевидно, что б) влечет за собой а). Обратно, предположим, что выполнено условие а). В силу леммы 5 n° 2 модуль E является плоским относительно любого *свободного* левого A-модуля; поскольку всякий левый A-модуль изоморфен некоторому фактормодулю какого-то свободного модуля (*Algèbre*, chap. II, 3e éd., § 1 n° 11, proposition 20) [1]), то из леммы 4 n° 2 следует, что E — плоский относительно M.

Покажем, что в) влечет за собой б). Если v: $M' \to M$ — инъективный гомоморфизм, то последовательность $0 \to M' \xrightarrow{v} M$ точна; в силу свойства в) последовательность $0 \to E \otimes_A M' \to \xrightarrow{1 \otimes v} E \otimes_A M$ также точна. Это означает, что $1 \otimes v$ — инъективный гомоморфизм или, другими словами, что E является M-плоским модулем.

Наконец, импликация б)$\Rightarrow$ в) вытекает из следующей более точной леммы:

Лемма 6. *Если $M' \xrightarrow{v} M \xrightarrow{w} M''$ — точная последовательность левых A-модулей и если E — правый A-модуль, плоский относительно M'', то последовательность*

$$E \otimes_A M' \xrightarrow{1 \otimes v} E \otimes_A M \xrightarrow{1 \otimes w} E \otimes_A M''$$

точна.

Воспользуемся обозначениями $T(Q)$ и $T(v)$, имеющими тот же смысл, что и в доказательстве леммы 4 n° 2. Положим $M''_1 = w(M)$; пусть i: $M''_1 \to M''$ — каноническое вложение и p — отображение модуля M в M''_1, действующее так же, как w. В виду того что последовательность $M' \xrightarrow{v} M \xrightarrow{p} M''_1 \to 0$ точна, из леммы 1 n° 1 следует, что точна последовательность

$$T(M') \xrightarrow{T(v)} T(M) \xrightarrow{T(p)} T(M''_1) \to 0.$$

[1]) См. также *Алгебра*, гл. II, § 1, n° 8, предложение 10. — *Прим. перев.*

Кроме того, так как E есть M''-плоский модуль, отображение $T(i)$: $T(M_1'') \to T(M'')$ инъективно и в силу равенства $T(i) \circ T(p) = T(w)$ последовательность

$$T(M') \xrightarrow{T(v)} T(M) \xrightarrow{T(w)} T(M'')$$

точна (§ 1, п° 3).

Определение 2. *Говорят, что правый A-модуль E является плоским, если выполняются эквивалентные требования из предложения* 1.

Таким же способом определяются плоские левые A-модули. Для того чтобы правый A-модуль E был плоским, необходимо и достаточно, чтобы он был плоским как левый A°-модуль.

Замечания. 1) В силу леммы 3 п° 2, для того чтобы правый A-модуль E был плоским, необходимо и достаточно, чтобы для всякого левого идеала $\mathfrak{a}$ *конечного* типа в A каноническое отображение $E \otimes_A \mathfrak{a} \to E$ (предложение 1), образом которого служит $E\mathfrak{a}$, было инъективным.

2) Пусть E — плоский правый A-модуль. Если M' — подмодуль некоторого левого A-модуля M, то каноническое вложение $E \otimes_A M' \to E \otimes_A M$ позволяет отождествить $E \otimes_A M'$ с некоторой подгруппой в $E \otimes_A M$. Учитывая это, рассмотрим левый A-модуль N и гомоморфизм u: $M \to N$. Обозначим $K = \mathrm{Ker}(u)$, $I = \mathrm{Im}(u)$. Тогда из точности последовательности

$$0 \to K \to M \xrightarrow{u} N$$

немедленно получается, что $E \otimes_A (\mathrm{Ker}(u))$ *отождествляется* с $\mathrm{Ker}(1_E \otimes u)$. С другой стороны, обозначая через u' сюръективный гомоморфизм $M \to I$, действующий так же, как u, а через i — каноническое вложение $I \to N$, можно утверждать, что $1_E \otimes u'$ — сюръективный гомоморфизм (п° 1, лемма 1), а $1_E \otimes i$ — инъективный гомоморфизм (поскольку E — плоский модуль). Так как $1_E \otimes u = (1_E \otimes i) \circ (1_E \otimes u')$, то $E \otimes_A (\mathrm{Im}(u))$ *отождествляется с* $\mathrm{Im}(1_E \otimes u)$.

Предложение 2. (i) *Пусть $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство правых A-модулей. Для того чтобы модуль $E = \bigoplus_{\iota \in I} E_\iota$ был плоским, необходимо и достаточно, чтобы каждый модуль E_ι был плоским.*

(ii) *Пусть I — упорядоченное множество и $(E_\alpha, f_{\beta,\alpha})$ — индуктивная система правых A-модулей (Algébre, chap. II, 3e éd, § 6, п° 6)* [1]. *Если каждый E_α является плоским, то плоским будет и $E = \varinjlim E_\alpha$.*

[1]) См. также Годеман Р., Алгебраическая топология и теория пучков (в дальнейшем обозначается [Г]), ИЛ, М., 1960, гл. 1, § 1.6. — *Прим. перев.*

Пусть $M' \to M$ — инъективный гомоморфизм левых A-модулей.

(i) Для того чтобы гомоморфизм прямых сумм

$$\bigoplus_{\iota \in I} (E_\iota \otimes_A M') \to \bigoplus_{\iota \in I} (E_\iota \otimes_A M)$$

был инъективным, необходимо и достаточно, чтобы инъективным был каждый гомоморфизм $E_\iota \otimes_A M' \to E_\iota \otimes_A M$ (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 1, n° 6, corollaire 1 de la proposition 7). Этим доказывается утверждение (i), так как прямая сумма $\bigoplus_{\iota \in I} (E_\iota \otimes_A M)$ каноническим образом отождествляется с модулем $E \otimes_A M$ (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 3, n° 7, proposition 7) [1]).

(ii) По предположению каждая последовательность

$$0 \to E_\alpha \otimes_A M' \to E_\alpha \otimes_A M$$

точна; поэтому будет точной и последовательность

$$0 \to E \otimes_A M' \to E \otimes_A M,$$

ибо переход к индуктивному пределу коммутирует с тензорным произведением (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 6, n° 7, proposition 12) и сохраняет точность последовательностей (loc. cit.) [2]).

4. *Примеры плоских модулей*

1) Для любого кольца A, очевидно, A_d [3]) будет плоским A-модулем (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 3, n° 4, proposition 4). Следовательно, любой свободный правый A-модуль и, более общо, любой *проективный* правый A-модуль (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 2, n° 2) [4]) являются плоскими.

2) Если A — *полупростое* кольцо (*Алгебра*, гл. VIII, § 5, n° 1, определение 1), то полупрост и всякий правый A-модуль E, т. е. представляет собой прямую сумму простых модулей; так как каждый модуль из числа этих последних изоморфен некоторому прямому слагаемому модуля A_d (loc. cit., § 5, n° 1, предложение 6), то E проективен и, следовательно, является плоским (пример 1) (см. упражнение 16).

3) В гл. II и III мы детально изучим два важных примера плоских A-модулей: это кольца частных $S^{-1}A$ и отделимые пополнения $\hat{A}$ кольца A относительно $\mathfrak{J}$-адических топологий.

---

[1]) См. также *Алгебра*, Приложение II к гл. III, n° 6, предложение 5. — *Прим. перев.*

[2]) См. также [Г], гл. I, § 1.6. — *Прим. перев.*

[3]) См. *Алгебра*, гл. II, § 1, n° 1. — *Прим. ред.*

[4]) См. также [КЭ], гл. I, § 2. — *Прим. ред.*

Предложение 3. *Пусть A — кольцо и E — правый A-модуль.*

(i) *Предположим, что модуль E плоский. Для всякого элемента $a \in A$, не являющегося правым делителем нуля*[1]*, из соотношений $x \in E$, $xa = 0$ следует, что $x = 0$.*

(ii) *Допустим, что A — целостное коммутативное кольцо*[2]*, в котором всякий идеал конечного типа является главным (например, кольцо главных идеалов (Алгебра, гл. VII, § 1, n° 1)). Тогда, для того чтобы E был плоским модулем, необходимо и достаточно, чтобы E был модулем без кручения.*

Докажем (i). Пусть $v\colon A_s \to A_s$ — гомоморфизм $t \to ta$ левых A-модулей. Из нашего предположения следует, что v — инъективный гомоморфизм. Поскольку E плоский, гомоморфизм $1_E \otimes v\colon E \otimes_A A_s \to E \otimes_A A_s$ также будет инъективным. После канонического отождествления модулей $E \otimes_A A_s$ и E отображение $1_E \otimes v$ переходит в эндоморфизм $x \to xa$ модуля E. Следовательно, из соотношения $xa = 0$ вытекает, что $x = 0$.

Докажем (ii). Согласно утверждению (i), если E — плоский модуль, то он без кручения. Обратно, пусть A-модуль E — без кручения. Проверим, что для идеала $\mathfrak{a}$ конечного типа в A канонический гомоморфизм $E \otimes_A \mathfrak{a} \to E$ инъективен (замечание 1 n° 3). Этот факт очевиден при $\mathfrak{a} = (0)$, в противном случае по предположению $\mathfrak{a} = Aa$, где $a \in A$ и $a \neq 0$. Тогда $t \to ta$ представляет собой некоторый изоморфизм v модуля A на $\mathfrak{a}$; если через i обозначено каноническое вложение $\mathfrak{a} \to A$, то $i \circ v$ есть гомотетия в A, соответствующая элементу a. Поэтому гомоморфизм $1_E \otimes (i \circ v)$ является гомотетией в E, соответствующей элементу a, и он инъективен, так как по предположению E — модуль без кручения. Но поскольку $1_E \otimes (i \circ v) = (1_E \otimes i) \circ (1_E \otimes v)$ и $1_E \otimes v$ есть изоморфизм, то гомоморфизм $1_E \otimes i$ инъективен. Это завершает доказательство.

Пример. Применяя предложение 3 к кольцу $\mathbf{Z}$, мы видим, что $\mathbf{Q}$ является плоским $\mathbf{Z}$-модулем, а $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (при $n \geqslant 2$) — нет.

5. *Плоскостность фактормодулей*

Предложение 4. *Пусть E — правый A-модуль. Следующие три свойства эквивалентны:*

а) *E — плоский модуль;*

б) *для всякой точной последовательности правых A-модулей вида*

$$0 \to G \xrightarrow{v} H \xrightarrow{w} E \to 0 \qquad (1)$$

[1]) Напомним, что *правым* (соответственно *левым*) *делителем нуля* в кольце A называется такой элемент $b \in A$, что отображение $x \to xb$ (соответственно $x \to bx$) не инъективно.

[2]) Часто говорят «область целостности» или «кольцо целостности». — *Прим. ред.*

и всякого левого A-модуля F последовательность

$$0 \to G \otimes_A F \xrightarrow{v \otimes 1} H \otimes_A F \xrightarrow{w \otimes 1} E \otimes_A F \to 0 \qquad (2)$$

точна;

в) *Существует такая точная последовательность* (1) *с плоским модулем H, что последовательность* (2) *точна для всякого левого A-модуля F вида* $A_s/\mathfrak{a}$, *где* $\mathfrak{a}$ — *левый идеал конечного типа в A.*

Сначала покажем, что из а) следует б). Левый A-модуль F изоморфен фактормодулю некоторого свободного модуля (*Algèbre*, chap. II, 3e éd., § 1, n° 11, proposition 20). Иначе говоря, имеет место точная последовательность

$$0 \to R \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} F \to 0,$$

в которой модуль L свободен. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} G \otimes R & \xrightarrow{v \otimes 1_R} & H \otimes R & \xrightarrow{w \otimes 1_R} & E \otimes R \\ \downarrow{\scriptstyle 1_G \otimes i} & & \downarrow{\scriptstyle 1_H \otimes i} & & \downarrow{\scriptstyle 1_E \otimes i} \\ G \otimes L & \xrightarrow{v \otimes 1_L} & H \otimes L & \xrightarrow{w \otimes 1_L} & E \otimes L \\ \downarrow{\scriptstyle 1_G \otimes p} & & \downarrow{\scriptstyle 1_H \otimes p} & & \\ G \otimes F & \xrightarrow[v \otimes 1_F]{} & H \otimes F & & \end{array} \qquad (3)$$

Немедленно устанавливается ее коммутативность, ее строки и столбцы точны в силу леммы 1 n° 1. С другой стороны, поскольку отображения $1_G \otimes p$ и $1_H \otimes p$ сюръективны (лемма 1 n° 1), то $G \otimes F = \mathrm{Coker}(1_G \otimes i)$, $H \otimes F = \mathrm{Coker}(1_H \otimes i)$; гомоморфизм $w \otimes 1_R$ сюръективен лемма 1 n° 1); наконец, так как модуль L свободный, а потому плоский, то гомоморфизм $v \otimes 1_L$ инъективен. Следовательно, можно применить змеевидную диаграмму (предложение 2 (iii) § 1, n° 4), которая устанавливает существование точной последовательности

$$\mathrm{Ker}(1_H \otimes i) \to \mathrm{Ker}(1_E \otimes i) \xrightarrow{d} G \otimes F \xrightarrow{v \otimes 1_F} H \otimes F. \qquad (4)$$

Если E — плоский модуль, то $1_E \otimes i$ — инъективный гомоморфизм; другими словами, $\mathrm{Ker}(1_E \otimes i) = 0$, и точная последовательность (4) показывает, что отображение $v \otimes 1_F$ инъективно; поэтому (2) — точная последовательность (следует принять во внимание лемму 1 n° 1).

Так как, очевидно, из б) следует в), то нам остается лишь доказать, что из в) следует а). Рассмотрим диаграмму (3) в случае $R = \mathfrak{a}$, $L = A_s$, $F = A_s/\mathfrak{a}$ и применим точную последовательность (4). По предположению $v \otimes 1_F$ — инъективный гомо-

морфизм; следовательно, $\mathrm{Im}(d) = 0$. С другой стороны, так как H — плоский модуль, $\mathrm{Ker}(1_H \otimes i) = 0$. Из точности последовательности (4) получаем, что $\mathrm{Ker}(1_E \otimes i) = 0$, т. е. $1_E \otimes i$ — инъективный гомоморфизм, а это доказывает, что E является плоским модулем (замечание 1 n° 3).

Предложение 5. *Пусть* $0 \to E' \xrightarrow{v} E \xrightarrow{w} E'' \to 0$ *— точная последовательность правых A-модулей. Предположим, что модуль E'' плоский. Тогда, для того чтобы модуль E был плоским, необходимо и достаточно, чтобы плоским был модуль E'.*

Пусть $u\colon F' \to F$ — инъективный гомоморфизм левых A-модулей. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} E' \otimes F' & \xrightarrow{v \otimes 1_{F'}} & E \otimes F' & \xrightarrow{w \otimes 1_{F'}} & E'' \otimes F' \\ \downarrow{\scriptstyle 1_{E'} \otimes u} & & \downarrow{\scriptstyle 1_E \otimes u} & & \downarrow{\scriptstyle 1_{E''} \otimes u} \\ E' \otimes F & \xrightarrow[v \otimes 1_F]{} & E \otimes F & \xrightarrow[w \otimes 1_F]{} & E'' \otimes F \end{array}$$

Она коммутативна и строки ее точны (лемма 1 n° 1). Так как модуль E'' плоский, гомоморфизм $1_{E''} \otimes u$ инъективен; с другой стороны, предложение 4 доказывает, что $v \otimes 1_{F'}$ и $v \otimes 1_F$ — инъективные гомоморфизмы. Поэтому если модуль E плоский, то гомоморфизм $1_E \otimes u$ инъективен, а тогда инъективно и отображение $(1_E \otimes u) \circ (v \otimes 1_{F'}) = (v \otimes 1_F) \circ (1_{E'} \otimes u)$; отсюда следует, что инъективно отображение $1_{E'} \otimes u$ и, тем самым, что E' — плоский модуль. Обратно, если модуль E' плоский, то гомоморфизм $1_{E'} \otimes u$ инъективен. Тогда из следствия 1 предложения 2 § 1, n° 4, получается, что инъективен гомоморфизм $1_E \otimes u$, и, следовательно E — плоский модуль.

Замечания. 1) Может оказаться и так, что модули E и E' плоские, но E'' плоским не является. Это показывает следующий пример $\mathbf{Z}$-модулей: $E = \mathbf{Z}$, $E' = n\mathbf{Z}$, $E'' = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ $(n \geqslant 2)$.

2) Подмодуль плоского модуля не обязан быть плоским (упражнение 3).

6. *Свойства пересечения*

Лемма 7. *Пусть E — правый A-модуль, F — левый A-модуль и F', F'' — такие подмодули в F, что $F = F' + F''$. Тогда пересечение канонических образов модулей $E \otimes F'$ и $E \otimes F''$ в модуле $E \otimes F$ равно каноническому образу модуля $E \otimes (F' \cap F'')$.*

Действительно, рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to F' \cap F'' & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & F'/(F' \cap F'') & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \to F'' & \longrightarrow & F' + F'' & \longrightarrow & (F' + F'')/F'' & \to & 0 \end{array}$$

в которой j — канонический изоморфизм, а остальные стрелки — канонические инъективные и сюръективные гомоморфизмы (*Алгебра*, гл. I, § 6, n° 13, теорема 6). Эта диаграмма коммутативна и строки ее точны. Отсюда получается (поскольку $F = F' + F''$) следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc} E \otimes (F' \cap F'') & \to & E \otimes F' & \to & E \otimes (F'/(F' \cap F'')) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_E \otimes j} \\ E \otimes F'' & \to & E \otimes F & \to & E \otimes (F/F'') \end{array}$$

В этой диаграмме строки точны (лемма 1 n° 1), а отображение $1_E \otimes j$ является изоморфизмом. Теперь наше утверждение стало частным случаем предложения 1 (i) § 1, n° 4. (См. упражнение 5.)

Предложение 6. *Пусть E — правый A-модуль, F — левый A-модуль, причем E плоский относительно F. Для всякого подмодуля $F' \subset F$ обозначим через $\varphi(F')$ образ модуля $E \otimes F'$ при каноническом отображении группы $E \otimes F'$ в $E \otimes F$ (которое инъективно согласно определению* 1 n° 2). *Тогда если F', F'' — два подмодуля в F, то*

$$\varphi(F' \cap F'') = \varphi(F') \cap \varphi(F'').$$

В самом деле, ввиду того, что модуль E является F-плоским, модуль $\varphi(F' + F'')$ отождествляется с $E \otimes (F' + F'')$, а подмодули $\varphi(F')$, $\varphi(F'')$ и $\varphi(F' \cap F'')$ отождествляются с каноническими образами в модуле $E \otimes (F' + F'')$ модулей $E \otimes F'$, $E \otimes F''$ и $E \otimes (F' \cap F'')$ соответственно. Теперь предложение 6 следует из леммы 7.

Замечание 1. В условиях предложения 6 модуль $E \otimes F'$ отождествляется, как обычно, с модулем $\varphi(F')$ для каждого подмодуля $F' \subset F$, откуда получается формула

$$E \otimes_A (F' \cap F'') = (E \otimes_A F') \cap (E \otimes_A F'').$$

Предложение 7. *Пусть E — правый, а F — левый A-модули. Пусть E' — подмодуль модуля E, а F' — подмодуль модуля F. Предположим, что один из модулей E/E' или F/F' плоский. Тогда канонический образ модуля $E' \otimes F'$ в $E \otimes F$ равен пересечению канонических образов модулей $E' \otimes F$ и $E \otimes F'$ в $E \otimes F$.*

Пусть, например, E/E' — плоский модуль. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} E' \otimes F' & \to & E \otimes F' & \to & (E/E') \otimes F' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ E' \otimes F & \to & E \otimes F & \to & (E/E') \otimes F \end{array}$$

в которой стрелками обозначены канонические гомоморфизмы. Эта диаграмма коммутативна, и ее строки точны (лемма 1 п° 1). Поскольку E/E' — плоский модуль, гомоморфизм u инъективен. Наше утверждение стало теперь частным случаем предложения 1 (i) § 1, п° 4.

Следствие. *Пусть E — правый A-модуль и E' — его подмодуль.*

(i) *Предположим, что E/E' — плоский модуль. Тогда для каждого левого идеала $\mathfrak{a} \subset A$ имеет место равенство*

$$E'\mathfrak{a} = E' \cap E\mathfrak{a}. \tag{5}$$

(ii) *Обратно, предположим, что модуль E — плоский и что для всякого левого идеала $\mathfrak{a}$ конечного типа в кольце A выполняется соотношение* (5). *Тогда E/E' — плоский модуль.*

(i) Достаточно воспользоваться предложением 7, где $F = A_s$, $F' = \mathfrak{a}$.

(ii) Чтобы проверить, что модуль E/E' плоский, применим критерий в) предложения 4 п° 5; нам нужно, таким образом, установить, что последовательность

$$0 \to E'/E'\mathfrak{a} \to E/E\mathfrak{a} \to E/(E' + E\mathfrak{a}) \to 0$$

точна в члене $E'/E'\mathfrak{a}$ для каждого левого идеала $\mathfrak{a}$ конечного типа в кольце A. Но именно это выражает соотношение (5).

Замечание 2. Утверждение предложения 7 остается верным, если предположить лишь, что E/E' — плоский модуль относительно F или что F/F' — плоский модуль относительно E.

7. Тензорные произведения плоских модулей

Пусть A, B — два кольца, E — правый A-модуль, F — некоторый (A, B)-*бимодуль* (*Algèbre*, chap. II, 3e éd., § 1, n° 14) [1]). Напомним (*Algèbre*, chap. II, 3e éd., § 3, n° 4), что тензорное произведение $E \otimes_A F$ каноническим образом снабжается структурой правого B-модуля, причем

$$(x \otimes y)\, b = x \otimes (yb) \quad \text{для} \quad x \in E,\ y \in F,\ b \in B.$$

Предложение 8. *Пусть A, B — два кольца, E — правый A-модуль и F — некоторый (A, B)-бимодуль. Предположим, что E — плоский модуль и F как B-модуль тоже является плоским. Тогда плоским будет и B-модуль $E \otimes_A F$.*

Действительно, пусть G — левый B-модуль и G' — его подмодуль. Поскольку F как правый B-модуль является плоским,

[1]) См. также [КЭ], гл. II, § 3. — *Прим. перев.*

канонический гомоморфизм $F\otimes_B G' \to F\otimes_B G$ инъективен. Так как E — плоский модуль, то канонический гомоморфизм

$$E\otimes_A(F\otimes_B G')\to E\otimes_A(F\otimes_B G)$$

инъективен. Так как модули $E\otimes_A(F\otimes_B G')$ и $E\otimes_A(F\otimes_B G)$ канонически отождествляются с $(E\otimes_A F)\otimes_B G'$ и $(E\otimes_A F)\otimes_B G$ соответственно (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 3, n° 8, proposition 8) [1]), то канонический гомоморфизм $(E\otimes_A F)\otimes_B G'\to (E\otimes_A F)\otimes_B G$ инъективен, откуда следует, что $E\otimes_A F$ — плоский B-модуль.

Следствие 1. *Пусть C — коммутативное кольцо, E, F — два плоских C-модуля. Тогда $E\otimes_C F$ является плоским C-модулем.*

В самом деле, F есть (C, C)-бимодуль; поэтому достаточно применить предложение 8 при $B = A = C$.

Следствие 2. *Пусть ρ — гомоморфизм кольца A в кольцо B. Если E — плоский правый A-модуль, то правый B-модуль $\rho^*(E) = E_{(B)}$, полученный расширением кольца скаляров до B (Algébre*, chap. II, 3e éd., § 5, n° 1) [2]), *является плоским.*

В самом деле, по определению $E_{(B)} = E\otimes_A B$, где B рассматривается с помощью ρ как (A, B)-бимодуль. Так как правый B-модуль B_d плоский, то достаточно применить предложение 8.

Следствие 3. *Пусть R, S — два кольца и φ: $R\to S$ — гомоморфизм колец. Если M — плоский правый S-модуль, а $\varphi_*(S_d)$ — плоский правый R-модуль, то $\varphi_*(M)$ является плоским правым R-модулем.*

Напомним, что $\varphi_*(M)$ — *это правый* R-модуль, определяемый условием $x\cdot r = x\cdot\varphi(r)$ для всякого $x\in M$ и всех $r\in R$ (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 1, n° 13). Теперь применим предложение 8 при $A = S$, $B = R$, $E = M$ и $F = S$, причем S предполагается наделенным структурой (S, R)-бимодуля, определенной при помощи гомоморфизма φ. Тогда правый R-модуль $M\otimes_S S$ есть не что иное, как $\varphi_*(M)$.

Предложение 9. *Пусть $(A_\alpha, f_{\beta\alpha})$ — фильтрующаяся [3]) индуктивная система колец, $A = \varinjlim A_\alpha$ — ее индуктивный предел, $(E_\alpha, g_{\beta\alpha})$ — индуктивная система правых A_α-модулей, имеющая то же множество индексов, и $E = \varinjlim E_\alpha$ — ее индуктивный предел, представляющий собой правый A-модуль (Algébre*, chap. II,

[1]) См. также [КЭ], гл. II, § 5, предложение 5.1. — *Прим. перев.*
[2]) См. также *Алгебра*, гл. III, § 2, n° 1. — *Прим. перев.*
[3]) *Направленная* в иной терминологии. — *Прим. ред.*

3e éd., § 6, n° 6) [1]). *Если каждый E_α является плоским A_α-модулем, то плоским будет и A-модуль E.*

Действительно, пусть $E'_\alpha = E_\alpha \otimes_{A_\alpha} A$, где A рассматривается как левый A_α-модуль относительно канонического гомоморфизма $A_\alpha \to A$. Как известно, правый A-модуль E канонически изоморфен индуктивному пределу $\varinjlim E'_\alpha$ (loc. cit., corollaire 2 de la proposition 12). Из следствия 2 предложения 8 вытекает, что E'_α есть плоский правый A-модуль при любом α; поэтому E — плоский A-модуль в силу предложения 2 n° 3.

8. *Конечно представимые модули*

Пусть A — кольцо. *Представлением* (или *представлением длины* 1) левого (соответственно правого) A-модуля E называется точная последовательность

$$L_1 \to L_0 \to E \to 0 \tag{6}$$

левых (соответственно правых) A-модулей, в которой L_0 и L_1 — *свободные* модули.

Любой A-модуль E допускает представление. В самом деле, известно (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 1, n° 11, proposition 20) [2]), что существует сюръективный гомоморфизм u: $L_0 \to E$, где L_0 — свободный модуль; если R — ядро гомоморфизма u, то существует сюръективный гомоморфизм v: $L_1 \to R$, где L_1 — свободный модуль. Если рассмотреть v как гомоморфизм модуля L_1 в L_0, то последовательность $L_1 \xrightarrow{v} L_0 \xrightarrow{u} E \to 0$ точна по определению, откуда следует наше утверждение.

Если ρ: $A \to B$ — гомоморфизм колец, то каждое представление вида (6) модуля E дает представление и модуля $E_{(B)} = E \otimes_A B$:

$$L_1 \otimes_A B \to L_0 \otimes_A B \to E \otimes_A B \to 0 \tag{7}$$

(в силу леммы 1 n° 1 и того факта, что B-модуль $L \otimes_A B$ свободен, если свободен модуль L).

Говорят, что представление (6) модуля E *конечно*, если свободные модули L_1 и L_0 обладают конечными базисами. Совершенно ясно, что если представление (6) конечно, то конечным является и представление (7). Говорят, что E есть *конечно представимый A-модуль*, если он допускает конечное представление.

---

[1]) См. также [Г], гл. I, § 1.6. — *Прим. перев.*

[2]) См. также *Алгебра*, гл. II, § 1, n° 8, предложение 10. — *Прим. перев.*

Лемма 8. (i) *Всякий модуль, допускающий конечное представление, является модулем конечного типа.*

(ii) *Если кольцо A нётерево слева, то всякий левый A-модуль конечного типа допускает конечное представление.*

(iii) *Всякий проективный модуль конечного типа допускает конечное представление.*

Утверждение (i) тривиальным образом следует из определений. Если кольцо A нётерево слева и если существует сюръективный гомоморфизм $u\colon L_0 \to E$, где L_0 — свободный левый A-модуль с конечным базисом, то ядро R гомоморфизма u является модулем конечного типа (*Алгебра*, гл. VIII, § 2, n° 1, предложение 1, и n° 3, предложение 7). Следовательно, существует сюръективный гомоморфизм $v\colon L_1 \to R$, где L_1 — свободный модуль с конечным базисом, и точная последовательность $L_1 \xrightarrow{v} L_0 \xrightarrow{u} E \to 0$ является конечным представлением модуля E, откуда и следует утверждение (ii).

Наконец, предположим, что E — проективный модуль конечного типа; он является прямым слагаемым некоторого свободного модуля L_0 конечного типа (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 2, n° 2, corollaire de la proposition 4) [1]).

Ядро R сюръективного гомоморфизма $L_0 \to E$ будет в этом случае изоморфно фактормодулю модуля L_0, а потому имеет конечный тип. Завершается доказательство так же, как в предыдущем случае.

Лемма 9. *Пусть A — кольцо и E — некоторый конечно представимый A-модуль. Для всякой точной последовательности*

$$0 \to F \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} E \to 0,$$

в которой G — модуль конечного типа, модуль F имеет также конечный тип.

Пусть $L_1 \xrightarrow{r} L_0 \xrightarrow{s} E \to 0$ — какое-то конечное представление. Если (e_i) — некоторый базис модуля L_0, то для каждого i существует такой элемент $g_i \in G$, что $p(g_i) = s(e_i)$. Определим гомоморфизм $u\colon L_0 \to G$, положив $u(e_i) = g_i$ при каждом i; тогда $s = p \circ u$. Так как $s \circ r = 0$, то $u(r(L_1)) \subset \mathrm{Ker}(p)$, а поскольку $\mathrm{Ker}(p)$ изоморфен F, то, очевидно, существует такой гомоморфизм $v\colon L_1 \to F$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} L_1 & \xrightarrow{r} & L_0 & \xrightarrow{s} & E & \to & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle 1_E} & & \\ F & \xrightarrow{i} & G & \xrightarrow{p} & E & \to & 0 \end{array}$$

[1]) См. также [КЭ], гл. I, § 2. — *Прим. перев.*

коммутативна. Поскольку j — инъективный, а s — сюръективный гомоморфизмы, то можно воспользоваться змеевидной диаграммой (предложение 2 § 1, n° 4); иначе говоря, существует точная последовательность

$$0 = \mathrm{Ker}(1_E) \xrightarrow{d} \mathrm{Coker}(v) \to \mathrm{Coker}(u) \to \mathrm{Coker}(1_E) = 0.$$

Этим доказано, что $\mathrm{Coker}(v)$ изоморфен $G/u(L_0)$, а последний является модулем конечного типа по предположению. С другой стороны, имеет место точная последовательность

$$0 \to v(L_1) \to F \to \mathrm{Coker}(v) \to 0,$$

и так как $v(L_1)$ и $\mathrm{Coker}(v)$ — модули конечного типа, то таким же является и модуль F (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 1, n° 7, corollaire 5 de la proposition 9) [1]).

9. *Расширение скаляров в модулях гомоморфизмов*

Пусть A и B — два кольца, E — правый A-модуль, F — правый B-модуль и G — некоторый (B, A)-бимодуль. Напомним, что может быть определен (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 4, n° 2) канонический гомоморфизм $\mathbf{Z}$-модулей

$$\nu\colon F \otimes_B \mathrm{Hom}_A(E, G) \to \mathrm{Hom}_A(E, F \otimes_B G), \qquad (8)$$

при котором для $y \in F$ и $u \in \mathrm{Hom}_A(E, G)$ элемент $\nu(y \otimes u)$ есть A-линейное отображение $x \to y \otimes u(x)$.

Предложение 10. *Пусть A, B — два кольца, E — правый A-модуль, F — правый B-модуль, G — некоторый (B, A)-бимодуль. Предположим, что F — плоский модуль. Тогда если E есть модуль конечного типа* (соответственно *конечно представим*), *то канонический гомоморфизм* (8) *инъективен* (соответственно *биективен*).

Будем считать фиксированными A, B, F, G и для всякого A-модуля E положим

$$T(E) = F \otimes_B \mathrm{Hom}_A(E, G), \qquad T'(E) = \mathrm{Hom}_A(E, F \otimes_B G);$$

через ν_E обозначим гомоморфизм (8); для всякого гомоморфизма $\nu\colon E \to E'$ правых A-модулей положим $T(\nu) = 1_F \otimes \mathrm{Hom}(\nu, 1_G)$ и $T'(\nu) = \mathrm{Hom}(\nu, 1_F \otimes 1_G)$. Пусть $L_1 \xrightarrow{v} L_0 \xrightarrow{w} E \to 0$ — некоторое представление модуля E; предположим, что свободный модуль

[1]) См. также [Л], § 1, предложение 2, стр. 167. — *Прим. перев.*

L_0 (соответственно свободные модули L_0 и L_1) *есть модуль конечного типа*. Имеет место диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to T(E) & \xrightarrow{T(w)} & T(L_0) & \xrightarrow{T(v)} & T(L_1) \\ \downarrow{\scriptstyle \nu_E} & & \downarrow{\scriptstyle \nu_{L_0}} & & \downarrow{\scriptstyle \nu_{L_1}} \\ 0 \to T'(E) & \xrightarrow[T'(w)]{} & T'(L_0) & \xrightarrow[T'(v)]{} & T'(L_1) \end{array} \tag{9}$$

Диаграмма (9) коммутативна, причем ее вторая строка точна (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 2, n° 1, théorème 1) [1]). С другой стороны, последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(E, G) \to \mathrm{Hom}_A(L_0, G) \to \mathrm{Hom}_A(L_1, G)$$

является точной (loc. cit.) [1]), а так как модуль F *плоский*, то и первая строка в диаграмме (9) также является точной последовательностью (предложение 1 n° 3). В этой ситуации, как известно, гомоморфизм ν_{L_0} (соответственно гомоморфизмы ν_{L_0} и ν_{L_1}) *биективен* (соответственно *биективны*) (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 4, n° 2, proposition 2) [2]). Если предполагать лишь биективность гомоморфизма ν_{L_0}, то из (9) следует инъективность гомоморфизма $\nu_{L_0} \circ T(w) = T'(w) \circ \nu_E$, а потому инъективен и гомоморфизм ν_E. Если же допустить биективность гомоморфизмов ν_{L_0} и ν_{L_1}, то из следствия 2 (ii) предложения 2 § 1, n° 4, вытекает, что ν_E сюръективен. Но поскольку только что была установлена инъективность этого гомоморфизма, то он биективен, что и требовалось доказать.

10. Расширение скаляров: случай коммутативных колец

Пусть теперь A — *коммутативное* кольцо, B — некоторое кольцо, ρ: $A \to B$ — такой гомоморфизм колец, что $\rho(A)$ содержится в *центре* B; другими словами, гомоморфизм ρ определяет на B структуру *A-алгебры*. Для всякого A-модуля E правый B-модуль $E_{(B)} = E \otimes_A B$ отождествляется в этом случае с $B \otimes_A E$, так как структуры A-модулей на $\rho_*(B_s)$ и на $\rho_*(B_d)$ тождественны по предположению. Напомним, что для всякой пары A-модулей (E, F) определен *канонический B-гомоморфизм*

$$\omega\colon (\mathrm{Hom}_A(E, F))_{(B)} \to \mathrm{Hom}_B(E_{(B)}, F_{(B)}), \tag{10}$$

при котором $\omega(u \otimes 1) = u \otimes 1_B$ для $u \in \mathrm{Hom}_A(E, F)$ (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 5, n° 3).

---

[1]) См. также [КЭ], гл. II, § 4, предложения 4.3а и 4.4. — *Прим. перев.*

[2]) См. также [КЭ], гл. II, § 4. — *Прим. перев.*

Предложение 11. *Пусть A — коммутативное кольцо, B — некоторое кольцо, ρ — гомоморфизм кольца A в центр B и E, F — два A-модуля. Предположим, что B — плоский A-модуль и E — модуль конечного типа* (соответственно *конечно представимый*). *Тогда канонический гомоморфизм* (10) *инъективен* (соответственно *биективен*).

Поскольку гомоморфизм ω является композицией канонического изоморфизма

$$\mathrm{Hom}_A(E, B \otimes_A F) \to \mathrm{Hom}_B(E_{(B)}, F_{(B)})$$

и канонического гомоморфизма (8)

$$\nu\colon B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(E, F) \to \mathrm{Hom}_A(E, B \otimes_A F)$$

(loc. cit.), то данное предложение является следствием предложения 10 n° 9.

Предположим теперь, что кольца A и B коммутативны, и рассмотрим три A-модуля E_1, E_2, E_3 с A-билинейным отображением $f\colon E_1 \times E_2 \to E_3$. Тогда существует, и притом единственное, B-билинейное отображение $f_B\colon E_{1(B)} \times E_{2(B)} \to E_{3(B)}$, такое, что $f_B(1 \otimes x_1, 1 \otimes x_2) = 1 \otimes f(x_1, x_2)$, где $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ (*Алгебра*, гл. IX, § 1, n° 4, предложение 1).

В последующем изложении мы будем считать, что B является *плоским* A-модулем, и для каждого подмодуля E' в E_i $(i = 1, 2, 3)$ мы будем канонически отождествлять модуль $E'_{(B)}$ с его образом в $E_{i(B)}$ (замечание 2 n° 3).

Предложение 12. *Пусть A, B — два коммутативных кольца, ρ — гомоморфизм из A в B, E_1, E_2, E_3 — три A-модуля, $f\colon E_1 \times E_2 \to E_3$ — некоторое A-билинейное отображение и*

$$f_B\colon E_{1\,(B)} \times E_{2\,(B)} \to E_{3\,(B)}$$

— его расширение. Рассмотрим какие-нибудь подмодули $F_2 \subset E_2$ и $F_3 \subset E_3$ и обозначим через T подмодуль в E_1, образованный элементами $x_1 \in E_1$, удовлетворяющими соотношению $f(x_1, x_2) \in F_3$ для всех $x_2 \in F_2$. Предположим, что B — плоский A-модуль, а F_2 — модуль конечного типа. Тогда $T_{(B)}$ — это множество таких $x'_1 \in E_{1\,(B)}$, что $f_B(x'_1, x'_2) \in F_{3\,(B)}$ для всех $x'_2 \in F_{2\,(B)}$.

Действительно, пусть p — канонический сюръективный гомоморфизм $E_3 \to E_3/F_3$; с каждым элементом $x_1 \in E_1$ свяжем A-линейное отображение $x_2 \to p(f(x_1, x_2))$ модуля F_2 в модуль E_3/F_3, которое будем обозначать через $g(x_1)$. Следовательно, g — это A-гомоморфизм модуля E_1 в $\mathrm{Hom}_A(F_2, E_3/F_3)$, а его ядро — не

что иное, как T. Так как B — плоский A-модуль, то имеет место точная последовательность

$$0 \to T_{(B)} \to E_{1\,(B)} \xrightarrow{1 \otimes g} (\mathrm{Hom}_A(F_2, E_3/F_3))_{(B)}$$

(предложение 1 n° 3). В силу предложения 11, канонический гомоморфизм

$$\omega\colon (\mathrm{Hom}_A(F_2, E_3/F_3))_{(B)} \to \mathrm{Hom}_B(F_{2\,(B)}, (E_3/F_3)_{(B)})$$

инъективен. С другой стороны, благодаря тому что A-модуль B плоский, модуль $(E_3/F_3)_{(B)}$ канонически отождествляется с $E_{3(B)}/F_{3(B)}$. Взяв композицию ω и $1 \otimes g$, мы получим гомоморфизм u, для которого последовательность

$$0 \to T_{(B)} \to E_{1\,(B)} \xrightarrow{u} \mathrm{Hom}_B(F_{2\,(B)}, E_{3\,(B)}/F_{3\,(B)})$$

точна. Из определений сразу же следует, что $u(x_1')$, где $x_1' = 1 \otimes x_1 \in E_{1\,(B)}$ является линейным отображением, сопоставляющим каждому $x_2' \in F_{2\,(B)}$ класс элемента $f_B(x_1', x_2')$ по модулю $F_{3(B)}$; в силу линейности, это же верно и для любого $x_1' \in E_{1\,(B)}$. Поскольку ядром гомоморфизма u служит $T_{(B)}$, предложение доказано.

Следствие 1. *Пусть A, B — два коммутативных кольца, $\rho\colon A \to B$ — гомоморфизм, превращающий B в плоский A-модуль, и E — некоторый конечно представимый A-модуль. Для всякого подмодуля $F \subset E$ конечного типа ортогональное дополнение к $F_{(B)}$ в модуле, сопряженном к модулю $E_{(B)}$, равно $(F')_{(B)}$, где через F' обозначено ортогональное дополнение к F в модуле E^*, сопряженном к E.*

Из предложения 11 следует, что $(E^*)_{(B)}$ канонически изоморфно модулю $(E_{(B)})^*$, сопряженному к $E_{(B)}$. Поэтому достаточно применить предложение 12 к случаю $E_1 = E^*$, $E_2 = E$, $E_3 = A$, $F_2 = F$, $F_3 = \{0\}$, считая, что f — каноническая билинейная форма на $E^* \times E$.

Следствие 2. *Пусть A, B — два коммутативных кольца, $\rho\colon A \to B$ — гомоморфизм, превращающий B в плоский A-модуль, и E — некоторый A-модуль. Тогда для всякого подмодуля $F \subset E$ конечного типа аннулятор модуля $F_{(B)}$ равен идеалу $\mathfrak{a}B$ кольца B, где $\mathfrak{a}$ — аннулятор модуля F в кольце A.*

Достаточно применить предложение 12 при $E_1 = A$, $E_2 = E_3 = E$, $F_2 = F$, $F_3 = \{0\}$.

Замечание. Когда абсолютно ясно, о каких модулях E_i и билинейном отображении f идет речь, модуль, обозначенный в предложении 12 через T, обозначают иногда через $F_3 : F_2$ и

называют *кондуктором* модуля F_2 в модуле F_3. Вывод предложения 12 в этих обозначениях может быть записан так:

$$F_{3(B)} : F_{2(B)} = (F_3 : F_2)_{(B)}. \tag{11}$$

В частном случае, когда модули E_i совпадают с кольцом A, f является умножением, а F_i представляет собой идеалы $\mathfrak{a}_i$, получается *формула кондукторов*

$$B(\mathfrak{a}_3 : \mathfrak{a}_2) = B\mathfrak{a}_3 : B\mathfrak{a}_2, \tag{12}$$

справедливая, если B — плоский A-модуль, а $\mathfrak{a}_2$ — идеал конечного типа.

11. *Интерпретация плоскостности в терминах соотношений* [1])

В этом пункте через A обозначается кольцо, через E — правый A-модуль, а через F — левый A-модуль.

Любой элемент модуля $E \otimes_A F$ записывается, по крайней мере одним способом, в виде $z = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i$, где $e_i \in E$, $f_i \in F$. Следующая лемма дает условие для того, чтобы эта сумма была равна нулю.

Лемма 10. *Пусть* $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ *— семейство образующих модуля* F *и* $(e_\lambda)_{\lambda \in L}$ *— семейство элементов модуля* E *с конечным носителем* [2]). *Для того чтобы* $\sum_{\lambda \in L} e_\lambda \otimes f_\lambda = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали конечное множество* J, *некоторое семейство* $(x_j)_{j \in J}$ *элементов из* E *и некоторое семейство* $(a_{j\lambda})$ $(j \in J, \lambda \in L)$ *элементов из* A, *обладающие следующими свойствами*:

1° *семейство* $(a_{j\lambda})$ *имеет конечный носитель*;

2° $\sum_{\lambda \in L} a_{j\lambda} f_\lambda = 0$ *для всякого* $j \in J$;

3° $e_\lambda = \sum_{j \in J} x_j a_{j\lambda}$ *для всякого* $\lambda \in L$.

Иначе говоря, система элементов e_λ должна быть линейной комбинацией с коэффициентами в E систем элементов из A, являющихся «соотношениями между элементами f_λ».

---

[1]) Результаты этого пункта не будут использоваться в оставшейся части этой главы, за исключением § 3, n° 7.

[2]) Говорят, что семейство элементов модуля имеет *конечный носитель*, если в нем существует лишь конечное число ненулевых элементов. — *Прим. перев.*

Действительно, рассмотрим свободный A-модуль $A_s^{(L)}$, его канонический базис (u_λ) и гомоморфизм $g\colon A_s^{(L)} \to F$, при котором $g(u_\lambda) = f_\lambda$ для всякого $\lambda \in L$. Обозначая через R ядро гомоморфизма g (и учитывая, что f_λ порождают F), получаем точную последовательность

$$R \xrightarrow{i} A_s^{(L)} \xrightarrow{g} F \to 0,$$

где i — каноническое вложение. В силу леммы 1 n° 1, отсюда получается точная последовательность

$$E \otimes_A R \xrightarrow{1\otimes i} E \otimes_A A_s^{(L)} \xrightarrow{1\otimes g} E \otimes_A F \to 0. \qquad (13)$$

Но модуль $E \otimes_A A_s^{(L)}$ канонически отождествляется с $E^{(L)}$ и при этом семейство $e = (e_\lambda) \in E^{(L)}$ переходит в $\sum_\lambda e_\lambda \otimes u_\lambda$ (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 3, n° 7, corollaire 1 de la proposition 7) [1]). Для того чтобы такое семейство принадлежало ядру гомоморфизма $1_E \otimes g$, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{\lambda\in L} e_\lambda \otimes f_\lambda = 0$ в модуле $E \otimes_A F$. Как видно из точной последовательности (13), это эквивалентно тому, что e принадлежит образу гомоморфизма $1_E \otimes i$, т. е. выполнению соотношения вида

$$\sum_{\lambda\in L} e_\lambda \otimes u_\lambda = \sum_{j\in J} x_j \otimes i(r_j), \qquad (14)$$

где $x_j \in E$, $r_j \in R$ и J — конечное множество. Если положить $i(r_j) = \sum_{\lambda\in L} a_{j\lambda} u_\lambda$, то для всякого $j \in J$ условие $r_j \in R$ превратится в соотношение $\sum_{\lambda\in L} a_{j\lambda} f_\lambda = 0$. С другой стороны, равенство (14) перейдет в соотношение $e_\lambda = \sum_{j\in J} x_j a_{j\lambda}$ при любом $\lambda \in L$ (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 3, n° 7, corollaire 1 de la proposition 7) [1]), что и завершает доказательство.

Предложение 13. *Для того чтобы модуль E был плоским относительно F* (определение 1 n° 2), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие*:

(R) *Если* $(e_i)_{i\in I}$ *и* $(f_i)_{i\in I}$ *— два конечных семейства элементов из E и F соответственно, для которых* $\sum_{i\in I} e_i \otimes f_i = 0$ *в* $E \otimes_A F$, *то существуют конечное множество J, семейство*

[1]) См. также *Алгебра*, приложение II к гл. III, n° 6, следствие из предложения 5. — *Прим. перев.*

$(x_j)_{j\in J}$ *элементов из* E *и семейство* (a_{ji}) $(j\in J, i\in I)$ *элементов из* A, *обладающие такими свойствами*:

1° $\sum_{i\in I} a_{ji}f_i = 0$ *при всяком* $j\in J$;

2° $e_i = \sum_{j\in J} x_j a_{ji}$ *при всяком* $i\in I$.

Предположим, что модуль E является плоским относительно F. Пусть (e_i) и (f_i) — такие конечные семейства элементов, что $\sum_i e_i\otimes f_i = 0$ в модуле $E\otimes_A F$, и пусть F' — подмодуль модуля F, *порожденный элементами* f_i. Так как каноническое отображение $E\otimes_A F'\to E\otimes_A F$ инъективно, то соотношение $\sum_i e_i\otimes f_i = 0$ выполняется также *в модуле* $E\otimes_A F'$, так что можно применить лемму 10 к модулям E и F'. При этом получатся семейства (x_j) и (a_{ji}), удовлетворяющие условию (R).

Обратно, предположим, что условие (R) выполнено. Пусть F' — подмодуль модуля F, и пусть $y = \sum_{i\in I} e_i\otimes f_i$ — какой-то элемент из ядра канонического отображения $E\otimes_A F'\to E\otimes_A F$. Поскольку имеет место (R), существуют семейства (x_j) и (a_{ji}), удовлетворяющие условиям 1° и 2°. Отсюда следует, что в модуле $E\otimes_A F'$

$$y = \sum_{i,j} x_j a_{ji}\otimes f_i = \sum_{j\in J}\Big(x_j\otimes \sum_{i\in I} a_{ji}f_i\Big) = 0.$$

Таким образом, гомоморфизм $E\otimes_A F'\to E\otimes_A F$ инъективен, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Для того чтобы правый* A*-модуль* E *был плоским, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие*:

(RP) *Если* $(e_i)_{i\in I}$ *и* $(b_i)_{i\in I}$ *— два таких конечных семейства элементов из* E *и* A *соответственно, что* $\sum_{i\in I} e_i b_i = 0$, *то существуют конечное множество* J, *семейство элементов* $(x_j)_{j\in J}$ *модуля* E *и семейство* (a_{ji}) $(j\in J, i\in I)$ *элементов из* A, *для которых* $\sum_{i\in I} a_{ji}b_i = 0$ *при любом* $j\in J$ *и* $e_i = \sum_{j\in J} x_j a_{ji}$ *при любом* $i\in I$.

Действительно, условие (RP) представляет собой не что иное, как условие (R) предложения 13 применительно к модулю $F = A_S$.

Иными словами, условие (RP) может быть выражено так: всякое «соотношение» между элементами b_i с коэффициентами в E является

линейной комбинацией (с коэффициентами в E) «соотношений» между элементами b_i с коэффициентами в A.

Рассмотрим, в частности, гомоморфизм кольца A в кольцо B, превращающий B в правый A-модуль. Мы знаем (предложение 1 n° 3), что утверждение о том, что этот A-модуль плоский, эквивалентно утверждению, что он является плоским относительно всякого левого A-модуля A_s^m $(m \geqslant 1)$. Если применить условие (R) из предложения 13 к $E = B$, $F = A_s^m$, то получится следующее условие:

Следствие 2. *Для того чтобы кольцо B было плоским правым A-модулем, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось такое условие:*

(RP′) *Любое решение $(y_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ системы однородных линейных уравнений*

$$\sum_{k=1}^{n} y_k c_{ki} = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant m) \tag{15}$$

с коэффициентами в A, состоящее из элементов кольца B, является линейной комбинацией

$$y_k = \sum_{j=1}^{q} b_j z_{jk} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n) \tag{16}$$

с коэффициентами $b_j \in B$ решений $(z_{jk})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ системы (15), образованных элементами $z_{jk} \in A$.

Упражнения

1) Привести пример такой точной последовательности левых A-модулей $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ и такого правого A-модуля E, что относительно модулей N' и N'' модуль E будет плоским, а относительно модуля N — нет (взять, например, $N' = N'' = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$).

2) Пусть M, N — такие два подмодуля A-модуля E, что модуль $M + N$ плоский. Для того чтобы плоскими были M и N, необходимо и достаточно, чтобы был плоским модуль $M \cap N$.

3) Пусть A — кольцо многочленов $K[X, Y]$ от двух переменных над полем K.

а) Рассмотрим в кольце A главные идеалы $\mathfrak{b} = (X)$ и $\mathfrak{c} = (Y)$, являющиеся свободными модулями, и их пересечение $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} = (XY)$, также являющееся свободным модулем. Показать, что A-модуль $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ не плоский, хоть он и без кручения (ср. *Алгебра*, гл. III, § 2, упражнение 4).

б) Пусть R — подмодуль A-модуля A^2, образованный элементами вида $(x, -x)$, где $x \in \mathfrak{a}$. Пусть M, N — подмодули A-модуля A^2/R, являющиеся образами прямых слагаемых модуля A^2. Показать, что модули M и N изоморфны A, но пересечение $M \cap N$ не является плоским A-модулем.

4) а) Привести пример *нерасщепляемой* точной последовательности

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0,$$

все члены которой являются плоскими модулями (ср. *Алгебра*, гл. VIII, § 3, упражнение 8б).

б) Получить из а) пример такой *нерасщепляемой* точной последовательности

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0,$$

члены которой являются *неплоскими* правыми A-модулями, что для всякого левого A-модуля F последовательность $0 \to E' \otimes F \to E \otimes F \to E'' \otimes F \to 0$ точна (использовать лемму 2 п° 1).

5) Привести пример правого A-модуля E, левого A-модуля F и двух таких подмодулей F', F'' модуля F, что канонический образ модуля $E \otimes (F' \cap F'')$ в модуле $E \otimes F$ не равен пересечению канонических образов модулей $E \otimes F'$ и $E \otimes F''$ (ср. упражнение 3а)).

¶ 6) Пусть A — кольцо и M — левый A-модуль. *Представлением длины* n, или *n-представлением*, модуля M называют точную последовательность

$$L_n \to L_{n-1} \to \ldots \to L_1 \to L_0 \to M \to 0,$$

в которой L_i — свободные левые A-модули ($0 \leqslant i \leqslant n$). Говорят, что такое представление *конечно*, если каждый из модулей L_i является свободным модулем конечного типа.

Если M — левый A-модуль конечного типа, то через $\lambda(M)$ будем обозначать верхнюю грань (конечную или равную $+\infty$) таких целых чисел $n \geqslant 0$, что модуль M обладает конечным n-представлением. Если M не является модулем конечного типа, то будем считать, что $\lambda(M) = -1$.

а) Пусть $0 \to P \to N \to M \to 0$ — точная последовательность левых A-модулей. Тогда $\lambda(N) \geqslant \inf(\lambda(P), \lambda(M))$. (Отправляясь от n-представлений модулей P и M, получить n-представление модуля N с помощью упражнения 5 § 1.)

б) Пусть $M_n \xrightarrow{u_n} M_{n-1} \to \ldots \to M_0 \xrightarrow{u_0} M \to 0$ — некоторое конечное n-представление модуля M. Показать, что если $\lambda(M) > n$, то $\mathrm{Ker}(u_n)$ является A-модулем конечного типа. (Пусть $L_{n+1} \xrightarrow{v_{n+1}} L_n \to \ldots \to L_2 \xrightarrow{v_2} L_1 \xrightarrow{v_1'} L_0 \xrightarrow{v_0} M \to 0$ — какое-то $(n+1)$-представление модуля M, и пусть $P = \mathrm{Ker}(v_0)$; тогда получаем n-представление модуля P

$$L_{n+1} \xrightarrow{v_{n+1}} L_n \to \ldots \to L_2 \xrightarrow{v_2} L_1 \xrightarrow{v_1} P \to 0.$$

Применяя метод пункта а) к точной последовательности $0 \to P \to L_0 \to M \to 0$, мы получаем точную последовательность

$$M_n \oplus L_{n+1} \xrightarrow{w_n} M_{n-1} \oplus L_n \xrightarrow{w_{n-1}} \ldots \xrightarrow{w_1} M_0 \oplus L_1 \xrightarrow{w_0} L_0 \to 0,$$

а также точные последовательности $0 \to \mathrm{Ker}(v_{i+1}) \to \mathrm{Ker}(w_i) \to \mathrm{Ker}(u_i) \to 0$ (предложение 2 § 1, п° 4). Наконец, надо обратить внимание на то, что модуль $\mathrm{Ker}(w_i)$ является прямым слагаемым модуля $M_i \oplus L_{i+1}$.)

в) Показать, что в предположениях пункта а) имеет место неравенство

$$\lambda(M) \geqslant \inf(\lambda(N), \lambda(P) + 1).$$

(Рассуждая так же, как в а), и используя б), с помощью индукции по n показать, что если $n \leqslant \inf(\lambda(N), \lambda(P) + 1)$, то $\lambda(M) \geqslant n$.)

г) Показать, что в предположениях пункта а) имеет место неравенство

$$\lambda(P) \geqslant \inf(\lambda(N), \lambda(M) - 1).$$

(Способ тот же, что и в пункте в).) Вывести отсюда, что если $\lambda(N) = +\infty$, то $\lambda(M) = \lambda(P) + 1$.

д) Вывести из а), в) и г), что если $N = M \oplus P$, то

$$\lambda(N) = \inf(\lambda(M), \lambda(P)).$$

В частности, для того чтобы модуль N допускал конечное представление, необходимо и достаточно, чтобы этим свойством обладали модули M и P.

е) Пусть N_1, N_2 — два подмодуля некоторого A-модуля M. Предположим, что N_1 и N_2 допускают конечное представление. Для того чтобы модуль $N_1 + N_2$ допускал конечное представление, необходимо и достаточно, чтобы пересечение $N_1 \cap N_2$ было модулем конечного типа.

7) а) Показать, используя обозначения упражнения 6, что если M — проективный модуль, то или $\lambda(M) = -1$, или $\lambda(M) = +\infty$. Если кольцо A нётерово слева, то для всякого A-модуля M либо $\lambda(M) = -1$, либо $\lambda(M) = +\infty$.

б) Если $\mathfrak{a}$ — левый идеал кольца A, не являющийся модулем конечного типа, то A-модуль $A_s/\mathfrak{a}$ моногенен [1]) и не допускает конечного представления; иначе говоря, $\lambda(A_s/\mathfrak{a}) = 0$ (п° 8, лемма 9).

в) Привести пример такого левого моногенного идеала $\mathfrak{a}$ [2]) кольца A, что модуль, сопряженный к конечно представимому модулю $A_s/\mathfrak{a}$, не является правым A-модулем конечного типа.

г) Пусть K — поле, E — векторное пространство $K^{(\mathbf{N})}$, (e_n) — канонический базис пространства E, T — тензорная алгебра пространства E, базис которой состоит, следовательно, из конечных произведений $e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_k}$ ($k \geqslant 0$, $i_j \in \mathbf{N}$ для всякого j). Для любого заданного целого числа n пусть $\mathfrak{b}$ обозначает двусторонний идеал алгебры T, порожденный произведениями $e_1 e_0$, $e_2 e_1$, ..., $e_n e_{n-1}$ и $e_{n+k} e_n$ для всех $k \geqslant 1$; пусть A — факторкольцо $T/\mathfrak{b}$, и для всякого целого m пусть a_m — канонический образ элемента e_m в кольце A. Показать, что если $M = A_s/Aa_0$, то $\lambda(M) = n$ (обратить внимание на то, что при $m \leqslant n - 1$ левый аннулятор элемента a_m равен Aa_{m+1}, и воспользоваться упражнением 6б)).

8) Пусть C — коммутативное кольцо и E, F — два C-модуля. Показать, что имеет место неравенство $\lambda(E \otimes_C F) \geqslant \inf(\lambda(E), \lambda(F))$.

9) Пусть E — конечно представимый левый A-модуль.

а) Показать, что для любого семейства $(F_\iota)_{\iota \in I}$ правых A-модулей канонический гомоморфизм $E \otimes_A \left(\prod_{\iota \in I} F_\iota\right) \longrightarrow \prod_{\iota \in I} (E \otimes_A F_\iota)$ (*Algèbre*, chap. II, 3e éd., § 3, п° 7) [3]) биективен.

б) Пусть $(G_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ — индуктивная система левых A-модулей. Показать, что канонический гомоморфизм

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_A(E, G_\alpha) \to \mathrm{Hom}_A(E, \varinjlim G_\alpha)$$

биективен.

10) а) Пусть A — кольцо, I — некоторое множество, R — подмодуль модуля $L = A_d^{(I)}$. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество пар (J, S), где J — конечная часть множества I, а S — подмодуль конечного типа в $A_d^J \cap R$. Упорядочим $\mathfrak{S}$ с помощью отношения «$J \subset J'$ и $S \subset S'$». Показать, что множество $\mathfrak{S}$ с указанным отношением порядка становится фильтрующимся, что семейство $\left(A_d^J / S\right)$ является индуктивной системой правых A-модулей, для которой $\mathfrak{S}$

---

[1]) Циклический модуль в другой терминологии. — *Прим. ред.*

[2]) Главный идеал в другой терминологии. — *Прим. ред.*

[3]) См. также *Алгебра*, приложение II к гл. III, п° 6, предложение 5. — *Прим. перев.*

служит множеством индексов, и что существует изоморфизм модуля L/R на модуль $\varinjlim_{(I,\,S)\in\mathfrak{S}} (A_d^I/S)$.

б) Вывести из пункта а), что любой A-модуль является индуктивным пределом конечно представимых A-модулей.

11) Пусть E — правый A-модуль. Говорят, что модуль E *псевдокогерентен*, если всякий подмодуль конечного типа в E конечно представим. Всякий подмодуль псевдокогерентного модуля псевдокогерентен. Модуль E называется *когерентным*, если он псевдокогерентен и имеет конечный тип (следовательно, конечно представим).

а) Пусть $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ — точная последовательность правых A-модулей. Показать, что если модуль E псевдокогерентен (соответственно когерентен), а E' является модулем конечного типа, то модуль E'' псевдокогерентен (соответственно когерентен). Показать, что если псевдокогерентны (соответственно когерентны) и E', и E'', то таким же будет и модуль E. Показать, что если модули E и E'' когерентны, то когерентен и модуль E' (воспользоваться упражнением 6 и леммой 9 n° 8).

б) Допустим, что E — когерентный A-модуль и что E' — псевдокогерентный (соответственно когерентный) A-модуль. Показать, что для всякого гомоморфизма $u\colon E \to E'$ модули $\mathrm{Im}(u)$ и $\mathrm{Ker}(u)$ когерентны, а модуль $\mathrm{Coker}(u)$ псевдокогерентен (соответственно когерентен) (воспользоваться пунктом а)).

в) Показать, что любая прямая сумма (соответственно любая конечная прямая сумма) псевдокогерентных (соответственно когерентных) модулей есть псевдокогерентный (соответственно когерентный) модуль.

г) Показать, что если E — псевдокогерентный модуль и M, N — его когереитные подмодули, то $M + N$ и $M \cap N$ — когерентные модули (воспользоваться пунктами а) и в)).

д) Предположнм, что кольцо A коммутативно. Показать, что если E — когерентный A-модуль и F — когерентный (соответственно псевдокогерентный) A-модуль, то A-модуль $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ когерентен (соответственно псевдокогерентен). (Свести доказательство к случаю, когда модуль F когерентен, и рассмотреть конечное представление модуля E, а затем воспользоваться пунктом б).)

¶ 12) а) Пусть A — кольцо. Показать, что следующие четыре свойства эквивалентны:

α) правый A-модуль A_d когерентен (упражнение 11);

β) всякий конечно представимый правый A-модуль когерентен;

γ) левый A-модуль A_s^I является плоским для произвольного множества I [1]);

δ) всякое произведение плоских левых A-модулей является плоским модулем.

(Для того чтобы показать, что из α) следует β), надо воспользоваться упражнением 11а). Для вывода α) из γ) надо рассуждать от противного, используя предложение 13 n° 11. Чтобы показать, что α) влечет δ), надо применить упражнение 9.)

Кольцо A, удовлетворяющее условиям α) — δ), называется *когерентным справа*. Аналогичным образом вводится понятие кольца, *когерентного слева*.

б) Показать, что всякое нётерово справа кольцо *когерентно справа*. Привести пример артинова справа кольца, не являющегося когерентным слева (*Алгебра*, гл. VIII, § 2, упражнение 4).

---

[1]) В оригинале вместо I стоит $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел; однако в такой форме это свойство не эквивалентно остальным (см. Lenzing H., Über kohärente Ringe, *Math. Z.*, 114 (1970), № 3, 201—212, или Soublin J.-P., Anneaux et modules coherent, *J. Algebra*, 15 (1970), № 4, 455—472). — *Прим. ред.*

*в) [1]) Кольцо недискретного нормирования ранга 1 (гл. VI) является когерентным. Однако оно содержит некогерентные идеалы и допускает непсевдокогерентные фактормодули (моногенные). *

г) Доказать, что если кольцо A когерентно справа, то для всякого правого A-модуля E имеет место одно из равенств: или $\lambda(E) = -1$, или $\lambda(E) = 0$, или $\lambda(E) = +\infty$ (упражнение 6).

д) Пусть $(A_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ — индуктивная система колец с фильтрующимся множеством индексов и $A = \varinjlim A_\alpha$. Предположим, что при $\alpha \leqslant \beta$ кольцо A_β является плоским левым A_α-модулем. Показать, что если кольца A_α когерентны справа, то когерентно справа и кольцо A. (Обратить внимание на то, что кольцо A является плоским A_α-модулем при каждом α, и на то, что если E — подмодуль конечного типа модуля A_d, то существует такой индекс α и такой подмодуль E_α конечного типа модуля $(A_\alpha)_d$, что модуль $E_\alpha \otimes_{A_\alpha} A$ изоморфен модулю E.)

е) Вывести из пункта д), что любое кольцо многочленов (от произвольного конечного или бесконечного множества переменных) над коммутативным нётеровым кольцом когерентно. Вывести отсюда, что факторкольцо когерентного кольца не обязательно является когерентным.

ж) Для того чтобы кольцо A было когерентным слева, необходимо и достаточно, чтобы левый аннулятор любого элемента из A имел конечный тип и пересечение двух левых идеалов конечного типа в кольце A было идеалом конечного типа (воспользоваться упражнением 6е)).

¶ 13) Пусть A, B — два кольца, F — (A, B)-бимодуль, G — правый B-модуль. Показать, что если модуль G инъективен (*Algèbre*, chap. II, 3e éd., § 2, exercice 11) [2]) и F является плоским левым A-модулем, то правый A-модуль $\mathrm{Hom}_B(F, G)$ инъективен. (Воспользоваться изоморфизмом

$$\mathrm{Hom}_A(E, \mathrm{Hom}_B(F, G)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(E \otimes_A F, G),$$

справедливым для любого правого A-модуля E (*Algèbre*, chap. II, 3e éd., § 4, n° 1) [3]).

¶ 14) Пусть A, B — два кольца, E — левый A-модуль, F — (A, B)-бимодуль, G — правый B-модуль. Рассмотрим канонический гомоморфизм (*Algèbre*, chap. II, 3e éd., § 4, exercice 5)

$$\sigma\colon \mathrm{Hom}_B(F, G) \otimes_A E \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(E, F), G),$$

для которого $(\sigma(u \otimes x))(v) = u(v(x))$ при $x \in E$, $u \in \mathrm{Hom}_B(F, G)$, $v \in \mathrm{Hom}_A(E, F)$. Показать, что если G — инъективный B-модуль (*Algèbre*, chap. II, 3e éd., § 2, exercice 11) [4]) и E — конечно представимый модуль, то гомоморфизм σ биективен. (Рассмотреть сначала случай, когда E — свободный модуль конечного типа.)

¶ 15) Пусть A — кольцо. Показать, что всякий левый A-модуль E, являющийся плоским и конечно представимым, проективен. (Если задан сюръективный гомоморфизм левых A-модулей $u\colon F \to F''$, то обозначим через u' гомоморфизм $\mathrm{Hom}(1_E, u)\colon \mathrm{Hom}_A(E, F) \to \mathrm{Hom}_A(E, F'')$, а через $\bar{u}$ — гомоморфизм $\mathrm{Hom}(u', 1_G)\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathrm{Hom}_A(E, F''), G) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathrm{Hom}_A(E, F), G)$, где G — произвольный делимый $\mathbf{Z}$-модуль. Используя сначала упражнение 14, доказать, что гомоморфизм $\bar{u}$ инъективен; затем, подбирая подходящим образом модуль G (*Algèbre*, chap. II, 3e éd., § 2, exercice 14) [5]), показать, что u' — сюръективный гомоморфизм.)

---

[1]) См. также [Г], гл. I, § 1.4. — *Прим. перев.*
[2]) См. также [Г], гл. I, § 1.4. — *Прим. перев.*
[3]) См. также [КЭ], гл. II, § 5. — *Прим. перев.*
[4]) См. также [Г], гл. I, § 1.4. — *Прим. перев.*
[5]) См. также [Г], гл. I, § 1.5. — *Прим. перев.*

16) Пусть A — кольцо и a — некоторый его элемент. Показать, что следующие свойства эквивалентны:

α) $a \in aAa$;

β) идеал aA является прямым слагаемым модуля A_A;

γ) A_A/aA является плоским правым A-модулем;

δ) для любого левого идеала $\mathfrak{b}$ кольца A имеет место равенство $aA \cap \mathfrak{b} = a\mathfrak{b}$.

(Для доказательства эквивалентности γ) и δ) воспользоваться следствием из предложения 7 п° 6; показать непосредственно, что из δ) вытекает α), и установить, что α) влечет за собой β), доказав существование такого идемпотента $e \in aA$, что $eA = aA$.)

17) Пусть A — кольцо. Доказать эквивалентность следующих свойств этого кольца:

α) Всякий элемент $a \in A$ обладает эквивалентными свойствами из упражнения 16.

β) Всякий правый идеал конечного типа кольца A является прямым слагаемым модуля A_A.

γ) Всякий левый A-модуль является плоским.

δ) Всякий правый A-модуль является плоским.

В этом случае кольцо A называется *абсолютно плоским* [1]).

(Чтобы увидеть, что из α) следует β), надо воспользоваться упражнением 15б) из *Алгебры*, гл. VIII, § 6.)

¶ 18) Пусть A — абсолютно плоское кольцо (упражнение 17).

а) Пусть P — проективный правый A-модуль. Показать, что всякий подмодуль конечного типа E модуля P является прямым слагаемым P. (Свести к случаю, когда P — свободный модуль конечного типа. После этого заметить, что модуль P/E конечно представим, и воспользоваться упражнением 15.)

б) Показать, что любой проективный правый A-модуль P является прямой суммой моногенных подмодулей, изоморфных моногенным правым идеалам кольца A. (Воспользоваться теоремой Капланского (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 2, exercice 3) [2]) для сведения доказательства к случаю, когда модуль P порожден счетным семейством элементов, а потом применить пункт а).)

в) Привести пример абсолютно плоского кольца A и непроективного A-модуля конечного типа (рассмотреть фактормодуль кольца A по идеалу, не являющемуся идеалом конечного типа; ср. *Алгебра*, гл. VIII, § 6, упражнение 15е), и *Коммутативная алгебра*, гл. II, § 4, упражнение 17).

19) Пусть A — кольцо. Доказать эквивалентность следующих свойств кольца A:

α) кольцо A полупросто;

β) всякий правый идеал кольца A является инъективным A-модулем;

γ) всякий правый A-модуль проективен;

δ) всякий правый A-модуль инъективен.

20) Пусть A — целостное кольцо, B — некоторая A-алгебра, являющаяся плоским A-модулем, и M — некоторый A-модуль без кручения. Показать, что если элемент $t \in B$ не является делителем нуля, то из соотношения $t \cdot z = 0$ для $z \in B \otimes_A M$ следует равенство $z = 0$. (Свести доказательство к случаю, когда M — модуль конечного типа, и, погружая его в некоторый свободный A-модуль конечного типа, перейти к случаю $M = A$.)

21) Пусть S — коммутативное кольцо, R — коммутативная S-алгебра, B — любая S-алгебра (коммутативная или нет), $B_{(R)}$ — алгебра над кольцом R,

---

[1]) Мы заменили термин «регулярное кольцо», употребляемый в *Алгебре*, гл. VIII, § 6, упражнение 15 (и обычно употребляемый в отечественной литературе. — *Ред.*), ибо этот термин обозначает также совсем другое понятие в коммутативной алгебре.

[2]) См., например, Каплански й И., Проективные модули, сб. *Математика*, 4 : 1 (1960), стр. 3—8. — *Прим. перев.*

полученная расширением скаляров алгебры B. Предположим, что R — плоский S-модуль, а B — модуль конечного типа над кольцом S. Обозначим через Z центр кольца B. Показать, что канонический гомоморфизм из $Z_{(R)} = Z \otimes_S R$ в модуль $B_{(R)}$ является изоморфизмом модуля $Z_{(R)}$ на центр кольца $B_{(R)}$. (Воспользоваться точной последовательностью

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow B \xrightarrow{\theta} \mathrm{Hom}_S(B, B),$$

где $\theta(x)(y) = xy - yx$, и предложением 11 n° 10.)

¶ 22) Пусть E — левый A-модуль. Для любого правого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A и произвольного элемента $a \in A$ обозначим через $\mathfrak{a} : a$ множество таких $x \in A$, что $ax \in \mathfrak{a}$, и через $\mathfrak{a}E : a$ множество таких $y \in E$, что $ay \in \mathfrak{a}E$. Очевидно, что $(\mathfrak{a} : a)E \subset \mathfrak{a}E : a$. Показать, что, для того чтобы модуль E был плоским, необходимо и достаточно, чтобы для любого правого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A и произвольного элемента $a \in A$ выполнялось равенство $(\mathfrak{a} : a)E = \mathfrak{a}E : a$. (Чтобы установить достаточность этого условия, надо воспользоваться критерием следствия 1 из предложения 13 n° 11: исходя из соотношения $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, где $a_i \in A$, $x_i \in E$, применить равенство $(\mathfrak{a} : a)E = \mathfrak{a}E : a$ к идеалу $\mathfrak{a}_2 = \sum_{i=2}^{n} a_i A$ и элементу a_1 и затем рассуждать с помощью индукции по n. Необходимость доказывается обращением этого рассуждения.)

23) а) Пусть $0 \to R \to L \to E \to 0$ — точная последовательность левых A-модулей, где A-модуль L свободен; обозначим через (e_α) базис модуля L. Показать, что следующие утверждения эквивалентны:

α) модуль E — плоский;

β) если для любого $x \in R$ обозначить через $\mathfrak{a}_x$ правый идеал, порожденный координатами элемента x в базисе (e_α), то $x \in \mathfrak{a}_x R$;

γ) для любого элемента $x \in R$ существует такой гомоморфизм $u_x : L \to R$, что $u_x(x) = x$;

δ) для любой конечной последовательности $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ элементов модуля R существует такой гомоморфизм $u : L \to R$, что $u(x_i) = x_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. (Воспользоваться следствием из предложения 7 n° 6.)

б) Пусть $\mathfrak{a}$ — такой левый идеал кольца A, что A-модуль $A/\mathfrak{a}$ является плоским. Показать, что для всякого левого идеала конечного типа $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ существует такой элемент $x \in A$, что $\mathfrak{b} \subset Ax \subset \mathfrak{a}$ (воспользоваться критерием δ) из пункта а)).

в) Вывести из пункта а) новое доказательство результата упражнения 15.

г) Пусть $\mathfrak{r}$ — радикал кольца A, и $0 \to R \to L \to E \to 0$ — точная последовательность левых A-модулей, в которой L — свободный модуль. Предположим, что модуль E — плоский, а модуль R содержится в $\mathfrak{r}L$. Показать, что в этом случае $R = 0$ (используя обозначения пункта а), обратить внимание на то, что $\mathfrak{a}_x$ — идеал конечного типа, и на равенство $\mathfrak{a}_x = \mathfrak{a}_x \cdot \mathfrak{r}$).

д) Пусть E — плоский левый A-модуль конечного типа. Предположим, что существует такой двусторонний идеал $\mathfrak{b}$ кольца A, содержащийся в радикале этого кольца, что $E/\mathfrak{b}E$ — свободный $(A/\mathfrak{b})$-модуль. Показать, что тогда A-модуль E свободен (обратить внимание на то, что существует такой свободный A-модуль L конечного типа, что модуль $L/\mathfrak{b}L$ изоморфен модулю $E/\mathfrak{b}E$, и воспользоваться следствием 4 из предложения 6 в *Алгебре*, гл. VIII, § 6, n° 3; после этого применить пункт г)).

24) Подмодуль M' правого A-модуля M называется *чистым*, если инъективен гомоморфизм $j \otimes 1_N : M' \otimes_A N \to M \otimes_A N$, где $j : M' \to M$ — каноническое вложение и N — произвольный левый A-модуль. Это свойство имеет место, когда модуль M' служит прямым слагаемым модуля M или когда M/M' — плоский модуль. Однако оба эти условия не являются необходимыми (упражнение 4).

а) Показать, что, для того чтобы подмодуль M' модуля M был чистым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: если $(m'_i)_{i\in I}$ — некоторое конечное семейство элементов из M' и $(x_j)_{j\in J}$ — некоторое семейство элементов из M, причем $m'_i = \sum_{j\in J} x_j a_{ji}$ для каждого $i\in I$ и некоторого семейства (a_{ji}) элементов из A, то существует семейство таких элементов $(x'_j)_{j\in J}$ модуля M', что $m'_i = \sum_{j\in J} x'_j a_{ji}$ для каждого $i\in I$. (Для доказательства достаточности этого условия надо воспользоваться леммой 10 n° 11, с помощью которой показывается, что гомоморфизм $M'\otimes_A N \to M\otimes_A N$ инъективен при любом A-модуле N конечного типа. Для доказательства необходимости этого условия надо рассмотреть некоторый левый A-модуль конечного типа $N = L/R$, где L — свободный A-модуль конечного типа и R — подмодуль конечного типа в L.) Установить с помощью этого критерия, что если A — коммутативное кольцо *главных идеалов*, то понятие чистого подмодуля некоторого A-модуля совпадает с аналогичным понятием, введенным в *Алгебре*, гл. VII, § 2, упражнение 7.

б) Пусть M — правый A-модуль, M' — подмодуль модуля M и M'' — подмодуль модуля M'. Показать, что если M' — чистый подмодуль в M и M'' — чистый подмодуль в M', то M'' — чистый подмодуль модуля M, а M'/M'' — чистый подмодуль модуля M/M''. Если M'' — чистый подмодуль модуля M, то M'' — чистый подмодуль модуля M'.

в) Показать, что если N и P — такие два подмодуля в M, что $N\cap P$ и $N+P$ чист в M, то N и P — чистые подмодули в M. Дать пример двух подмодулей N, P в $\mathbf{Z}^2$, которые сами являются чистыми в $\mathbf{Z}^2$, но для которых $N+P$ не является чистым подмодулем в $\mathbf{Z}^2$.

г) Пусть C — коммутативное кольцо и E, F — два C-модуля. Показать, что если E' (соответственно F') — чистый подмодуль модуля E (соответственно F), то каноническое отображение $E'\otimes_C F' \to E\otimes_C F$ инъективно и переводит модуль $E'\otimes_C F'$ в некоторый чистый подмодуль модуля $E\otimes_C F$.

д) Пусть $\rho\colon A\to B$ — гомоморфизм колец, M — правый A-модуль и M' — чистый подмодуль модуля M. Показать, что модуль $M'_B = M'\otimes_A B$ каноническим образом отождествляется с некоторым подмодулем модуля $M_{(B)} = M\otimes_A B$.

§ 3. Строго плоские модули

1. Определение строго плоских модулей

Предложение 1. *Пусть E — правый A-модуль. Следующие четыре свойства эквивалентны:*

а) *для того чтобы последовательность левых A-модулей $N' \xrightarrow{v} N \xrightarrow{w} N''$ была точной, необходимо и достаточно, чтобы была точной последовательность*

$$E\otimes_A N' \xrightarrow{1\otimes v} E\otimes_A N \xrightarrow{1\otimes w} E\otimes_A N'';$$

б) *модуль E является плоским, и для любого левого A-модуля N из соотношения $E\otimes_A N = 0$ следует, что $N = 0$;*

в) *модуль E является плоским, и при любом гомоморфизме $v\colon N'\to N$ левых A-модулей из соотношения $1_E\otimes v = 0$ следует, что $v = 0$;*

г) *модуль E является плоским, и для любого левого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A имеет место соотношение $E \neq E\mathfrak{m}$.*

Ради упрощения записи положим $T(Q) = E \otimes_A Q$ для всякого левого A-модуля Q и $T(v) = 1_E \otimes v$ для всякого гомоморфизма левых A-модулей.

Сначала мы обратимся к доказательству эквивалентности свойств а), б) и в).

Покажем, что из а) следует б). Если выполняется а), то ясно, что E — плоский модуль (§ 2, n° 3, предложение 1). С другой стороны, пусть N — такой левый A-модуль, что $T(N) = 0$, и рассмотрим последовательность $0 \to N \to 0$. Предположение о том, что $T(N) = 0$, означает, что точна последовательность $0 \to T(N) \to 0$. Из а) получается точность последовательности $0 \to N \to 0$, откуда $N = 0$.

Покажем, что из б) следует в). Предположим, что условие б) выполнено, и пусть $v\colon N' \to N$ — некоторый гомоморфизм, а I — его образ. Поскольку образ гомоморфизма $T(v)$ отождествляется с $T(I)$ (§ 2, n° 3, замечание 2), из предположения $T(v) = 0$ вытекает равенство $T(I) = 0$. Следовательно, в силу утверждения б), $I = 0$, откуда $v = 0$.

Установим, что из в) следует а). Предположив, что в) выполнено, рассмотрим последовательность гомоморфизмов левых A-модулей

$$N' \xrightarrow{v} N \xrightarrow{w} N'' \tag{1}$$

и соответствующую последовательность

$$T(N') \xrightarrow{T(v)} T(N) \xrightarrow{T(w)} T(N''). \tag{2}$$

Если последовательность (1) точна, то точна и последовательность (2), так как модуль E плоский (§ 2, n° 3, предложение 1). Обратно, если (2) — точная последовательность, то прежде всего $T(w \circ v) = T(w) \circ T(v) = 0$; следовательно, по условию $w \circ v = 0$. Положим $I = v(N')$ и $K = w^{-1}(0)$; согласно предыдущему, $I \subset K$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} K \xrightarrow{p} K/I \longrightarrow 0,$$

в которой i и p — канонические отображения. Так как E — плоский модуль, то последовательность

$$0 \longrightarrow T(I) \xrightarrow{T(i)} T(K) \xrightarrow{T(p)} T(K/I) \longrightarrow 0$$

точна; иначе говоря, модуль $T(K/I)$ изоморфен фактормодулю $T(K)/T(I)$, который равен нулю по условию, ибо $T(I)$ (соответственно $T(K)$) совпадает с образом гомоморфизма $T(v)$ (соответственно ядром $T(w)$) (§ 2, n° 3, замечание 2). Однако равенство $T(p) = 0$ означает в силу предположения, что $p = 0$; следо-

вательно, $K = I$, что и доказывает точность последовательности (1).

Наконец, докажем эквивалентность условий б) и г). Если выполнено б), то $E/E\mathfrak{m} = E \otimes_A (A_s/\mathfrak{m}) \neq 0$, так как $A_s/\mathfrak{m} \neq 0$; отсюда следует г). Обратно, предположим, что условие г) выполнено. Так как всякий левый идеал $\mathfrak{a} \neq A$ кольца A содержится в некотором максимальном левом идеале $\mathfrak{m}$ (*Алгебра*, гл. I, § 8, n° 7, теорема 12), то из предположения $E \neq E\mathfrak{m}$ следует, что $E \neq E\mathfrak{a}$; иными словами, $E \otimes_A (A_s/\mathfrak{a}) \neq 0$. В других терминах это означает, что для всякого левого *моногенного* A-модуля $N \neq 0$ модуль $T(N)$ отличен от нуля. Если теперь N — произвольный левый A-модуль $\neq 0$, то он содержит некоторый моногенный подмодуль $N' \neq 0$; так как E — плоский модуль, то $T(N')$ можно отождествить с некоторой подгруппой в $T(N)$. Только что мы видели, что $T(N') \neq 0$; следовательно, $T(N) \neq 0$, а это и требовалось доказать.

Определение 1. *Правый A-модуль E называется строго плоским, если выполняются четыре условия из предложения* 1.

Аналогичным образом определяются строго плоские левые A-модули. Совершенно ясно, что, для того чтобы левый A-модуль E был строго плоским, необходимо и достаточно, чтобы E как правый A°-модуль был строго плоским.

Замечание. Если E — строго плоский модуль, то он *точен*: в самом деле, если $a \in A$ — такой элемент, что $xa = 0$ при всех $x \in E$, то гомотетия h: $b \to ba$ кольца A удовлетворяет соотношению $1_E \otimes h = 0$. Отсюда, в силу свойства в) из предложения 1, $h = 0$, т. е. $a = 0$, поскольку кольцо A имеет единичный элемент.

Примеры. 1) Прямая сумма плоского и строго плоского модулей является строго плоским модулем в силу условия г) из предложения 1 и предложения 2 § 2, n° 3.

2) Так как, согласно утверждению г) предложения 1 и примеру 1 из § 2, n° 4, модуль A_s строго плоский, из предыдущего примера вытекает, что всякий ненулевой свободный A-модуль строго плоский. Тем не менее существуют ненулевые прямые слагаемые свободных модулей (иначе говоря, ненулевые проективные модули), являющиеся точными, но не строго плоскими (упражнение 2).

3) Пусть A — *кольцо главных идеалов*. Для того чтобы A-модуль E был строго плоским, необходимо и достаточно, чтобы он был модулем *без кручения* и чтобы $E \neq Ep$ для всякого экстремального элемента p кольца A (*Алгебра*, гл. VII, § 1, n° 3); это немедленно следует из предложения 3 § 2, n° 4, и утверждения г) из предложения 1.

4) Пример 3) показывает, что $\mathbf{Z}$-модуль $\mathbf{Q}$ является плоским и точным, но *не строго плоским.*

Предложение 2. *Пусть E — строго плоский правый A-модуль и $u\colon N' \to N$ — некоторый гомоморфизм левых A-модулей. Для того чтобы гомоморфизм u был инъективным* (соответственно *сюръективным, биективным*), *необходимо и достаточно, чтобы отображение $1_E \otimes u\colon E \otimes_A N' \to E \otimes_A N$ было гомоморфизмом соответствующего типа.*

Это непосредственное следствие критерия а) из предложения 1.

Предложение 3. *Пусть $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ — точная последовательность правых A-модулей. Предположим, что модули E' и E'' — плоские, а один из них — строго плоский. Тогда строго плоским будет и модуль E.*

Уже известно, что E — плоский модуль (§ 2, n° 5, предложение 5). Мы сейчас проверим, что E обладает свойством б) из предложения 1. Пусть N — левый A-модуль. Благодаря тому что E'' плоский, имеет место точная последовательность

$$0 \longrightarrow E' \otimes_A N \longrightarrow E \otimes_A N \longrightarrow E'' \otimes_A N \longrightarrow 0$$

(§ 2, n° 5, предложение 4). Если $E \otimes_A N = 0$, то отсюда следует, что $E' \otimes_A N$ и $E'' \otimes_A N$ — нулевые модули. Так как один из модулей E', E'' строго плоский, то $N = 0$.

2. Тензорные произведения строго плоских модулей

Предложение 4. *Пусть R, S — два кольца, E — правый R-модуль и F — некоторый (R, S)-бимодуль. Предположим, что модуль E строго плоский. Тогда для того чтобы S-модуль F был плоским* (соответственно *строго плоским*), *необходимо и достаточно, чтобы таковым был модуль $E \otimes_R F$.*

1° Если F — плоский, то и $E \otimes_R F$ — плоский (§ 2, n° 7, предложение 8).

2° Предположим, что модуль $E \otimes_R F$ — плоский, и пусть $v\colon N' \to N$ — инъективный гомоморфизм левых S-модулей. Тогда гомоморфизм $1_E \otimes 1_F \otimes v\colon E \otimes_R F \otimes_S N' \to E \otimes_R F \otimes_S N$ инъективен (§ 2, n° 3, предложение 1). Из предложения 2 n° 1 следует, что $1_F \otimes v\colon F \otimes_S N' \to F \otimes_S N$ — также инъективный гомоморфизм. Следовательно, F — плоский S-модуль (§ 2, n° 3, предложение 1).

3° Предположим, что F — строго плоский модуль, и пусть N — такой левый S-модуль, что $E \otimes_R F \otimes_S N = 0$. Так как E — строго плоский, то $F \otimes_S N = 0$, откуда $N = 0$, ибо F — также строго плоский модуль; отсюда следует, что строго плоским является и модуль $E \otimes_R F$.

4° Предположим, что $E \otimes_R F$ — строго плоский модуль, и пусть N — такой левый S-модуль, что $F \otimes_S N = 0$. Имеем $E \otimes_R F \otimes_S N = 0$, откуда $N = 0$, а это доказывает, что F — строго плоский модуль.

Следствие. *Пусть C — коммутативное кольцо и E, F — два строго плоских C-модуля. Тогда C-модуль $E \otimes_C F$ — строго плоский.*

Надо воспользоваться предложением 4 при $R = S = C$.

3. Замена колец

Предложение 5. *Пусть ρ — некоторый гомоморфизм кольца A в кольцо B. Если E — строго плоский правый A-модуль, то правый B модуль $\rho^*(E) = E_{(B)} = E \otimes_A B$ также строго плоский.*

Надо применить предложение 4 n°2 при $R = A$, $S = F = B$ с учетом того, что B-модуль B_d строго плоский.

Следствие. *Если E — строго плоский правый A-модуль и $\mathfrak{a}$ — двусторонний идеал кольца A, то правый $(A/\mathfrak{a})$-модуль $E/E\mathfrak{a}$ является строго плоским.*

Надо применить предложение 5 при $B = A/\mathfrak{a}$, а ρ считать каноническим гомоморфизмом.

Предложение 6. *Пусть A — коммутативное кольцо, B — некоторая алгебра над A, ρ: $a \to a \cdot 1$ — канонический гомоморфизм из A в B. Предположим, что B является строго плоским A-модулем. Тогда для того чтобы A-модуль E был плоским* (соответственно *строго плоским*), *необходимо и достаточно, чтобы правый B-модуль $E_{(B)} = E \otimes_A B$ также был плоским* (соответственно *строго плоским*).

1° Если E — плоский (соответственно строго плоский) модуль, то модуль $E_{(B)}$ также плоский (соответственно строго плоский) в силу следствия 2 предложения 8 § 2, n° 7 (соответственно в силу предложения 5).

2° Предположим, что $E_{(B)}$ — плоский модуль, и пусть v: $N' \to N$ — инъективный гомоморфизм A-модулей. В силу следствия 3 § 2, n° 7, A-модуль $E \otimes_A B$ плоский, а потому гомоморфизм $1_E \otimes 1_B \otimes v$: $E \otimes_A B \otimes_A N' \to E \otimes_A B \otimes_A N$ инъективен. Поскольку структуры правого A-модуля и левого A-модуля на B совпадают, этот гомоморфизм можно отождествить с отображением

$$1_E \otimes v \otimes 1_B : E \otimes_A N' \otimes_A B \longrightarrow E \otimes_A N \otimes_A B.$$

Из того что B — строго плоский A-модуль, следует, что гомоморфизм $1_E \otimes v$: $E \otimes_A N' \to E \otimes_A N$ инъективен (n° 1, предложение 2), т. е. E — плоский модуль.

3° Наконец, предположим, что модуль $E_{(B)}$ является строго плоским. Отсюда следует, прежде всего, что E — плоский модуль в силу 2°. Пусть, с другой стороны, N — такой A-модуль, что $E \otimes_A N = 0$. Тогда $E \otimes_A N \otimes_A B = 0$, откуда, в силу совпадения структур правого и левого A-модуля, $E \otimes_A B \otimes_A N = 0$, что можно записать и так: $(E \otimes_A B) \otimes_B (B \otimes_A N) = 0$. Так как $E_{(B)}$ — строго плоский B-модуль, то отсюда получаем, что $B \otimes_A N = 0$ (n° 1, предложение 1). Следовательно, $N = 0$, так как B — строго плоский A-модуль (n° 1, предложение 1), что и требовалось доказать.

4. *Сужение скаляров*

Предложение 7. *Пусть A, B — два кольца, ρ — гомоморфизм кольца A в B. Пусть E — строго плоский правый B-модуль. Для того чтобы правый A-модуль $\rho_*(E)$ был плоским* (соответственно *строго плоским*), *необходимо и достаточно, чтобы кольцо B было плоским* (соответственно *строго плоским*) *правым A-модулем.*

Надо воспользоваться предложением 4 n° 2, заменив R, S, E, F на B, A, E, B соответственно и определив на B структуру правого A-модуля при помощи гомоморфизма ρ. Мы видим, таким образом, что B является плоским (соответственно строго плоским) A-модулем, если и только если плоским (соответственно строго плоским) является A-модуль $E \otimes_B B = \rho_*(E)$.

Замечания. 1° Предложение 7 показывает, что, для того чтобы A-модуль B был строго плоским, *достаточно*, чтобы существовал лишь *один* строго плоский B-модуль, являющийся также и строго плоским A-модулем.

2° Пусть A, B, C — три кольца, а ρ: $A \to B$, σ: $B \to C$ — два гомоморфизма колец. Предложение 7 показывает, что если C — строго плоский B-модуль, а B — строго плоский A-модуль, то C — строго плоский A-модуль. Если же кольцо C является строго плоским и как B-модуль, и как A-модуль, то строго плоским A-модулем будет и B (для определенности все модули предполагаются правыми). Тем не менее B и C могут быть строго плоскими A-модулями, в то время как C строго плоским B-модулем не является (упражнение 7).

5. *Строго плоские кольца*

Предложение 8. *Пусть A, B — два кольца, ρ — некоторый гомоморфизм кольца A в B. Предположим, что существует такой правый B-модуль E, что $\rho_*(E)$ — строго плоский A-модуль. Тогда*

(i) *для любого левого A-модуля F канонический гомоморфизм* $j\colon F \to F_{(B)} = B \otimes_A F$ *(такой, что* $j(x) = 1 \otimes x$ *для* $x \in F$*) инъективен;*

(ii) *для любого левого идеала* $\mathfrak{a}$ *кольца A имеет место равенство* $\rho^{-1}(B\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$;

(iii) *гомоморфизм* ρ *инъективен;*

(iv) *для любого левого максимального идеала* $\mathfrak{m}$ *кольца A существует такой левый максимальный идеал* $\mathfrak{n}$ *кольца B, что* $\rho^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$.

Докажем (i). Известно (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 5, n° 2, corollaire de la proposition 5), что для всякого правого B-модуля M канонический A-гомоморфизм $i\colon M \to \rho_*(M) \otimes_A B = \rho^*(\rho_*(M))$, определенный с помощью равенства $i(y) = y \otimes 1$, *инъективен* и что A-модуль $i(M)$ является *прямым слагаемым* модуля $\rho_*(M) \otimes_A B$. Следовательно, для любого левого A-модуля F гомоморфизм

$$i \otimes 1_F : \rho_*(M) \otimes_A F \longrightarrow \rho_*(M) \otimes_A B \otimes_A F$$

инъективен (§ 2, n° 1, лемма 2). Если положить $M = E$, то получим (ввиду того что $i \otimes 1_F = 1_M \otimes j$), что и гомоморфизм j инъективен (n° 1, предложение 2).

Утверждение (ii) следует из утверждения (i) при $F = A_s/\mathfrak{a}$, а (iii) получается из (ii) при $\mathfrak{a} = \{0\}$.

Наконец, если $\mathfrak{m}$ — максимальный левый идеал кольца A, то, в силу (ii), имеет место равенство $\rho^{-1}(B\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$, откуда $B\mathfrak{m} \neq B$. Следовательно, существует максимальный левый идеал $\mathfrak{n}$ кольца B, содержащий $B\mathfrak{m}$ (*Алгебра*, гл. I, § 8, n° 7, теорема 2). Имеем: $\mathfrak{m} \subset \rho^{-1}(\mathfrak{n})$ и, так как $\rho(1) \notin \mathfrak{n}$, 1 не принадлежит $\rho^{-1}(\mathfrak{n})$. Следовательно, $\rho^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$.

Обычно, когда кольца A и B удовлетворяют условиям предложения 8, кольцо A отождествляют с *подкольцом* в B при помощи гомоморфизма ρ.

Следствие. *Если в условиях предположения* 8 *кольцо B нётерово* (соответственно *артиново*) *слева, то таково же и кольцо A.*

Действительно, если бы существовала возрастающая (соответственно убывающая) нестационарная последовательность $(\mathfrak{a}_n)$ левых идеалов кольца A, то последовательность идеалов $(B\mathfrak{a}_n)$ кольца B была бы возрастающей (соответственно убывающей) и нестационарной, так как $\rho^{-1}(B\mathfrak{a}_n) = \mathfrak{a}_n$, а это противоречит предположению.

• Замечание 1. В гл. II, § 2, n° 5, в следствии 4 из предложения 11 мы установим, что если кольца A и B коммутативны,

то из условий предложения 8 следует, что для любого *простого* идеала $\mathfrak{p}$ кольца A существует такой *простой* идеал $\mathfrak{q}$ кольца B, что $\rho^{-1}(\mathfrak{q})=\mathfrak{p}$ (или, если A отождествить с подкольцом в B, $\mathfrak{p}=A\cap\mathfrak{q}$).

Предложение 8 применимо, в частности, когда само кольцо B является *строго плоским* A-модулем. Но в этом случае имеет место следующее более точное предложение:

Предложение 9. *Пусть A, B — два кольца и ρ — гомоморфизм из A в B. Следующие пять свойств эквивалентны:*

а) *правый A-модуль B является строго плоским;*

б) *гомоморфизм ρ инъективен и правый A-модуль $B/\rho(A)$ является плоским;*

в) *правый A-модуль B является плоским и для всякого левого A-модуля F канонический гомоморфизм $x\to 1\otimes x$ из F в $B\otimes_A F$ инъективен;*

г) *правый A-модуль B является плоским и для всякого левого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A имеет место равенство $\rho^{-1}(B\mathfrak{a})=\mathfrak{a}$;*

д) *правый A-модуль B является плоским и для всякого максимального левого идеала $\mathfrak{m}$ кольца A существует такой максимальный идеал $\mathfrak{n}$ кольца B, что $\rho^{-1}(\mathfrak{n})=\mathfrak{m}$.*

В силу предложения 8, свойство а) влечет за собой свойства в), г), д). С другой стороны, если выполняется д), то $B\mathfrak{m}\neq B$ для всякого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A (так как существует такой максимальный левый идеал $\mathfrak{n}$ кольца B, что $B\mathfrak{m}\subset\mathfrak{n}$), и кольцо B является строго плоским A-модулем согласно критерию г) из предложения 1 n° 1. Следовательно, из д) следует а).

Докажем теперь, что в) $\Rightarrow$ г) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ а), и это завершит доказательство. Прежде всего, из в) вытекает г), если в условии в) положить $F=A_s/\mathfrak{a}$. Если имеет место г), то, положив $\mathfrak{a}=\{0\}$, мы видим, что гомоморфизм ρ инъективен. Из г), а также из следствия предложения 7 § 2, n° 6, получается, что $B/\rho(A)$ — плоский правый A-модуль. Следовательно, г) влечет за собой б). Наконец, если выполняется условие б), то предложение 3 n° 1, примененное к точной последовательности

$$0\longrightarrow A_d\xrightarrow{\rho}B\longrightarrow B/\rho(A)\longrightarrow 0,$$

показывает, что B — строго плоский правый A-модуль, ибо строго плоским является A_d, что и требовалось доказать.

*Замечание 2. В гл. II, § 2, n° 5, в следствии 4 предложения 11 мы установим, что для коммутативных колец A и B условия предложения 9 эквивалентны следующему:

е) *кольцо B является плоским A-модулем и для всякого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A существует такой идеал $\mathfrak{q}$ кольца B, что $\rho^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$.*

При выполнении условий предложения 9 мы можем отождествить кольцо A с *подкольцом* в B при помощи гомоморфизма ρ. Соотношение $\rho^{-1}(B\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ запишется тогда так: $A \cap B\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. С другой стороны, если F — левый A-модуль, то его можно отождествить с его образом в модуле $B \otimes_A F$ относительно канонического отображения $x \to 1 \otimes x$; если X — аддитивная подгруппа модуля F, то через BX будет обозначаться левый B-подмодуль модуля $B \otimes_A F$, порожденный группой X. В этих обозначениях сформулируем

Предложение 10. *Пусть B — кольцо и A — такое подкольцо в B, что кольцо B является строго плоским правым A-модулем. Пусть F — левый A-модуль, F' и F'' — подмодули в F. Тогда*

(i) *каноническое отображение $B \otimes_A F' \to B \otimes_A F$ является изоморфизмом модуля $B \otimes_A F'$ на модуль BF';*

(ii) $F \cap BF' = F'$;

(iii) $B(F' + F'') = BF' + BF''$;

(iv) $B(F' \cap F'') = BF' \cap BF''$.

В самом деле, так как B — плоский правый A-модуль, то каноническое отображение $B \otimes_A F' \to B \otimes_A F$ инъективно. Если учесть сделанные отождествления, образ этого отображения равен BF', что доказывает (i). Утверждение (ii) следует из предложения 7 § 2, n° 6, при $E = B$, $E' = A$, так как $A \otimes_A F = F$ и $A \otimes_A F' = F'$. Утверждение (iii) тривиально, а (iv) следует из предложения 6 § 2, n° 6.

6. *Строго плоские кольца и условия конечности*

Предложение 11. *Пусть B — некоторое кольцо, A — подкольцо кольца B, причем B является строго плоским правым A-модулем. Для того чтобы левый A-модуль F был модулем конечного типа* (соответственно *конечно представимым модулем*), *необходимо и достаточно, чтобы B-модуль $B \otimes_A F$ был модулем конечного типа* (соответственно *конечно представимым модулем*).

1° Без каких бы то ни было ограничений на кольцо B очевидно, что если F — левый A-модуль конечного типа, то $B \otimes_A F$ — левый B-модуль также конечного типа. Обратно, если B-модуль $B \otimes_A F$ имеет конечный тип, то он порождается конечным числом элементов вида $1 \otimes x_i$, где $x_i \in F$. Если M — A-подмодуль в F, порожденный элементами x_i, и j — каноническое

вложение $M \to F$, то гомоморфизм $1_B \otimes j$: $B \otimes_A M \to B \otimes_A F$ сюръективен, в силу чего сюръективен и гомоморфизм j (n° 1, предложение 2). Этим доказано, что F — модуль конечного типа.

2° Если модуль F допускает конечное представление, то таким же, снова без каких-либо условий на кольцо B, будет и модуль $B \otimes_A F$ (§ 2, n° 8). Остается доказать, что если конечное представление допускает модуль $B \otimes_A F$, то его допускает и модуль F. Уже известно из 1°, что F — модуль конечного типа, и, следовательно, существует сюръективный гомоморфизм u: $L \to F$, где L — свободный A-модуль конечного типа. Пусть R — ядро гомоморфизма u; тогда $B \otimes_A R$ можно отождествить с ядром сюръективного гомоморфизма $1_B \otimes u$: $B \otimes_A L \to B \otimes_A F$ (§ 2, n° 3, замечание 2). Поскольку модуль $B \otimes_A F$ допускает по предположению конечное представление (§ 2, n° 8, лемма 9), модуль $B \otimes_A R$ имеет конечный тип. Из пункта 1° теперь следует, что R — A-модуль конечного типа и, следовательно, модуль F допускает конечное представление.

Предложение 12. *Пусть B — некоторое кольцо и A — подкольцо центра B, такое, что B является строго плоским A-модулем. Для того чтобы какой-либо A-модуль F был проективным и имел конечный тип, необходимо и достаточно, чтобы модуль $B \otimes_A F$ был проективным левым B-модулем конечного типа.*

Очевидно, что это условие необходимо и без специальных предположений о кольцах A и B (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 5, n° 1, corollaire de la proposition 4). Докажем его достаточность. Так как любой проективный модуль конечного типа допускает конечное представление (§ 2, n° 8, лемма 8), то сделанное предположение, согласно предложению 11, означает, что модуль F допускает конечное представление[1]). Следовательно, для всякого A-модуля M имеет место канонический изоморфизм

$$\omega B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(F, M) \to \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A F, B \otimes_A M)$$

(§ 2, n° 10, предложение 11). Пусть теперь v: $M \to M''$ — некоторый *сюръективный* гомоморфизм A-модулей; рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(F, M) & \xrightarrow{\omega} & \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A F, B \otimes_A M) \\ \downarrow{\scriptstyle 1_B \otimes \mathrm{Hom}(1_F, v)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(1_B \otimes F, 1_B \otimes v)} \\ B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(F, M'') & \xrightarrow{\omega} & \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A F, B \otimes_A M'') \end{array}$$

[1]) Дальнейшее доказательство можно заменить более простым: из предложения 6 n° 3 можно заключить, что F — плоский модуль, и воспользоваться результатом из упражнения 15, § 2. — *Прим. ред.*

Так как гомоморфизм $1_B \otimes v$ сюръективен, а модуль $B \otimes_A F$ предполагается проективным, то гомоморфизм $\mathrm{Hom}(1_{B\otimes F}, 1_B \otimes v)$ *сюръективен* (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 2, n° 2, proposition 4) и, следовательно, таков же и гомоморфизм $1_B \otimes \mathrm{Hom}(1_F, v)$. Но так как B — строго плоский A-модуль, сюръективен уже сам гомоморфизм $\mathrm{Hom}(1_F, v)$ (n° 1, предложение 2); следовательно, F — проективный A-модуль (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 2, n° 2, proposition 4).

7. *Линейные уравнения над строго плоским кольцом*

Пусть B — некоторое кольцо, A — подкольцо в B. Мы будем говорить, что пара (A, B) *обладает свойством линейного расширения*, если она удовлетворяет следующему условию:

(E) *Всякое образованное из элементов кольца B решение $(y_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ системы линейных уравнений*

$$\sum_{k=1}^{n} y_k c_{ki} = d_i, \tag{3}$$

коэффициенты c_{ki} и правые части d_i которой принадлежат кольцу A, имеет вид

$$y_k = x_k + \sum_{j=1}^{n} b_j z_{jk} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n), \tag{4}$$

где (x_k) — некоторое решение системы (3), *образованное из элементов кольца A, коэффициенты b_j принадлежат кольцу B, а каждый набор $(z_{jk})_{1\leqslant k\leqslant n}$ является решением однородной линейной системы, ассоциированной с* (3), *и состоит из элементов кольца A.*

Предложение 13. *Пусть A — подкольцо кольца B. Для того чтобы пара (A, B) обладала свойством линейного расширения, необходимо и достаточно, чтобы кольцо B было строго плоским правым A-модулем.*

Условие *достаточно*. Действительно, так как B — плоский A-модуль, то всякое решение из элементов кольца B *однородной* линейной системы, ассоциированной с (3), является линейной комбинацией с коэффициентами в B решений, образованных элементами из A (§ 2, n° 11, следствие 2 из предложения 13). Остается, следовательно, доказать, что из существования решения в кольце B системы (3) вытекает существование *хоть какого-нибудь* решения в кольце A. Однако если положить $c_k = (c_{ki})_{1\leqslant i\leqslant m} \in A_s^m$, $d = (d_i) \in A_s^m$, то система (3) превратится в уравнение $\sum_{k=1}^{n} y_k \otimes c_k = 1 \otimes d$ в модуле $B \otimes_A A_s^m = B_s^m$.

Другими словами, если M — подмодуль модуля A_s^m, порожденный элементами c_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$, то существование решения (y_k) системы (3) эквивалентно (при сделанных в n° 5 отождествлениях) соотношению $d \in BM \cap A_s^m$. Но так как $BM \cap A_s^m = M$ (n° 5, предложение 10 (ii)), то из этого соотношения вытекает, что $d \in M$, т. е. из него следует существование решения (x_k) системы (3) из элементов кольца A.

Условие *необходимо*. Предположим, в самом деле, что (A, B) обладает свойством линейного расширения. Уже известно, что B — плоский правый A-модуль (§ 2, n° 11, следствие 2 из предложения 13). Докажем, что для всякого левого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A имеет место равенство $B\mathfrak{a} \cap A = \mathfrak{a}$, чем будет доказано, что B — строго плоский правый A-модуль (n° 5, предложение 9 г)). Итак, пусть $x \in B\mathfrak{a} \cap A$. По условию существуют такие элементы $y_i \in B$ и $a_i \in \mathfrak{a}$, что $\sum_i y_i a_i = x$. Свойство (E), примененное к этому линейному уравнению с коэффициентами и правыми членами из кольца A, показывает, что существуют такие элементы $x_i \in A$, что $x = \sum_i x_i a_i$; следовательно, $x \in \mathfrak{a}$, что и требовалось доказать.

Упражнения

1) Доказать, что если A — простое кольцо, то всякий ненулевой A-модуль является строго плоским. Справедлнв ли этот результат для полупростых колец?

2) Пусть (p_n) — строго возрастающая последовательность простых чнсел и A — кольцо, равное произведению колец $\prod_n \mathbf{Z}/p_n\mathbf{Z}$. Показать, что прямая сумма E модулей $\mathbf{Z}/p_n\mathbf{Z}$ является точным проективным A-модулем и не является строго плоским модулем (обратнть вниманне на то, что модуль E является идеалом кольца A, для которого $E^2 = E$).

3) Пусть A — когерентное справа кольцо (§ 2, упражнение 11). Показать, что произведение плоскнх левых A-модулей является строго плоскнм, если по крайней мере один из них строго плоский.

Получнть отсюда, что если A — когерентное коммутативное кольцо, то кольцо формальных степенных рядов $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ является строго плоским A-модулем.

4) Пусть A — простая алгебра над полем K, B — подалгебра из A, не являющаяся простой, но полупростая. Показать, что A есть (правый или левый) строго плоский B-модуль. Показать, что, однако, существуют правые не строго плоские B-модули E, тогда как A-модули $E \otimes_B A$ всегда являются строго плоскими (упражнение 1).

5) Пусть A — коммутативное кольцо, M — плоский A-модуль, в котором содержится некоторый подмодуль N, не являющийся плоским (см. § 2, упражнение 3). Пусть B (соответственно C) обозначает A-модуль $A \oplus N$ (соответственно $A \oplus M$), в котором умножение определяется по формуле $(a, x)(a', x') = (aa', ax' + a'x)$. Тогда A-модуль B не является плоским, а B-модуль C представляет собой строго плоскнй A-модуль, так что B удовлетворяет условиям предложения 8 n° 5.

6) Привести пример такого целостного кольца A и такого кольца B, содержащего A, что B является плоским A-модулем, но существует A-модуль E, не являющийся проективным и не имеющий конечного типа, для которого $B \otimes_A E$ является свободным B-модулем конечного типа.

7) Если K — поле, то кольцо $K[X]$ и поле $K(X)$ — строго плоские K-модули; однако $K(X)$ не является строго плоским $K[X]$-модулем.

8) Пусть p — простое число и A — подкольцо поля $\mathbf{Q}$, образованное дробями вида k/p^n, где $k \in \mathbf{Z}$, $n \geqslant 0$. Показать, что A является плоским $\mathbf{Z}$-модулем и что существует такой неплоский $\mathbf{Z}$-модуль E, что $A \otimes_{\mathbf{Z}} E$ — плоский A-модуль.

9) Пусть A — коммутативное кольцо, B — некоторая A-алгебра, $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ — некоторое семейство A-алгебр. Для всякого $\lambda \in L$ обозначим через $B_\lambda = C_\lambda \otimes_A B$ тензорное произведение алгебр C_λ и B. Допустим, что E — левый B-модуль, и положим $E_\lambda = B_\lambda \otimes_B E = C_\lambda \otimes_A E$; мы получили (B_λ, C_λ)-бимодули. Аналогичным образом, если F — правый B-модуль, то $F_\lambda = F \otimes_B B_\lambda = F \otimes_A C_\lambda$ является (C_λ, B_λ)-бнмодулем.

а) Показать, что (C_λ, C_λ)-бимодуль $F_\lambda \otimes_{B_\lambda} E_\lambda$ изоморфен модулю $(F \otimes_B E) \otimes_A C_\lambda$.

б) Показать, что если E — плоскнй (соответственно строго плоский) B-модуль, то н каждый B_λ-модуль E_λ плоский (соответственно строго плоский). Обратное также верно, если, кроме того, предположить, что хотя бы один нз C_λ является строго плоским A-модулем.

в) Показать, что если множество L конечно, причем каждый из B_λ-модулей E_λ проективен и имеет конечный тип, а прямая сумма $\bigoplus_{\lambda \in L} C_\lambda$ является строго плоским A-модулем, то E —проективный B-модуль конечного типа (воспользоваться предложением 12, n° 6).

10) а) Пусть $\rho\colon A \to B$ — инъективный гомоморфизм колец. Показать, что для всякого левого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A, являющегося левым аннулятором некоторого подмножества $M \subset A$, имеет место равенство $\rho^{-1}(B\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$.

б) Прнвести с помощью пункта а) пример такого гомоморфизма $\rho\colon A \to B$, чтобы правый A-модуль B не являлся плоским, но тем не менее $\rho^{-1}(B\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ для каждого левого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A (§ 2, упражнение 17; *Алгебра*, гл. VIII, § 3, упражнение 11, § 2; упражнение 6, и гл. IX, § 2, упражнение 4).

§ 4. Плоские модули и функторы «Tor»

Для читателей, знакомых с гомологической алгеброй [1]), мы сейчас в общих чертах наметим связь теории плоских модулей с теорией функторов Tor.

Предложение 1. *Пусть E — правый A-модуль. Следующие четыре свойства эквивалентны:*

а) *модуль E плоский;*

б) *для любого левого A-модуля F и всякого целого $n \geqslant 1$ имеет место равенство* $\mathrm{Tor}_n^A(E, F) = 0$;

[1]) См. ту часть этого трактата, которая посвящена категориям, и в особенности абелевым категорням (готовится к изданию). Пока этот раздел не опубликован, читатель может почерпнуть необходнмые сведення в книгах [Г], [КЭ] или [М].

в) *для любого левого A-модуля F имеет место равенство* $\operatorname{Tor}_1^A(E, F) = 0$;

г) *для любого левого идеала $\mathfrak{a}$ конечного типа кольца A имеет место равенство*

$$\operatorname{Tor}_1^A(E, A_s/\mathfrak{a}) = 0.$$

Покажем, что из а) следует б). Пусть

$$\ldots \to L_n \to L_{n-1} \to \ldots \to L_0 \to F \to 0$$

— любая свободная резольвента модуля F. Так как E — плоский модуль, то последовательность

$$\ldots \to E \otimes L_n \to E \otimes L_{n-1} \to \ldots \to E \otimes L_0 \to E \otimes E \to 0 \quad (1)$$

точна. Поскольку модули $\operatorname{Tor}_n^A(E, F)$ изоморфны группам гомологий комплекса (1), то они равны нулю при $n \geqslant 1$.

То, что из б) следует в), а из в) следует г), является тривиальным фактом. Покажем, что г) влечет за собой а). Точная последовательность

$$0 \to \mathfrak{a} \to A_s \to A_s/\mathfrak{a} \to 0$$

дает точную последовательность

$$\operatorname{Tor}_1^A(E, A_s/\mathfrak{a}) \to E \otimes_A \mathfrak{a} \to E \otimes_A A.$$

Поскольку имеет место г), канонический гомоморфизм

$$E \otimes_A \mathfrak{a} \to E \otimes_A A = E$$

инъективен, а это означает, что E — плоский модуль (§ 2, n° 3, предложение 1).

Предложение 1 дает характеристику плоских модулей, которая очень часто используется в приложениях. Ограничимся тем, что в качестве примера заново докажем предложение 5 § 2, n° 5. Если E' и E'' — плоские модули, то точная последовательность

$$\operatorname{Tor}_1^A(E', F) \to \operatorname{Tor}_1^A(E, F) \to \operatorname{Tor}_1^A(E'', F)$$

дает равенство $\operatorname{Tor}_1^A(E, F) = 0$ для всякого левого A-модуля F; таким образом, E — плоский модуль. Если E и E'' — плоские модули, то точная последовательность

$$\operatorname{Tor}_2^A(E'', F) \to \operatorname{Tor}_1^A(E', F) \to \operatorname{Tor}_1^A(E, F)$$

показывает, что $\mathrm{Tor}_1^A(E', F) = 0$. Следовательно, E' — плоский модуль.

Предложение 2. *Пусть R, S — два кольца, ρ: $R \to S$ — некоторый гомоморфизм и F — левый R-модуль. Следующие свойства эквивалентны:*

а) *для всякого правого S-модуля E имеет место равенство* $\mathrm{Tor}_1^R(\rho_*(E), F) = 0$;

б) *левый S-модуль* $\rho^*(F) = F_{(S)} = S \otimes_R F$ *является плоским и имеет место равенство* $\mathrm{Tor}_1^R(\rho_*(S_d), F) = 0$.

Предположим, что выполнено а). Очевидно, что для $E = S_d$ имеет место $\mathrm{Tor}_1^R(\rho_*(S_d), F) = 0$. Покажем, кроме того, что $F_{(S)}$ — плоский S-модуль. Для этого заметим, что если E — правый S-модуль, то аддитивную группу $E \otimes_S F_{(S)}$ можно отождествить с $\rho_*(E) \otimes_R F$. Таким образом, если имеет место точная последовательность правых S-модулей

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0,$$

то с учетом а) отсюда получается точная последовательность

$$0 \to \rho_*(E') \otimes_R F \to \rho_*(E) \otimes_R F \to \rho_*(E'') \otimes_R F \to 0$$

или, переписывая еще раз,

$$0 \to E' \otimes_S F_{(S)} \to E \otimes_S F_{(S)} \to E'' \otimes_S F_{(S)} \to 0;$$

этим доказано, что модуль $F_{(S)}$ — плоский.

Обратно, если выполняется б), то, прежде всего, для всякого *свободного* правого S-модуля $L = S_d^{(I)}$ имеет место равенство $\mathrm{Tor}_1^R(\rho_*(L), F) = (\mathrm{Tor}_1^R(\rho_*(S_d), F))^{(I)} = 0$. Любой правый S-модуль E записывается в виде $E = L/H$ при некотором подходящем свободном S-модуле L. Следовательно, имеет место точная последовательность

$$0 = \mathrm{Tor}_1^R(\rho_*(L), F) \to \mathrm{Tor}_1^R(\rho_*(E), F) \to \rho_*(H) \otimes_R F \to \rho_*(L) \otimes_R F. \quad (2)$$

Но так как модуль $F_{(S)}$ плоский, гомоморфизм $H \otimes_S F_{(S)} \to L \otimes_S F_{(S)}$ инъективен и его можно отождествить с гомоморфизмом

$$\rho_*(H) \otimes_R F \to \rho_*(L) \otimes_R F.$$

Из (2) теперь следует, что $\mathrm{Tor}_1^R(\rho_*(E), F) = 0$.

Замечание. Предложение 2 следует также из существования точной последовательности

$$E \otimes_S \operatorname{Tor}_1^R(\rho_*(S_d), F) \to \operatorname{Tor}_1^R(\rho_*(E), F) \to \operatorname{Tor}_1^S(E, S_d \otimes_R F) \to 0,$$

вытекающей из спектральной последовательности «ассоциативности» функторов Tor.

Упражнение

1) Показать, что в формулировке предложения 2 условие а) можно заменить следующим:

а′) Для всякого моногенного правого S-модуля E имеет место равенство $\operatorname{Tor}_1^R(\rho_*(E), F) = 0$.

(Чтобы показать, что из а′) следует а), надо рассмотреть сначала случай, когда модуль E порождается n элементами, и провести доказательство индукцией по n.)

ГЛАВА II[1])

ЛОКАЛИЗАЦИЯ

Соглашения, принятые в гл. I, *сохраняют силу и в этой главе. Кроме того, если не оговорено противное, все кольца предполагаются коммутативными.*

Пусть A, B — *два кольца,* ρ — *гомоморфизм кольца* A *в* B *и* M — *некоторый* B-*модуль. Когда мы говорим о модуле* M *как об* A-*модуле, то, если нет оговорок, на* M *подразумевается структура* A-*модуля* $\rho_*(M)$ (*определенная внешним законом* $(a, m) \to \rho(a) \cdot m$).

§ 1. Простые идеалы

1. Определение простых идеалов

Определение 1. *Идеал* $\mathfrak{p}$ *кольца* A *называется простым, если факторкольцо* $A/\mathfrak{p}$ *целостное.*

Согласно этому определению, идеал $\mathfrak{p}$ кольца A является простым, если выполняются следующие два условия:

1° $\mathfrak{p} \neq A$;

2° если x, y — такие элементы из A, что $x \notin \mathfrak{p}$ и $y \notin \mathfrak{p}$, то $xy \notin \mathfrak{p}$.

Эти условия можно выразить, сказав, что произведение любого *конечного семейства* элементов из множества $\mathbf{C}\mathfrak{p}$ снова принадлежит $\mathbf{C}\mathfrak{p}$, так как применительно к пустому семейству последнее требование означает, что $1 \notin \mathfrak{p}$.

Любой *максимальный* идеал $\mathfrak{m}$ кольца A прост, так как $A/\mathfrak{m}$ — поле. Следовательно, из теоремы Крулля (*Алгебра*, гл. I, § 8, п° 7, теорема 2) вытекает, что любой идеал кольца A, *отличный* от A, содержится по крайней мере в одном простом идеале. В частности, для того чтобы в кольце A существовали простые идеалы, необходимо и достаточно, чтобы A было отлично от нуля.

---

[1]) За исключением тех мест, которые отмечены парой звездочек *. . . .*, результаты этой главы не зависят от других книг второй части и от § 4 из гл. I.

Пусть $f\colon A \to B$ — гомоморфизм колец и $\mathfrak{q}$ — некоторый идеал кольца B. Положим $\mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{q})$. Тогда гомоморфизм $\bar{f}\colon A/\mathfrak{p} \to B/\mathfrak{q}$, получающийся из f при переходе к факторкольцам, инъективен. Допустим, что идеал $\mathfrak{q}$ прост. Так как кольцо $B/\mathfrak{q}$ является при этом условии целостным, то таким же будет и кольцо $A/\mathfrak{p}$, изоморфное некоторому подкольцу кольца $B/\mathfrak{q}$. По этой причине идеал $\mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{q})$ прост. В частности, пусть A — подкольцо B; тогда для всякого простого идеала $\mathfrak{q}$ в B пересечение $\mathfrak{q} \cap A$ является простым идеалом в A. Если гомоморфизм f сюръективен, то $\bar{f}$ — изоморфизм; условия „$\mathfrak{p}$ — простой идеал“ и „$\mathfrak{q}$ — простой идеал“ в этом случае эквивалентны. Следовательно, если $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{a}$ — такие идеалы кольца A, что $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, то необходимым и достаточным условием простоты идеала $\mathfrak{p}$ является простота идеала $\mathfrak{p}/\mathfrak{a}$ в факторкольце $A/\mathfrak{a}$.

Предложение 1. *Пусть A — некоторое кольцо, $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ — какие-либо его идеалы, а $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца A. Если идеал $\mathfrak{p}$ содержит произведение $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$, то он содержит по крайней мере один из идеалов $\mathfrak{a}_i$.*

В самом деле, предположим, что идеал $\mathfrak{p}$ не содержит ни одного из идеалов $\mathfrak{a}_i$. Тогда для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, существует некоторый элемент $s_i \in \mathfrak{a}_i \cap \mathbf{C}\mathfrak{p}$. Следовательно, элемент $s = s_1 \ldots s_n$ содержится в произведении $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ и не содержится в $\mathfrak{p}$, что неверно.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца A. Для любого целого $n > 0$ единственным простым идеалом, содержащим $\mathfrak{m}^n$, является сам идеал $\mathfrak{m}$.*

Действительно, любой такой идеал $\mathfrak{p}$ должен содержать идеал $\mathfrak{m}$ в силу предложения 1 при $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{m}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Но так как идеал $\mathfrak{m}$ максимален, то $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$.

Предложение 2. *Пусть A — кольцо, $\mathfrak{a}$ — некоторое непустое подмножество в A, замкнутое относительно сложения и умножения, и пусть $(\mathfrak{p}_i)_{i \in I}$ — непустое конечное семейство идеалов кольца A. Предположим, что множество $\mathfrak{a}$ содержится в объединении этих идеалов и что среди $\mathfrak{p}_i$ имеется не более двух непростых идеалов. Тогда множество $\mathfrak{a}$ содержится в одном из идеалов $\mathfrak{p}_i$.*

Будем рассуждать с помощью индукции по $n = \operatorname{Card}(I)$. При $n = 1$ утверждение тривиально. Предположим, что $n \geqslant 2$. Если существует индекс j, для которого $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_j \subset \bigcup_{i \neq j} \mathfrak{p}_i$, то множество $\mathfrak{a}$, являющееся объединением множеств $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_i$, $i \in I$, содержится в объединении $\bigcup_{i \neq j} \mathfrak{p}_i$, а потому, в силу индуктив-

ного предположения, и в одном из идеалов $\mathfrak{p}_i$. Поэтому предположим, что такого индекса не существует. Для каждого $j \in I$ обозначим через y_j некоторый элемент пересечения $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}_j$, не принадлежащий ни одному из тех идеалов $\mathfrak{p}_i$, для которых $i \neq j$. Пусть k — элемент множества I, выбранный таким образом, что идеал $\mathfrak{p}_k$ прост, если $n > 2$, а если $n = 2$, то k можно выбрать произвольно; пусть $z = y_k + \prod_{i \neq k} y_i$. Очевидно, что $z \in \mathfrak{a}$, ибо множество $\mathfrak{a}$ замкнуто относительно сложения и умножения. Если $j \neq k$, то элемент $\prod_{i \neq k} y_i$ принадлежит идеалу $\mathfrak{p}_j$, но $y_k \notin \mathfrak{p}_j$, откуда и $z \notin \mathfrak{p}_j$. С другой стороны, произведение $\prod_{i \neq k} y_i$ не принадлежит идеалу $\mathfrak{p}_k$, так как ему не принадлежит ни один из множителей y_i $(i \neq k)$ и так как $\mathfrak{p}_k$ — простой идеал, если $n - 1 > 1$. Поскольку $y_k \in \mathfrak{p}_k$, то и элемент z не принадлежит $\mathfrak{p}_k$. Предложение доказано.

2. *Взаимно простые идеалы*

Пусть A — некоторое кольцо; два идеала $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ этого кольца называются *взаимно простыми*[1]), если $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$. Для того чтобы два идеала были взаимно простыми, необходимо и достаточно, чтобы сумма $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ не содержалась ни в одном простом идеале (*Алгебра*, гл. I, § 8, n°7, теорема 2), т. е. чтобы ни в каком простом идеале не содержались одновременно $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. Например, два различных максимальных идеала взаимно просты.

Когда A является кольцом главных идеалов (*Алгебра*, гл. VII, § 1), для взаимной простоты его элементов a и b необходимо и достаточно, согласно тождеству Безу (loc. cit., n°2, теорема 1), чтобы взаимно простыми были идеалы Aa и Ab.

Предложение 3. *Пусть* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ *— два взаимно простых идеала некоторого кольца* A, *и пусть* $\mathfrak{a}'$ *и* $\mathfrak{b}'$ *— такие два идеала в* A, *что некоторая степень любого элемента из* $\mathfrak{a}$ (соответственно *из* $\mathfrak{b}$) *принадлежит идеалу* $\mathfrak{a}'$ (соответственно $\mathfrak{b}'$). *Тогда идеалы* $\mathfrak{a}'$ *и* $\mathfrak{b}'$ *взаимно просты.*

В силу данного условия, всякий простой идеал, содержащий $\mathfrak{a}'$, содержит и $\mathfrak{a}$, а всякий простой идеал, содержащий $\mathfrak{b}'$, содержит и $\mathfrak{b}$. Поэтому, если какой-то простой идеал содержит $\mathfrak{a}'$ и $\mathfrak{b}'$, то он содержит также $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, что невозможно. Следовательно, идеалы $\mathfrak{a}'$ и $\mathfrak{b}'$ взаимно просты.

[1]) В литературе используется и другой термин — „комаксимальные идеалы“ (см., например, Зарисский О., Самюэль П., Коммутативная алгебра, ИЛ, М., 1963). — *Прим. перев.*

Предложение 4. *Пусть* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ — *идеалы некоторого кольца* A. *Если идеал* $\mathfrak{a}$ *взаимно прост с каждым из идеалов* $\mathfrak{b}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, *то он взаимно прост и с произведением* $\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_n$.

Пусть $\mathfrak{p}$ — произвольный простой идеал кольца A. Если бы он содержал идеалы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_n$, то он содержал бы и один из идеалов $\mathfrak{b}_i$ (n° 1, предложение 1), что невозможно, ибо $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}_i$ взаимно просты.

Предложение 5. *Пусть* $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ — *непустое конечное семейство идеалов некоторого кольца* A. *Следующие свойства эквивалентны:*

а) *при* $i \neq j$ *идеалы* $\mathfrak{a}_i$ *и* $\mathfrak{a}_j$ *взаимно просты;*

б) *канонический гомоморфизм* $\varphi\colon A \to \prod_{i \in I} (A/\mathfrak{a}_i)$ (*Algébre*, chap. II, 3^e éd., § 1, n° 7)[1]) *сюръективен.*

Если эти условия выполнены, пересечение $\mathfrak{a}$ *идеалов* $\mathfrak{a}_i$ *равно их произведению, а канонический гомоморфизм* $\psi\colon A/\mathfrak{a} \to \prod_{i \in I} (A/\mathfrak{a}_i)$ (*Algébre*, chap. II, 3^e éd., § 1, n° 7)[1]) *биективен.*

Будем рассуждать с помощью индукции по числу n элементов множества I, приняв во внимание тривиальность случая $n = 1$. Рассмотрим сначала случай $n = 2$. Эквивалентность условий а) и б) вытекает в этом случае из точной последовательности

$$0 \to A/(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2) \xrightarrow{\psi} (A/\mathfrak{a}_1) \oplus (A/\mathfrak{a}_2) \to A/(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \to 0$$

(*Algébre*, chap. II, 3^e éd., § 1, n° 7, formule (30)). Кроме того, поскольку $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = A$, существуют такие элементы $e_1 \in \mathfrak{a}_1$ и $e_2 \in \mathfrak{a}_2$, что $1 = e_1 + e_2$; следовательно, для любого $x \in \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$ имеет место разложение $x = xe_1 + xe_2$. Но, согласно определению, $xe_1 \in \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ и $xe_2 \in \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$; поэтому $x \in \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, откуда $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$. Обратное же включение очевидно.

Перейдем к общему случаю. Пусть выполнено условие а) и множество I состоит из k элементов. Положим $\mathfrak{b}_k = \bigcap_{i \neq k} \mathfrak{a}_i$. Из индуктивного предположения вытекает, что $\mathfrak{b}_k = \prod_{i \neq k} \mathfrak{a}_i$, а из предложения 4, — что идеалы $\mathfrak{a}_k$ и $\mathfrak{b}_k$ взаимно просты. Следовательно, в силу первой части доказательства, справедливы равенства $\mathfrak{a} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_k \cap \mathfrak{b}_k = \prod_{i \in I} \mathfrak{a}_i$, и по той же причине биективен

[1]) См. также *Алгебра*, гл. II, § 2, n° 3. — *Прим. перев.*

канонический гомоморфизм $A/\mathfrak{a} \to (A/\mathfrak{a}_k) \times (A/\mathfrak{b}_k)$. Согласно предположению индукции, канонический гомоморфизм $A/\mathfrak{b}_k \to \prod_{i \neq k} (A/\mathfrak{a}_i)$ биективен; поэтому биективна и композиция гомоморфизмов

$$A/\mathfrak{a} \to (A/\mathfrak{a}_k) \times (A/\mathfrak{b}_k) \to (A/\mathfrak{a}_k) \times \prod_{i \neq k} (A/\mathfrak{a}_i) = \prod_{i \in I} (A/\mathfrak{a}_i),$$

которая, очевидно, равна ψ. Этим доказан пункт б). Обратно, предположим, что имеет место условие б), и покажем, что идеалы $\mathfrak{a}_i$ обязательно попарно взаимно просты. Если бы это было не так, то существовал бы идеал $\mathfrak{c} \neq A$, содержащий какие-то два идеала $\mathfrak{a}_i$ и $\mathfrak{a}_j$ при $i \neq j$. Положим $\mathfrak{a}'_h = \mathfrak{a}_h$ для h, отличного от i и от j, и $\mathfrak{a}'_i = \mathfrak{a}'_j = \mathfrak{c}$. Канонический гомоморфизм $\varphi'\colon A \to \prod_{i \in I} (A/\mathfrak{a}'_i)$ может быть представлен как композиция

$$A \xrightarrow{\varphi} \prod_{i \in I} (A/\mathfrak{a}_i) \xrightarrow{f} \prod_{i \in I} (A/\mathfrak{a}'_i),$$

где f — произведение канонических гомоморфизмов $A/\mathfrak{a}_i \to A/\mathfrak{a}'_i$. Совершенно ясно, что гомоморфизм φ' не является сюръективным, ибо проекция образа $\varphi'(A)$ на $(A/\mathfrak{a}'_i) \times (A/\mathfrak{a}'_j)$ равна диагонали произведения $(A/\mathfrak{c}) \times (A/\mathfrak{c})$, которая отлична от всего произведения, так как $\mathfrak{c} \neq A$. Поскольку гомоморфизм f сюръективен, то из доказанного следует, что φ не является сюръективным. Предложение доказано.

Предложение 6. *Пусть $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ — непустое конечное семейство попарно взаимно простых идеалов некоторого кольца A. Обозначим через $\mathfrak{a}$ их пересечение. Тогда для всякого A-модуля M каноническое отображение $M \to \prod_{i \in I} (M/\mathfrak{a}_i M)$ сюръективно и его ядро равно $\mathfrak{a}M$.*

Совершенно ясно, что каноническое отображение модуля M в $\prod_{i \in I} (M/\mathfrak{a}_i M)$ равно нулю на $\mathfrak{a}M$. Следовательно, при переходе к фактормодулю оно определяет некоторый гомоморфизм $\lambda\colon M/\mathfrak{a}M \to \prod_{i \in I} (M/\mathfrak{a}_i M)$. С другой стороны, согласно предложению 5, канонический гомоморфизм $\psi\colon A/\mathfrak{a} \to \prod_{i \in I} (A/\mathfrak{a}_i)$ биективен. Поэтому биективным будет и отображение $1_M \otimes \psi\colon M \otimes (A/\mathfrak{a}) \to M \otimes \prod_{i \in I} (A/\mathfrak{a}_i)$. Но модуль $M \otimes (A/\mathfrak{a})$ можно отождествить с модулем $M/\mathfrak{a}M$, а модуль $M \otimes \prod_{i \in I} (A/\mathfrak{a}_i)$ — с модулем $\prod_{i \in I} M \otimes (A/\mathfrak{a}_i)$, который в свою очередь отождествляется с

$\prod_{i\in I}(M/\mathfrak{a}_i M)$. Непосредственно проверяется, что все эти отождествления переводят гомоморфизм $1_M\otimes\psi$ в гомоморфизм λ, откуда и следует утверждение.

Пример. Пусть K — поле, a_i $(1\leqslant i\leqslant m)$ — попарно различные элементы из K; для каждого i обозначим через g_i некоторый многочлен кольца $K[X]$. Главный идеал $(X-a_i)=\mathfrak{m}_i$ максимален в кольце $K[X]$. Следовательно, для любой системы $(n_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$, состоящей из m целых чисел $\geqslant 1$, идеалы $\mathfrak{m}_i^{n_i}$ попарно взаимно просты. Поэтому из предложения 5 следует существование такого многочлена $f\in K[X]$, что $f(X)\equiv g_i(X)\left(\mathrm{mod}\,(X-a_i)^{n_i}\right)$ для $1\leqslant i\leqslant m$, причем разность двух таких многочленов делится на $\omega(X)=\prod_{i=1}^{m}(X-a_i)^{n_i}$. В том случае, когда числа n_i берутся равными единице, получается задача, явным образом решаемая интерполяционной формулой Лагранжа (*Алгебра*, гл. IV, § 2, п° 4).

Упражнения

¶ 1) а) Показать, что никакая группа G не может быть представлена как объединение двух своих подгрупп, отличных от G. Показать, что для любого множества I, содержащего не меньше двух элементов, группа $G=\mathbf{F}_2^{(I)}$ (прямая сумма) представляется как объединение трех своих подгрупп, отличных от G.

б) Пусть $(H_i)_{i\in I}$ — некоторое конечное семейство подгрупп группы G, каждый элемент H_i которого является подгруппой в G бесконечного индекса. Доказать, что G не может быть представлена как объединение конечного числа левых смежных классов по подгруппам H_i. (Рассуждать с помощью индукции по числу элементов множества I; если существуют два таких индекса i, j, что множество $(H_i:(H_i\cap H_j))$ конечно, то подгруппу H_i можно из рассмотрения исключить; если же, напротив, пересечение $H_i\cap H_j$ имеет бесконечный индекс в H_i для любой пары (i, j) различных индексов, то следует рассмотреть такой индекс k, что H_k — максимальный элемент в множестве подгрупп H_i, и показать, что H_k является объединением конечного числа левых смежных классов по подгруппам $H_k\cap H_i$, где $i\neq k$.)

в) Привести пример коммутативного кольца A и четырех идеалов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$ в нем, таких, что $\mathfrak{a}\not\subset\mathfrak{b}_i$ $(i=1, 2, 3)$, но $\mathfrak{a}=\bigcup_i\mathfrak{b}_i$ (воспользоваться пунктом а)).

2) Пусть A — какое-нибудь, не обязательно коммутативное, кольцо и $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}_1$, ..., $\mathfrak{p}_n$ — двусторонние идеалы в A. Допустим, что $\mathfrak{a}$ содержится в объединении идеалов $\mathfrak{p}_i$ и что все $\mathfrak{p}_i$, за исключением, быть может, одного или двух среди них, являются простыми идеалами (*Алгебра*, гл. VIII, § 8, упражнение 6). Показать, что $\mathfrak{a}$ содержится в одном из $\mathfrak{p}_i$.

3) Пусть для каждого $n\in\mathbf{N}$ через $\mathfrak{m}_n$ обозначен максимальный идеал кольца $A=\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ (прямое произведение), образованный такими отображениями $f\colon\mathbf{N}\to\mathbf{R}$, что $f(n)=0$. Показать, что $\mathfrak{a}=\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ является идеалом кольца A, содержащимся в объединении идеалов $\mathfrak{m}_n$, но не содержащимся ни в одном из этих максимальных идеалов в отдельности.

4) Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал некоторого кольца A и a — такой элемент, что $\mathfrak{p}\subset Aa$, но $a\notin\mathfrak{p}$. Показать, что $\mathfrak{p}=a\mathfrak{p}$.

5) а) Пусть A — нётерово кольцо и $\mathfrak{a}$ — некоторый идеал в A. Показать, что существует конечное число таких простых идеалов $\mathfrak{p}_i \supset \mathfrak{a}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, что $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_r \subset \mathfrak{a}$. (Прийти к противоречию, рассуждая следующим образом: рассмотрим максимальный элемент в множестве тех идеалов, которые содержат $\mathfrak{a}$, отличаются от A и не содержат ни одного конечного произведения простых идеалов данного кольца; с другой стороны, заметим, что если идеал $\mathfrak{b}$ не прост, то существуют такие два идеала $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, которые содержат $\mathfrak{b}$, отличаются от $\mathfrak{b}$ и для которых $\mathfrak{cd} \subset \mathfrak{b}$.) (Ср. с гл. IV.)

б) Привести пример ненётерова кольца A, для которого результат пункта а) неверен. (Взять, например, A равным кольцу непрерывных числовых функций на $[0, 1]$.)

¶ 6) а) Пусть A — кольцо и $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — идеалы в нем, причем $\mathfrak{b}$ — идеал конечного типа. Доказать, что если факторкольца $A/\mathfrak{a}$ и $A/\mathfrak{b}$ нётеровы, то нётерово и факторкольцо $A/\mathfrak{ab}$ (обратить внимание на то, что $\mathfrak{b}/\mathfrak{ab}$ представляет собой $(A/\mathfrak{a})$-модуль конечного типа).

б) Доказать, что если в кольце A всякий простой идеал является идеалом конечного типа, то оно нётерово. (Прийти к противоречию, показав, что в множестве идеалов кольца A, не являющихся идеалами конечного типа, должен был бы существовать максимальный элемент $\mathfrak{c}$, не являющийся по предположению простым; следовательно, можно было бы найти два таких идеала $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{c}$, $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{c}$, которые отличны от $\mathfrak{c}$ и удовлетворяют соотношению $\mathfrak{ab} \subset \mathfrak{c}$; после этого надо применить пункт а).)

7) Пусть $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ — произведение некоторого конечного семейства колец A_i, которые канонически отождествляются с идеалами кольца A. Пусть B — такое подкольцо в A, что $\mathrm{pr}_i B = A_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$.

а) Показать, что если кольца A_i — нётеровы (соответственно артиновы), то B — нётерово (соответственно артиново) кольцо (*Алгебра*, гл. VIII, § 2, упражнение 12).

б) Пусть $\mathfrak{n}_i$ — идеал кольца B, служащий ядром ограничения pr_i на B. Доказать, что любой простой идеал $\mathfrak{p}$ кольца B содержит один из идеалов $\mathfrak{n}_i$ (воспользоваться предложением 1); вывести отсюда, что $\mathrm{pr}_i(\mathfrak{p}) \neq A_i$ для этого индекса. Показать, что если каждое из колец A_i содержит лишь конечное число k_i максимальных идеалов, то B содержит, самое большее, $\sum_{i=1}^{n} k_i$ максимальных идеалов.

в) Пусть $\mathfrak{R}(A)$ и $\mathfrak{R}(B)$ — радикалы колец A и B соответственно. Доказать, что $\mathfrak{R}(B) = B \cap \mathfrak{R}(A)$ Показать, что если каждое из колец A_i содержит лишь конечное число максимальных идеалов, то для любого целого $k > 1$ справедливы равенства $\mathrm{pr}_i((\mathfrak{R}(B))^k) = (\mathfrak{R}(A_i))^k$ для всех i и $(\mathfrak{R}(B))^k = (\mathfrak{R}(A))^k \cap B$ (записать $\mathfrak{R}(B)$ в виде произведения различных максимальных идеалов и заметить, что если $\mathfrak{m}$ — такой максимальный идеал в B, для которого $\mathrm{pr}_i(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}_i$ является максимальным идеалом в A_i, то $\mathrm{pr}_i(\mathfrak{m}^k) = \mathfrak{m}_i^k$).

8) а) Пусть $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — два взаимно простых идеала в кольце A. Показать, что $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} : \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Если $\mathfrak{c}$ — такой идеал в A, что $\mathfrak{ac} \subset \mathfrak{b}$, то $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{b}$.

б) Пусть $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ — два простых идеала, каждый из которых не содержится в другом. Тогда $\mathfrak{p} : \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q} : \mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Привести пример двух простых главных идеалов $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ в кольце $A = K[X, Y]$ (где K — поле), каждый из которых не содержится в другом и которые не являются взаимно простыми.

в) Пусть a — элемент кольца A, не являющийся делителем нуля. Показать, что если главный идеал $\mathfrak{p} = Aa$ прост, то соотношение $\mathfrak{p} = \mathfrak{bc}$, справедливое для некоторых двух идеалов $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ кольца A, влечет за собой одно из равенств $\mathfrak{b} = A$ или $\mathfrak{c} = A$.

9) а) Пусть $(\mathfrak{a}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — некоторое конечное семейство идеалов кольца A, попарно взаимно простых и таких, что ни один из идеалов $\mathfrak{a}_i$ не представим в виде $\mathfrak{bc} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$, где $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ — взаимно простые идеалы. Пусть $(\mathfrak{a}'_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ — другое семейство попарно взаимно простых идеалов кольца A, для которого $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}'_1\mathfrak{a}'_2 \ldots \mathfrak{a}'_m$. Доказать, что $m \leqslant n$ и если $m = n$, то существует такая перестановка π множества $[1, n]$, что $\mathfrak{a}'_i = \mathfrak{a}_{\pi(i)}$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ (воспользоваться предложением 5, а также упражнением 1г) из *Алгебры*, гл. VIII, § 1).

б) Пусть A — нётерово кольцо. Показать, что любой идеал $\mathfrak{a}$ кольца A равен произведению конечного числа попарно взаимно простых идеалов, каждый из которых уже не является произведением двух взаимно простых идеалов. (Прийти к противоречию, рассмотрев максимальный элемент в множестве идеалов, не обладающих этим свойством.)

10) Привести пример кольца A и бесконечного семейства максимальных идеалов $(\mathfrak{m}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ в A, таких, что $\bigcap_n \mathfrak{m}_n = 0$, а каноническое отображение $A \to \prod_n (A/\mathfrak{m}_n)$ не сюръективно.

11) Пусть A — некоторое, не обязательно коммутативное кольцо. Пусть $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — два двусторонних идеала в A, для которых $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$. Показать, что $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{ab} + \mathfrak{ba}$. Привести пример, в котором $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \neq \mathfrak{ab}$ (рассмотреть кольцо нижних треугольных матриц порядка 2 над некоторым полем).

§ 2. Кольца частных и модули частных

1. Определение колец частных

Определение 1. *Пусть A — некоторое кольцо. Подмножество $S \subset A$ называется мультипликативным, или мультипликативной системой, если произведение любого конечного множества элементов из S снова принадлежит S.*

Требование, заключенное в этом определении, эквивалентно тому, что $1 \in S$[1]) и что произведение любых двух элементов из S принадлежит S.

Примеры. 1) Для любого элемента $a \in A$ множество степеней a^n, где $n \in \mathbf{N}$, образует мультипликативную систему.

2) Пусть $\mathfrak{p}$ — некоторый идеал кольца A. Для того чтобы множество $A - \mathfrak{p}$ было мультипликативным, необходимо и достаточно, чтобы идеал $\mathfrak{p}$ был *простым*.

3) Множество тех элементов кольца A, которые не являются делителями нуля, образует мультипликативную систему в этом кольце.

4) Если S и T — два мультипликативных подмножества кольца A, то множество ST произведений st, где $s \in S$, $t \in T$, также является мультипликативным.

[1]) Так как 1 есть «произведение» пустого множества элементов из S. — *Прим. перев.*

5) Пусть $\mathfrak{S}$ — *фильтрующееся* множество (относительно отношения $\subset$) мультипликативных систем заданного кольца A. Тогда множество $T = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} S$ является мультипликативным, так как любые два элемента из T принадлежат некоторому множеству $S \in \mathfrak{S}$ и, следовательно, их произведение принадлежит T.

6) Любое пересечение мультипликативных множеств из A является мультипликативной системой.

Для любого множества S кольца A существует мультипликативная система этого же кольца, содержащая S, например само A. Пересечение всех таких систем является наименьшей мультипликативной системой, содержащей подмножество S. Принято говорить, что эта система *порождается* множеством S. Совершенно очевидно, что указанная система замкнута относительно взятия любого конечного произведения элементов из множества S.

Предложение 1. *Пусть A — некоторое кольцо и S — его подмножество. Существуют кольцо A' и гомоморфизм h кольца A в A', обладающие следующими свойствами:*

1° *элементы множества $h(S)$ обратимы в A';*

2° *для любого гомоморфизма u из A в любое кольцо B, при котором элементы из $u(S)$ обратимы в B, существует, и притом единственный, гомоморфизм u' из A' в кольцо B, такой, что $u = u' \circ h$.*

Другими словами, пара (A', h) является решением задачи об универсальном отображении (*Теория множеств*, гл. IV, § 3, n° 1) при следующих данных: рассматриваемая структура Σ есть структура кольца, морфизмами служат гомоморфизмы колец, а α-отображения — это такие гомоморфизмы кольца A в какое-либо кольцо, что образ множества S при любом таком гомоморфизме состоит из обратимых элементов. Напомним (loc. cit.), что если (A', h) и (A'_1, h_1) — решения указанной задачи, то существует *единственный изоморфизм* j: $A' \to A'_1$, при котором $h_1 = j \circ h$.

Пусть $\bar{S}$ — мультипликативная система кольца A, порожденная множеством S. Совершенно ясно, что каждое решение указанной выше задачи об универсальном отображении является также решением задачи об универсальном отображении, в которой S заменено на $\bar{S}$; верно и обратное.

Рассмотрим в множестве $A \times \bar{S}$ следующее отношение между элементами (a, s), (a', s'):

«Существует такое $t \in \bar{S}$, что $t(sa' - s'a) = 0$». (1)

Это отношение является отношением эквивалентности. Действительно, очевидно, что оно рефлексивно и симметрично. Оно также транзитивно, так как если $t(sa' - s'a) = 0$ и $t'(s'a'' - s''a') = 0$, то $tt's'(sa'' - s''a) = 0$ и $tt's' \in \bar{S}$. Пусть A' — фактормножество множества $A \times \bar{S}$ относительно введенного отношения эквивалентности. Для всякой пары $(a, s) \in A \times \bar{S}$ обозначим через a/s канонический образ элемента (a, s) в A' и положим $h(a) = a/1$ для всякого $a \in A$. Сейчас мы увидим, что множество A' можно наделить структурой кольца таким образом, чтобы пара (A', h) удовлетворяла поставленным условиям.

Пусть $x = a/s$ и $y = b/t$ — два элемента множества A'. Элементы $(ta + sb)st$ и ab/st зависят только от x и y: действительно, если $x = a'/s'$; то, по предположению, существует такой элемент $r \in \bar{S}$, что $r(s'a - sa') = 0$, откуда

$$r(s't(ta + sb) - st(ta' - s'b)) = 0 \quad \text{и} \quad r(s'tab - sta'b) = 0.$$

Непосредственно проверяется, что законы композиции $(x, y) \to x + y = (ta + sb)/st$ и $(x, y) \to xy = ab/st$ определяют на A' структуру коммутативного кольца, при которой $0/1$ является нейтральным элементом относительно сложения, а $1/1$ — единичным элементом. С другой стороны, очевидно, что h — гомоморфизм колец и образ $s/1$ всякого элемента $s \in S$ обратим в кольце A': обратным служит элемент $1/s$. Наконец, пусть B — кольцо и u: $A \to B$ — такой гомоморфизм, что элементы из $u(S)$ обратимы в B. Тогда существует, и притом единственное, отображение u': $A' \to B$, для которого

$$u'(a/s) = u(a) \cdot (u(s))^{-1} \qquad (a \in A,\ s \in \bar{S}). \tag{2}$$

В самом деле, если $a/s = a'/s'$, то существует такой элемент $t \in \bar{S}$, что $t(sa' - s'a) = 0$, откуда $u(t)(u(s)u(a') - u(s')u(a)) = 0$; но так как элементы $u(t)$, $u(s)$ и $u(s')$ обратимы, то справедливо равенство $u(a)(u(s))^{-1} = u(a')(u(s'))^{-1}$. Немедленно проверяется, что u' — гомоморфизм относительно сложения и умножения. Наконец, очевидно, что $u' \circ h = u$ и что u' — единственный гомоморфизм, удовлетворяющий этому соотношению, ибо из него следуют равенства $u'(a/s) = u'((a/1)(1/s)) = u'(1/s)u'(a/1) = u'(1/s)u(a)$ и $1 = u'(1/1) = u'(s/1)u'(1/s) = u(s)u'(1/s)$, откуда получается формула (2), что и требовалось доказать.

Определение 2. *Пусть A — некоторое кольцо, S — его подмножество и $\bar{S}$ — мультипликативная система, порожденная множеством S. Кольцом частных кольца A по подмножеству S называется фактормножество множества $A \times \bar{S}$ относительно*

отношения эквивалентности (1), *наделенное структурой кольца с помощью равенств*

$$(a/s)+(b/t)=(ta+sb)/st \quad и \quad (a/s)(b/t)=(ab)/(st),$$

где a, $b\in A$ *и* s, $t\in\bar{S}$; *это кольцо обозначается через* $A[S^{-1}]$. *Гомоморфизм* $a\to a/1$ *кольца* A *в* $A[S^{-1}]$ *называется каноническим отображением, с его помощью кольцо частных* $A[S^{-1}]$ *превращается в* A*-алгебру.*

В этой главе только что указанное каноническое отображение мы будем чаще всего обозначать через i_A^S. Доказательство предложения 1 показывает, что пара $(A[S^{-1}], i_A^S)$ обладает свойствами, сформулированными в этом предложении.

Замечания. 1) Совершенно ясно, что $A[\bar{S}^{-1}]=A[S^{-1}]$.

2) Любые два элемента кольца $A[S^{-1}]$ всегда могут быть записаны в виде дробей a/s и a'/s (где a, $a'\in A$ и $s\in\bar{S}$) *с одним и тем же* «знаменателем» s, так как если b/t и b'/t' — элементы из $A[S^{-1}]$, то $b/t=bt'/tt'$ и $b'/t'=b't/tt'$.

3) Ядро гомоморфизма i_A^S образовано теми элементами $a\in A$, для каждого из которых существует некоторый элемент $s\in\bar{S}$, удовлетворяющий равенству $sa=0$. Для *инъективности* отображения i_A^S необходимо и достаточно, чтобы множество S *не содержало ни одного делителя нуля в* A.

4) Если в множество S входит некоторый *нильпотентный* элемент, то $0\in\bar{S}$ и кольцо частных $A[S^{-1}]$ *равно* 0. Это немедленно следует из определения 2.

5) Для того чтобы гомоморфизм i_A^S был *биективным*, необходимо и достаточно, чтобы каждый элемент $s\in S$ был *обратим* в кольце A: очевидно, это условие необходимо, так как $s/1$ — обратимый элемент кольца $A[S^{-1}]$; условие достаточно, потому что для любого $t\in\bar{S}$ элемент t обратим в кольце A и в кольце $A[S^{-1}]$ имеет место равенство $a/t=at^{-1}/1$; следовательно, гомоморфизм i_A^S сюръективен, а в силу замечания 3 он к тому же и инъективен. Поэтому кольца A и $A[S^{-1}]$ можно отождествить с помощью i_A^S.

Пример. 7) Если R — множество тех элементов, которые не являются делителями нуля в кольце A, то кольцо $A[R^{-1}]$ совпадает с тем, что мы называли раньше *кольцом частных кольца* A (*Алгебра*, гл. I, § 9, n° 4). Во избежание путаницы мы будем в дальнейшем называть это *кольцо полным кольцом частных* кольца A. В частности, если A — целостное кольцо, то $A[R^{-1}]$ — *поле частных* кольца A (loc. cit.).

Предложение 2. *Пусть* A, B — *два кольца*, S — *некоторое подмножество в* A, T — *некоторое подмножество в* B *и* f — *такой*

гомоморфизм кольца A в B, что $f(S) \subset T$. Тогда существует, и притом единственный, гомоморфизм f' из $A[S^{-1}]$ в $B[T^{-1}]$, при котором $f'(a/1) = f(a)/1$ для любого $a \in A$.

Предположим дополнительно, что T содержится в мультипликативной системе кольца B, порожденной множеством $f(S)$. Тогда, если f — сюръективный (соответственно *инъективный*) *гомоморфизм, то таков же и гомоморфизм f'.*

Первое утверждение допускает следующую переформулировку: существует, и притом единственный, гомоморфизм f': $A[S^{-1}] \to B[T^{-1}]$, для которого диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle i_A^S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_B^T} \\ A[S^{-1}] & \xrightarrow{f'} & B[T^{-1}] \end{array}$$

коммутативна.

Но из включения $f(S) \subset T$ следует, что элемент $i_B^T(f(s))$ обратим в кольце $B[T^{-1}]$ для любого $s \in S$, так что достаточно применить предложение 1 к композиции $i_B^T \circ f$. Из (2) немедленно получается, что для $a \in A$ и $s \in \bar{S}$ (через $\bar{S}$ обозначена мультипликативная система кольца A, порожденная множеством S) имеет место равенство

$$f'(a/s) = f(a)/f(s). \tag{3}$$

Допустим теперь, что множество T содержится в мультипликативной системе, порожденной множеством $f(S)$, т. е. в мультипликативной системе $f(\bar{S})$. В таком случае из формулы (3) следует, что если f — сюръективный гомоморфизм, то сюръективен и гомоморфизм f'. Пусть, далее, гомоморфизм f инъективен и a/s — произвольный элемент ядра гомоморфизма f'. Поскольку мультипликативная система, порожденная множеством T, равна $f(\bar{S})$, существует такой элемент $s_1 \in \bar{S}$, что $f(s_1)f(a) = 0$, откуда $f(s_1 a) = 0$, и, таким образом, $s_1 a = 0$, поскольку f — инъективный гомоморфизм. Следовательно, $a/s = 0$, что и доказывает инъективность гомоморфизма f'.

Замечание. 6) Если элементы множества T обратимы в кольце B, то кольцо частных $B[T^{-1}]$ отождествляется с B посредством изоморфизма i_T^B, а f' в этом случае совпадает с единственным гомоморфизмом u' кольца $A[S^{-1}]$ в кольцо B, для которого $u' \circ i_A^S = f$.

Следствие 1. *Пусть A — кольцо, S — его подмножество, u — некоторый инъективный гомоморфизм кольца A в какое-то кольцо B, при котором элементы множества $u(S)$ обратимы*

в B. Тогда единственный гомоморфизм u' из $A[S^{-1}]$ в B, удовлетворяющий равенству $u' \circ i_A^S = u$, инъективен.

Это немедленно вытекает из предложения 2 и замечания 6.

Следствие 2. *Пусть A — некоторое кольцо и S, T — два таких его подмножества, что $S \subset T$. Тогда существует, и притом единственный, гомоморфизм $i_A^{T,S}$ кольца $A[S^{-1}]$ в $A[T^{-1}]$, для которого $i_A^T = i_A^{T,S} \circ i_A^S$.*

Для любого $a \in A$ гомоморфизм $i_A^{T,S}$ переводит элемент $a/s \in A[S^{-1}]$ в элемент $a/s \in A[T^{-1}]$.

Замечание. 7) Следует подчеркнуть, что если инъективен гомоморфизм i_A^T, то $i_A^{T,S}$ также инъективен (следствие 1). Это используется в том случае, когда T совпадает с множеством R всех не являющихся делителями 0 элементов кольца A; тогда можно отождествить кольцо $A[S^{-1}]$ с подкольцом полного кольца частных $A[R^{-1}]$, порожденным кольцом A и элементами, обратными в $A[R^{-1}]$ к элементам из S.

Следствие 3. *Пусть A, B, C — три кольца, S* (соответственно *T, U*) *— мультипликативное подмножество в A* (соответственно *в B, C*), *$f\colon A \to B$ и $g\colon B \to C$ — пара гомоморфизмов и $h\colon A \to C$ — их композиция $g \circ f$. Предположим, что $f(S) \subset T$, $g(T) \subset U$. Наконец, обозначим через $f'\colon A[S^{-1}] \to B[T^{-1}]$, $g'\colon B[T^{-1}] \to C[U^{-1}]$, $h'\colon A[S^{-1}] \to C[U^{-1}]$ гомоморфизмы, соответствующие гомоморфизмам f, g, h. Тогда $h' = g' \circ f'$.*

Это сразу вытекает из определений.

В частности, если S, T, U — такие три мультипликативные системы кольца A, что $S \subset T \subset U$, то $i_A^{U,S} = i_A^{U,T} \circ i_A^{T,S}$.

Следствие 4. *Пусть S — некоторое подмножество кольца A и B — подкольцо в $A[S^{-1}]$, содержащее $i_A^S(A)$; обозначим через S' множество $i_A^S(S)$, а через j — каноническое вложение кольца B в $A[S^{-1}]$. Тогда единственный гомоморфизм $g\colon B[S'^{-1}] \to A[S^{-1}]$, для которого $g \circ i_B^{S'} = j$, является изоморфизмом.*

Отображение g инъективно в силу следствия 1; кольцо $g(B[S'^{-1}])$ содержит кольцо $i_A^S(A)$ и элементы, обратные к элементам из S'. Поэтому оно равно кольцу $A[S^{-1}]$.

Когда кольцо A целостное и $0 \notin S$, обозначение $A[S^{-1}]$ имеет тот же смысл, что и в *Алгебре*, гл. IV, § 2, п° 1. Кроме того, если множество S *мультипликативно*, то $A[S^{-1}]$ совпадает с множеством, которое в *Алгебре*, гл. I, § 1, п° 1, обозначалось через $S^{-1}A$.

В случае когда S есть мультипликативное подмножество, мы будем в дальнейшем обозначать через $S^{-1}A$ кольцо частных

$A[S^{-1}]$. *Если S является дополнением к простому идеалу $\mathfrak{p}$ кольца A, то вместо $S^{-1}A$ мы будем использовать обозначение $A_{\mathfrak{p}}$.*

Если A — целостное кольцо и $0 \notin S$, то $S^{-1}A$ всегда может быть отождествлено с некоторым *подкольцом поля частных* кольца A, содержащим A (замечание 7).

2. *Модули частных*

Канонический гомоморфизм $i_A^S : A \to A[S^{-1}]$, определенный в n° 1, позволяет рассматривать всякий $A[S^{-1}]$-модуль как A-модуль.

Предложение 3. *Пусть A — некоторое кольцо, S — его подмножество и M — некоторый A-модуль. Обозначим через M' A-модуль $M \otimes_A A[S^{-1}]$, а через f — канонический A-гомоморфизм $x \to x \otimes 1$ модуля M в модуль M'. Тогда*

1° *при любом $s \in S$ гомотетия $z \to sz$ модуля M' является биективным гомоморфизмом;*

2° *пусть N — такой A-модуль, что для любого $s \in S$ его гомотетия $y \to sy$ является биективным гомоморфизмом. В этом случае для любого гомоморфизма u модуля M в модуль N существует, и притом единственный, гомоморфизм u' модуля M' в модуль N, для которого $u = u' \circ f$.*

Другими словами, пара (M', f) представляет собой решение задачи *об универсальном отображении* (*Теория множеств*, гл. IV, § 3, n° 1) при следующих данных: структура Σ — это структура A-модуля, в котором гомотетии умножения на элементы из S биективны, морфизмы — это гомоморфизмы A-модулей, а α-отображениями также служат гомоморфизмы A-модулей.

Для любого A-модуля N и произвольного элемента $a \in A$ обозначим через h_a гомотетию $y \to ay$ в N; отображение $a \to h_a$ является, таким образом, кольцевым гомоморфизмом кольца A в $\mathrm{End}_A(N)$. Утверждение о биективности гомоморфизма h_a означает *обратимость* элемента h_a в кольце $\mathrm{End}_A(N)$. Предположим, что для любого $s \in S$ элемент h_s обратим в $\mathrm{End}_A(N)$; тогда элементы h_a, $a \in A$, и элементы, обратные к h_s, $s \in S$, порождают в кольце $\mathrm{End}_A(N)$ *коммутативное подкольцо* B, а гомоморфизм $a \to h_a$ из A в B таков, что образы элементов из S оказываются обратимыми. Следовательно (n° 1, предложение 1), существует такой единственный гомоморфизм h' кольца $A[S^{-1}]$ в B, что $h'(a/s) = h_a(h_s)^{-1}$. Как известно (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 1, n° 14), этот гомоморфизм определяет на N такую структуру $A[S^{-1}]$-модуля, для которой $(a/s) \cdot y = (h_s)^{-1}(a \cdot y)$; индуцирован-

ная этой структурой посредством гомоморфизма i_A^S структура A-модуля на N совпадает со структурой, заданной вначале.

Обратно, если N — какой-либо $A[S^{-1}]$-модуль, рассматриваемый как A-модуль с помощью гомоморфизма i_A^S, то гомотетии $y \to sy$, $s \in S$, биективны, так как отображение $y \to (1/s)y$ является обратным для гомоморфизма $y \to sy$. Если описанным выше способом перейти от структуры A-модуля к структуре $A[S^{-1}]$-модуля на N, то получится структура, заданная вначале. Таким образом, имеется *каноническое взаимно однозначное соответствие между $A[S^{-1}]$-модулями и A-модулями, в которых гомотетии умножения на элементы из множества S биективны.* Кроме того, если N, N' — два A-модуля, обладающие этим свойством, то всякий гомоморфизм A-модулей u: $N \to N'$ сохраняет и структуры $A[S^{-1}]$-модулей на N и N', так как для любого $y \in N$ и произвольного $s \in S$ можно записать $u(y) = u(s \cdot (1/s)y) = s \cdot u((1/s)y)$, откуда $u((1/s)y) = (1/s)u(y)$; обратное утверждение очевидно.

Учитывая предыдущие рассмотрения, мы видим, что формулировка предложения 3 есть не что иное, как характеризация модуля, получаемая из M посредством *расширения скаляров до кольца* $A[S^{-1}]$ (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 5, n° 1, remarque 1) [1]).

Определение 3. *Пусть A — кольцо, S — какое-либо подмножество в нем, $\bar{S}$ — мультипликативная система кольца A, порожденная множеством S, и M — некоторый A-модуль. Модулем частных модуля M относительно множества S называется $A[S^{-1}]$-модуль $M \otimes_A A[S^{-1}]$; он обозначается через $M[S^{-1}]$ или через $\bar{S}^{-1}M$.*

Каноническое отображение $m \to m \otimes 1$ модуля M в $M[S^{-1}]$ в этой главе мы будем чаще всего обозначать через i_M^S.

Замечания. 1) Совершенно очевидно, что $M[\bar{S}_{-1}] = M[S^{-1}]$.

2) Для $m \in M$ и $s \in \bar{S}$ обозначим, как и ранее, через m/s элемент $m \otimes (1/s)$ модуля $M[S^{-1}]$. Любой элемент из $M[S^{-1}]$ может быть записан в таком виде, потому что он записывается в форме $\sum_i m_i \otimes (a_i/s)$, где $m_i \in M$, $a_i \in A$, $s \in S$ (n° 1, замечание 2) и $m_i \otimes (a_i/s) = (a_i m_i) \otimes (1/s)$, следовательно,

$$\sum_i m_i \otimes (a_i/s) = m \otimes (1/s), \text{ где } m = \sum_i a_i m_i.$$

Отметим такие равенства:

$$(m/s) + (m'/s') = (s'm + sm')/(ss'), \tag{4}$$

[1]) См. также *Алгебра*, гл. III, § 2, n° 1, замечание 1. — *Прим. перев.*

$$(a/s)(m/s') = (am)/(ss'), \qquad (5)$$

в которых m, $m' \in M$, $a \in A$ и s, $s' \in S$.

3) Когда множество S является дополнением простого идеала $\mathfrak{p}$ в кольце A, мы будем писать $M_{\mathfrak{p}}$ вместо $S^{-1}M$.

4) Пусть M — некоторый $A[S^{-1}]$-модуль. Когда он рассматривается как A-модуль, гомоморфизм i_M^S является *биективным*, так как пара, состоящая из модуля M и тождественного отображения 1_M, является тривиальным решением задачи об универсальном отображении, решаемой парой $M[S^{-1}]$ и i_M^S. Таким образом, модули M и $M[S^{-1}]$ в этом случае можно отождествить.

Предложение 4. *Пусть S — мультипликативное подмножество кольца A и M — некоторый A-модуль. Для равенства $m/s = 0$ $(m \in M,\ s \in S)$ необходимо и достаточно, чтобы существовал такой элемент $s' \in S$, что $s'm = 0$.*

Если элемент $s' \in S$ таков, что $s'm = 0$, то, очевидно, $m/s = (s'm)/(s's) = 0$. Обратно, предположим, что $m/s = 0$. Так как элемент $1/s$ обратим в кольце $S^{-1}A$, имеет место равенство $m/1 = 0$. Для всякого A-подмодуля P в $S^{-1}A$, содержащего 1, обозначим через $\beta(P, m)$ образ элемента $(m, 1)$ при каноническом отображении $M \times P$ в $M \otimes_A P$. Следовательно, $\beta(S^{-1}A, m) = 0$. Как известно (*Algèbre*, chap. II, 3e éd., § 6, n° 7, corollaire 4 de la proposition 12), в $S^{-1}A$ существует такой подмодуль P конечного типа, который содержит 1 и для которого $\beta(P, m) = 0$. Для любого $t \in S$ обозначим через A_t множество элементов вида a/t, где $a \in A$. Так как модуль P имеет конечный тип, существует элемент $t \in S$, для которого $P \subset A_t$ (n° 1, замечание 2), откуда $\beta(A_t, m) = 0$. Отображение $a \to a/t$ из A в A_t сюръективно; пусть B — его ядро. Этим отображением определяется сюръективное отображение h: $M \otimes_A A \to M \otimes_A A_t$, ядро которого равно BM (здесь M отождествлено с $M \otimes A$). Из равенства $\beta(A_t, m) = h(tm)$ следует, что элемент tm имеет вид $\sum_{i=1}^{r} b_i m_i$, где $b_i \in B$, $m_i \in M$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Так как $b_i/t = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant r$, то существует такой элемент $t' \in S$, что $t'b_i = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant r$, откуда $t'tm = 0$. Этим доказано предложение 4.

Следствие 1. *Для выполнения равенства $m/s = m'/s'$ в модуле $S^{-1}M$ необходимо и достаточно, чтобы существовал элемент $t \in S$, для которого $t(s'm - sm') = 0$.*

Действительно, $(m/s) - (m'/s') = (s'm - sm')/ss'$.

Следствие 2. *Пусть M — некоторый A-модуль конечного типа. Равенство $S^{-1}M = 0$ выполняется в том и только том случае, когда существует элемент $s \in S$, для которого $sM = 0$.*

Без всяких предположений о модуле M ясно, что из соотношения $sM = 0$ при некотором $s \in S$ следует равенство $S^{-1}M = 0$. Обратно, предположим, что $S^{-1}M = 0$, и пусть $(m_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — система образующих в M. Тогда элементы $m_i/1$ порождают $S^{-1}A$-модуль $S^{-1}M$, в силу чего утверждение о справедливости равенства $S^{-1}M = 0$ эквивалентно утверждению о справедливости равенств $m_i/1 = 0$ при $1 \leqslant i \leqslant n$. Согласно предложению 4, существуют такие $s_i \in S$, что $s_i m_i = 0$, и, положив $s = s_1 s_2 \ldots s_n \in S$, мы получаем $sm_i = 0$ для всех i. Следовательно, $sM = 0$.

Следствие 3. *Пусть M — некоторый A-модуль конечного типа. Для того чтобы идеал $\mathfrak{a}$ кольца A удовлетворял равенству $\mathfrak{a}M = M$, необходимо и достаточно, чтобы существовал элемент $a \in \mathfrak{a}$, для которого $(1 + a)M = 0$.*

Совершенно ясно, что из $(1 + a)M = 0$ следует равенство $M = \mathfrak{a}M$. Для доказательства обратного мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма 1. *Для любого идеала $\mathfrak{a} \subset A$ множество S элементов вида $1 + a$, где $a \in \mathfrak{a}$, является мультипликативным в A, а множество $\mathfrak{a}'$ элементов кольца $S^{-1}A$ вида a/s, где $a \in \mathfrak{a}$ и $s \in S$, представляет собой некоторый идеал, содержащийся в радикале кольца $S^{-1}A$.*

Первое утверждение очевидно, как и то, что $\mathfrak{a}'$ — идеал кольца $S^{-1}A$. С другой стороны, $(1/1) + (a/s) = (s + a)/s$ и, кроме того, $s + a \in S$ для $s \in S$ и $a \in \mathfrak{a}$ в силу определения множества S. Следовательно, $(1/1) + (a/s)$ является обратимым элементом в $S^{-1}A$ для всякого $a/s \in \mathfrak{a}'$, чем и завершается доказательство леммы (*Алгебра*, гл. VIII, § 6, п° 3, теорема 1).

Если теперь мы положим $N = S^{-1}M$, то ясно, что N является $S^{-1}A$-модулем конечного типа. Если $\mathfrak{a}M = M$, то $\mathfrak{a}'N = N$ и, следовательно, $N = 0$ в силу леммы Накаямы (*Алгебра*, гл. VIII, § 6, п° 3, следствие предложения 6). Рассматриваемое следствие вытекает, таким образом, из следствия 2.

Предложение 5. *Пусть A, B — два кольца, S — мультипликативное подмножество в A, T — мультипликативное подмножество в B и f — гомоморфизм кольца A в B, для которого $f(S) \subset T$.*

Пусть, далее, M — некоторый A-модуль, N — какой-либо B-модуль и u — некоторое A-линейное отображение модуля M в N. Тогда существует, и притом единственное, $S^{-1}A$-линейное отображение u' модуля $S^{-1}M$ в $T^{-1}N$, такое, что $u'(m/1) = u(m)/1$ при любом $m \in M$.

Действительно, отображение $i_N^T \cdot u$ модуля M в модуль $T^{-1}N$ A-линейно. Кроме того, если $s \in S$, то $f(s) \in T$ и,

следовательно, гомотетия умножения на $f(s)$ модуля $T^{-1}N$ биективна. Существование и единственность отображения u' получаются теперь из предложения 3. Для элементов $m \in M$ и $s \in S$ справедливо равенство

$$u'(m/s) = u(m)/f(s). \tag{6}$$

Сохраняя прежние обозначения, будем считать, что C — некоторое третье кольцо, U — мультипликативное подмножество в C, g — такой гомоморфизм кольца B в C, что $g(T) \subset U$, P — какой-нибудь C-модуль, v — некоторое B-линейное отображение модуля N в P и v' — отображение модуля $T^{-1}N$ в $U^{-1}P$, ассоциированное с v и являющееся $T^{-1}B$-линейным. В таком случае имеет место равенство

$$(v \circ u)' = v' \circ u', \tag{7}$$

в котором слева записано A-линейное отображение $S^{-1}M \to U^{-1}P$, ассоциированное с $v \circ u$. Аналогичным образом, если u_1 — другое A-линейное отображение из M в N, то

$$(u + u_1)' = u' + u_1', \tag{8}$$

причем здесь слева стоит A-линейное отображение $S^{-1}M \to T^{-1}N$, ассоциированное с $u + u_1$.

Замечание. 5) Если в предложении 5 положить $B = A$, $T = S$ и $f = 1_A$, то сразу же становится ясным, что u' — это не что иное, как отображение $u \otimes 1$: $M \otimes S^{-1}A \to N \otimes S^{-1}A$. Отныне мы будем обозначать его через $S^{-1}u$; когда S является дополнением к простому идеалу $\mathfrak{p}$ кольца A, мы будем писать $u_{\mathfrak{p}}$ вместо $S^{-1}u$.

Предложение 6. *Пусть f — гомоморфизм кольца A в кольцо B и S — некоторое мультипликативное подмножество в A. Тогда существует, и притом единственное, отображение j модуля $(f(S))^{-1}B$ в модуль частных $S^{-1}B$ (где B рассматривается как A-модуль относительно гомоморфизма f), такое, что $j(b/f(s)) = b/s$, где $b \in B$, $s \in S$. Если f': $S^{-1}A \to (f(S))^{-1}B$ — гомоморфизм колец, ассоциированный с f* (n° 1, предложение 2), *то $j \circ f' = S^{-1}f$. Отображение j является изоморфизмом $(f(S))^{-1}B$ на $S^{-1}B$ как относительно структуры $S^{-1}A$-модулей, определенной на $(f(S))^{-1}B$ с помощью f', так и относительно структуры B-модулей, получающейся на $S^{-1}B$ из определения $S^{-1}B = (S^{-1}A) \otimes_A B$.*

Если b, b' — элементы из B, s, s' — элементы из S, то условия $b/s = b'/s'$ и $b/f(s) = b'/f(s')$ эквивалентны в соответствии со следствием 1 из предложения 4. Благодаря этому устанавливается существование отображения j и его биективность. Что

же касается единственности j, то она очевидна. Ясно, что j является изоморфизмом аддитивных групп. Если $a \in A$, $b \in B$, $s \in S$, $t \in S$, то

$$(a/s)\cdot(b/f(t)) = f'(a/s)\,(b/f(t)) = (f(a)/f(s))\,(b/f(t)) = (f(a)\,b)/f(st),$$

откуда следует, что отображение j $(S^{-1}A)$-линейно. Понятно, что $j \circ f' = S^{-1}f$. Наконец, если $b \in B$, $b' \in B$, $s \in S$, то $j(b(b'/f(s))) = j(bb'/f(s)) = bb'/s = b(b'/s)$, что и доказывает последнее утверждение.

Отображение j из предложения 6 называется *каноническим изоморфизмом* $(f(S))^{-1}B$ на $S^{-1}B$. Обычно с помощью j эти два множества отождествляют; в этом случае $f' = S^{-1}f$, $i_B^S = i_B^{f(S)}$.

3. *Изменение мультипликативной системы*

Пусть A — кольцо, S — мультипликативное подмножество в A и M — некоторый A-модуль. Если T — мультипликативное подмножество в A, содержащее S, то из предложения 5 n°2 следует, что существует, и притом единственное, $(S^{-1}A)$-линейное отображение $i_M^{T,S}\colon S^{-1}M \to T^{-1}M$, такое, что $i_M^T = i_M^{T,S} \circ i_M^S$; отображение $i_M^{T,S}$ переводит элемент m/s модуля $S^{-1}M$ в элемент m/s модуля $T^{-1}M$. Сразу же проверяется, что $i_M^{T,S} = i_A^{T,S} \otimes 1_M$. Если U — третье мультипликативное подмножество в A, для которого $T \subset U$, то, следовательно, $i_M^{U,S} = i_M^{U,T} \circ i_M^{T,S}$; кроме того, если $u\colon M \to N$ — любой гомоморфизм A-модулей, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}M & \xrightarrow{S^{-1}u} & S^{-1}N \\ {\scriptstyle i_M^{T,S}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_N^{T,S}} \\ T^{-1}M & \xrightarrow[T^{-1}u]{} & T^{-1}N \end{array}$$

коммутативна.

Предложение 7. *Пусть A — кольцо, S, T — два мультипликативных подмножества в A. Положим $T' = i_A^S(T)$.*

(i) *Существует, и притом единственный, изоморфизм j кольца $(ST)^{-1}A$ на кольцо $T'^{-1}(S^{-1}A)$, для которого коммутативна следующая диаграмма*:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_A^S} & S^{-1}A \\ {\scriptstyle i_A^{ST}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_{S^{-1}A}^{T'}} \\ (ST)^{-1}A & \xrightarrow[j]{} & T'^{-1}(S^{-1}A) \end{array}$$

(ii) *Пусть M — некоторый A-модуль. Существует $(ST)^{-1}A$-изоморфизм k из $(ST)^{-1}A$-модуля $(ST)^{-1}M$ на $T'^{-1}(S^{-1}A)$-модуль $T'^{-1}(S^{-1}M)$, для которого коммутативна следующая диаграмма:*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{i_M^S} & S^{-1}M \\ {\scriptstyle i_M^{ST}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_{S^{-1}M}^{T'}} \\ (ST)^{-1}M & \xrightarrow[k]{} & T'^{-1}(S^{-1}M) \end{array}$$

(i) Воспользуемся определением кольца $(ST^{-1})A$ как решения задачи об универсальном отображении. Пусть B — некоторое кольцо и f — такой гомоморфизм кольца A в кольцо B, что $f(ST)$ состоит из обратимых элементов. Поскольку в этом случае $f(S)$ тем более состоит из обратимых элементов, существует, и притом единственный, гомоморфизм f': $S^{-1}A \to B$, для которого $f = f' \circ i_A^{S'}$ (n° 1, предложение 1). Для любого $t \in T$ элемент $f'(i_A^S(t)) = f(t)$ обратим по предположению, в кольце B; следовательно, $f'(T')$ состоит из обратимых элементов. Согласно предложению 1 n° 1, существует, и притом единственный, гомоморфизм f'' кольца $T'^{-1}(S^{-1}A)$ в кольцо B, такой, что $f' = f'' \circ i_{S^{-1}A}^{T'}$, откуда $f = f'' \circ u$, если положить $u = i_{S^{-1}A}^{T'} \circ i_A^S$.

Кроме того, если f_1'': $T'^{-1}(S^{-1}A) \to B$ — второй такой гомоморфизм, что $f_1'' \circ u = f$, то $(f_1'' \circ i_{S^{-1}A}^{T'}) \circ i_A^S = (f'' \circ i_{S^{-1}A}^{T'}) \circ i_A^S$, откуда $f_1'' \circ i_{S^{-1}A}^{T'} = f'' \circ i_{S^{-1}A}^{T'}$ и, следовательно, $f_1'' = f''$.

Так как образы элементов из ST в кольце $T'^{-1}(S^{-1}A)$ при гомоморфизме u обратимы, то пара $(T'^{-1}(S^{-1}A), u)$ представляет собой решение задачи об универсальном отображении (применительно к A и ST), рассмотренной в n° 1. Это доказывает существование и единственность изоморфизма j.

(ii) Доказательство предоставляется читателю, так как оно полностью аналогично доказательству пункта (i), только на этот раз используется предложение 3 n° 2.

Предложение 8. *Пусть A — кольцо, S, T — мультипликативные системы в нем, причем $S \subset T$. Следующие свойства эквивалентны:*

а) *гомоморфизм $i_A^{T,S}$: $S^{-1}A \to T^{-1}A$ биективен;*

б) *для любого A-модуля M гомоморфизм $i_M^{T,S}$: $S^{-1}M \to T^{-1}M$ биективен;*

в) *для всякого $t \in T$ существует такой элемент $a \in A$, что $at \in S$* (иначе говоря, любой элемент из T *делит* некоторый элемент из S);

г) *всякий простой идеал, пересекающийся с T, пересекается также и с S*[1]).

Выше отмечалось, что $i_M^{T,S} = 1_M \otimes i_A^{T,S}$, и это немедленно доказывает эквивалентность а) и б). Положим $T' = i_A^S(T)$; тогда (предложение 7) кольцо $T^{-1}A$ можно отождествить с кольцом $T'^{-1}(S^{-1}A)$ и а) эквивалентно утверждению о том, что элементы из T *обратимы* в $S^{-1}A$ (n° 1, замечание 5). Но ведь равенство $(t/1)(a/s) = 1/1$ $(t \in T,\ a \in A,\ s \in S)$ означает, что существует элемент $s' \in S$, для которого $tas' = ss'$; это доказывает эквивалентность а) и в). Покажем, что из г) следует в). Пусть t — элемент из T и предположим, что $t/1$ необратим в $S^{-1}A$; тогда существует максимальный идеал $\mathfrak{m}'$ кольца $S^{-1}A$, содержащий $t/1$ (*Алгебра*, гл. I, § 8, n° 7, теорема 2), и $\mathfrak{p} = (i_A^S)^{-1}(\mathfrak{m}')$ является простым идеалом в A, содержащим t и не пересекающимся с S (так как образ любого элемента из S относительно i_A^S обратим). Обратно, если существует какой-нибудь простой идеал $\mathfrak{p}$, пересекающий T и не пересекающий S, то любой элемент из $\mathfrak{p} \cap T$ не может делить никакого элемента из S; это доказывает, что в) влечет за собой г). Доказательство закончено.

Из предложения 8 следует, что среди мультипликативных систем T кольца A, содержащих S и удовлетворяющих эквивалентным условиям предложения 8, существует *наибольшая*, образованная *всеми* элементами кольца A, делящими какой-либо элемент из S (см. упражнение 1).

Предложение 9. *Пусть I — предупорядоченное множество с возрастающей фильтрацией, $(S_\alpha)_{\alpha \in I}$ — возрастающее семейство мультипликативных подмножеств некоторого кольца A и $S = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$. Положим $\rho_{\beta\alpha} = i_A^{S_\beta, S_\alpha}$ для $\alpha \leqslant \beta$ и $\rho_\alpha = i_A^{S, S_\alpha}$. Тогда совокупность $(S_\alpha^{-1}A, \rho_{\beta\alpha})$ является индуктивной системой колец и если для каждого $\alpha \in I$ через ρ'_α обозначить каноническое отображение кольца $S_\alpha^{-1}A$ в $\varinjlim S_\alpha^{-1}A$, то существует единственный изоморфизм j кольца $\varinjlim S_\alpha^{-1}A$ на $S^{-1}A$, такой, что $j \circ \rho'_\alpha = \rho_\alpha$ для всех $\alpha \in I$.*

Для $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$ имеет место равенство $\rho_{\gamma\alpha} = \rho_{\gamma\beta} \circ \rho_{\beta\alpha}$ (см. n° 1, следствие 3 предложения 2); следовательно, $(S_\alpha^{-1}A, \rho_{\beta\alpha})$ — индуктивная система. Положим $A' = \varinjlim S_\alpha^{-1}A$; так как $\rho_\alpha = \rho_\beta \circ \rho_{\beta\alpha}$ для $\alpha \leqslant \beta$ (n° 1, следствие 3 из предложения 2), то (ρ_α) — ин-

[1]) Ниже часто используются выражения типа «множество A *пересекает* множество B». Если нет специальных оговорок, то подразумевается, что в этих случаях $A \cap B \neq \varnothing$. — *Прим. перев.*

дуктивная система гомоморфизмов и $j = \varinjlim \rho_\alpha$ является тем единственным гомоморфизмом кольца A' в $\overrightarrow{S^{-1}A}$, для которого $j \circ \rho'_\alpha = \rho_\alpha$ при всех $\alpha \in I$. Гомоморфизмы $\rho'_\alpha \circ i_A^{S_\alpha}$: $A \to A'$ все равны между собой, так как $\rho_{\beta\alpha} \circ i_A^{S_\alpha} = i_A^{S_\beta}$ для $\alpha \leqslant \beta$; пусть u — их общее значение. Очевидно, что элементы из $u(S)$ обратимы в A', благодаря чему существует такой гомоморфизм h: $S^{-1}A \to A'$, что $h \circ i_A^S = u$ (n° 1, предложение 1). Для произвольного $\alpha \in I$ справедливы следующие равенства:

$$j \circ h \circ i_A^S = j \circ u = j \circ \rho'_\alpha \circ i_A^{S_\alpha} = \rho_\alpha \circ i_A^{S_\alpha} = i_A^S;$$

по этой причине $j \circ h$ является тождественным автоморфизмом кольца $S^{-1}A$. С другой стороны, при любом $\alpha \in I$

$$h \circ j \circ \rho'_\alpha \circ i_A^{S_\alpha} = h \circ \rho_\alpha \circ i_A^{S_\alpha} = h \circ i_A^S = u = \rho'_\alpha \circ i_A^{S_\alpha},$$

откуда $h \circ j \circ \rho'_\alpha = \rho'_\alpha$ при всех $\alpha \in I$; отсюда получается, что $h \circ j$ — тождественный автоморфизм кольца A' и, следовательно, j — изоморфизм.

Следствие. *Пусть в условиях предложения* 9 M *— произвольный* A*-модуль. Положим* $f_{\beta\alpha} = i_M^{S_\beta, S_\alpha}$ *для* $\alpha \leqslant \beta$, $f_\alpha = i_M^{S, S_\alpha}$ *для* $\alpha \in I$, *и пусть* f'_α *— каноническое отображение модуля* $S_\alpha^{-1}M$ *в модуль* $\varinjlim S_\alpha^{-1}M$. *Тогда существует такой* $S^{-1}A$*-изоморфизм* g *модуля* $S^{-1}M$ *на модуль* $\varinjlim S_\alpha^{-1}M$, *что* $g \circ f_\alpha = f'_\alpha$ *при всех* $\alpha \in I$.

Это следствие немедленно получается из определений модулей $S_\alpha^{-1}M = M \otimes_A S_\alpha^{-1}A$ и $S^{-1}M = M \otimes_A S^{-1}A$ и того факта, что переход к индуктивному пределу коммутирует с тензорным произведением (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 6, n° 7, proposition 12) [1]).

4. Свойства модулей частных

На всем протяжении этого n° *через* A *обозначается некоторое кольцо, а через* S *— некоторое мультипликативное подмножество в нем.*

Пусть $(M_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ — индуктивная система A-модулей; тогда $(S^{-1}M_\alpha, S^{-1}\varphi_{\beta\alpha})$ — индуктивная система $S^{-1}A$-модулей. Поскольку переход к индуктивному пределу коммутирует с тензорными

[1] См. также [Г], гл. I, § 1.6. — *Прим. перев.*

произведениями (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 6, n° 7, proposition 12) [1]), можно определить канонический изоморфизм

$$\varinjlim (S^{-1}M_\alpha) \to S^{-1} \varinjlim M_\alpha.$$

Аналогичным образом, тот факт, что прямые суммы коммутируют с тензорными произведениями (*Алгебра*, гл. III, § 1, n° 3, предложение 7), позволяет определить для любого семейства A-модулей $(M_\iota)_{\iota \in I}$ канонический изоморфизм

$$\bigoplus_{\iota \in I} S^{-1}M_\iota \to S^{-1} \bigoplus_{\iota \in I} M_\iota.$$

Наконец, заметим, что если A-модуль M является суммой некоторого семейства $(N_\iota)_{\iota \in I}$ своих подмодулей, то $S^{-1}M$ является суммой семейства $S^{-1}A$-модулей, порожденных образами $i_M^S(N_\iota)$. Отсюда следует, что если M — некоторый A-модуль конечного типа (соответственно конечно представимый), то $S^{-1}M = S^{-1}A \otimes_A M$ является $S^{-1}A$-модулем конечного типа (соответственно конечно представимым).

Теорема 1. *Кольцо $S^{-1}A$ является плоским A-модулем* (гл. 1, § 2, n° 3, определение 2).

Если $u\colon M' \to M$ — произвольный инъективный гомоморфизм A-модулей, то требуется установить, что гомоморфизм $S^{-1}u\colon S^{-1}M' \to S^{-1}M$ также инъективен. Но ведь если m'/s $(m' \in M', s \in S)$ — такой элемент, что $u(m')/s = 0$, то существует элемент $s' \in S$, для которого $s'u(m') = 0$ (n° 2, предложение 4) или $u(s'm') = 0$. Так как гомоморфизм u инъективен, то отсюда следует равенство $s'm' = 0$ и, стало быть, $m'/s = 0$.

Благодаря тому что $S^{-1}A$ является плоским A-модулем, к нему можно применить результаты гл. 1, § 2. В частности:

1. Если M — некоторый A-модуль и N — его подмодуль, то $S^{-1}N$ можно канонически отождествить с *подмодулем* в $S^{-1}M$, порожденным образом i_M^S (гл. 1, § 2, n° 3, замечание 2); произведя это отождествление, мы можем отождествить $S^{-1}(M/N)$ с $(S^{-1}M)/(S^{-1}N)$, и если P — второй подмодуль в M, то

$$S^{-1}(N+P) = S^{-1}N + S^{-1}P, \quad S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}N \cap S^{-1}P$$

(гл. 1, § 2, n° 6, предложение 6).

2. Если M — некоторый A-модуль *конечного типа*, то

$$S^{-1}\operatorname{Ann}(M) = \operatorname{Ann}(S^{-1}M) \tag{9}$$

(гл. 1, § 2, n° 10, следствие 2 предложения 12).

[1]) См. также [Г], гл. I, § 1.6. — *Прим. перев.*

Предложение 10. *Пусть M — некоторый A-модуль. Обозначим через $\varphi(N')$ прообраз любого подмодуля N' $S^{-1}A$-модуля $S^{-1}M$ относительно i_M^S. Тогда*

(i) $S^{-1}\varphi(N') = N'$;

(ii) *для любого подмодуля N в M подмодуль $\varphi(S^{-1}N)$ в M образован теми элементами $m \in M$, для которых существует такое $s \in S$, что $sm \in N$;*

(iii) *φ является изоморфизмом (упорядоченных множеств, в которых отношение порядка определено отношением включения) множества $S^{-1}A$-подмодулей модуля $S^{-1}M$ на множество подмодулей Q модуля M, удовлетворяющих следующему условию:*

(MS) *Если $sm \in Q$, $s \in S$, $m \in M$, то $m \in Q$.*

Очевидно, что $S^{-1}\varphi(N') \subset N'$; обратно, если $n' = m/s \in N'$, то $m/1 \in N'$; следовательно, $m \in \varphi(N')$ и $n' \in S^{-1}(\varphi(N'))$. Отсюда следует (i). Для того чтобы элемент $m \in M$ удовлетворял условию $m \in \varphi(S^{-1}N)$, необходимо и достаточно, чтобы $m/1 \in S^{-1}N$, или, иными словами, чтобы существовали такие $s \in S$ и $n \in N$, что $m/1 = n/s$. Это равенство означает, что существует элемент $s' \in S$, для которого $s'sm = s'n \in N$. Отсюда следует (ii). Наконец, условие $sm \in \varphi(N')$ эквивалентно по определению условию, что $sm/1 \in N'$, а поскольку элемент $s/1$ обратим в кольце $S^{-1}A$, из этого следует, что $m/1 \in N$, т. е. $m \in \varphi(N')$. Таким образом, $\varphi(N')$ удовлетворяет условию (MS). С другой стороны, из (ii) получается, что если N удовлетворяет (MS), то $\varphi(S^{-1}N) = N$, что и завершает доказательство утверждения (iii).

Говорят, что подмодуль $\varphi(S^{-1}N)$ является *насыщением подмодуля N в модуле M относительно S*. Подмодули, удовлетворяющие условию (MS) (и, следовательно, равные своим насыщениям), называются *насыщенными относительно S*. Подмодуль $\varphi(S^{-1}N)$ представляет собой ядро композиции гомоморфизмов

$$M \xrightarrow{h} M/N \xrightarrow{i^S_{M/N}} S^{-1}M/S^{-1}N,$$

где h — канонический гомоморфизм; это следует из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & M/N \\ {\scriptstyle i^S_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i^S_{M/N}} \\ S^{-1}M & \longrightarrow & S^{-1}M/S^{-1}N \end{array}$$

Когда мультипликативная система S является дополнением к некоторому простому идеалу $\mathfrak{p}$, то подмодуль $\varphi(S^{-1}N)$ назы-

вают также *насыщением модуля N в модуле M относительно простого идеала* $\mathfrak{p}$.

Следствие 1. *Пусть N_1, N_2 — два подмодуля некоторого A-модуля M. Для включения $S^{-1}N_1 \subset S^{-1}N_2$ необходимо и достаточно, чтобы насыщение модуля N_1 относительно S содержалось в насыщении модуля N_2 относительно S.*

Следствие 2. *Если M — нётеров* (соответственно *артинов*) *A-модуль, то $S^{-1}M$ — также нётеров* (соответственно *артинов*) *$S^{-1}A$-модуль. В частности, если кольцо A нётерово* (соответственно *артиново*), *то таким же является и кольцо $S^{-1}A$.*

5. *Идеалы в кольце частных*

Предложение 11. *Пусть A — кольцо и S — некоторое мультипликативное подмножество в A. Для любого идеала $\mathfrak{b}'$ кольца $S^{-1}A$ пусть $\mathfrak{b} = (i_A^S)^{-1}(\mathfrak{b}')$, так что $\mathfrak{b}' = S^{-1}\mathfrak{b}$.*

(i) *Пусть f — канонический гомоморфизм $A \to A/\mathfrak{b}$. Тогда гомоморфизм кольца $S^{-1}A$ в $(f(S))^{-1}(A/\mathfrak{b})$, канонически ассоциированный с f* (n° 1, предложение 2), *сюръективен и его ядро равно $\mathfrak{b}'$; это определяет при переходе к факторкольцам канонический изоморфизм кольца $(S^{-1}A)/\mathfrak{b}'$ на $(f(S))^{-1}(A/\mathfrak{b})$. Кроме того, канонический гомоморфизм из $A/\mathfrak{b}$ в $(f(S))^{-1}(A/\mathfrak{b})$ инъективен.*

(ii) *Отображение $\mathfrak{b}' \to \mathfrak{b} = (i_A^S)^{-1}(\mathfrak{b}')$, ограниченное на множество максимальных* (соответственно *простых*) *идеалов кольца $S^{-1}A$, является изоморфизмом* (*относительно отношения включения*) *этого множества на множество тех идеалов кольца A, которые максимальны среди идеалов, не пересекающихся с S* (соответственно *на множество простых идеалов кольца A, не пересекающихся с S*).

(iii) *Если $\mathfrak{q}'$ — простой идеал кольца частных $S^{-1}A$ и $\mathfrak{q} = (i_A^S)^{-1}(\mathfrak{q}')$, то существует изоморфизм кольца частных $A_\mathfrak{q}$ на кольцо $(S^{-1}A)_{\mathfrak{q}'}$, который переводит a/b в $(a/1)/(b/1)$, где $a \in A$ и $b \in A - \mathfrak{q}$.*

(i) Мы можем отождествить $(f(S))^{-1}(A/\mathfrak{b})$ с $S^{-1}(A/\mathfrak{b})$ при помощи канонического изоморфизма между этими двумя модулями (n° 2, предложение 6). При таком условии точная последовательность $0 \to \mathfrak{b} \to A \to A/\mathfrak{b} \to 0$ приводит к точной последовательности $0 \to S^{-1}\mathfrak{b} \to S^{-1}A \to S^{-1}(A/\mathfrak{b}) \to 0$ (n° 4, теорема 1), существование которой доказывает первое утверждение в (i), если принять во внимание, что $\mathfrak{b}' = S^{-1}\mathfrak{b}$. Так как модуль $\mathfrak{b}$ насыщен относительно S, из условий $a \in A$, $s \in S$, $as \in \mathfrak{b}$ вытекает включение $a \in \mathfrak{b}$; таким образом, гомотетия умножения на элемент s в $A/\mathfrak{b}$ является инъективным отображением. Это доказывает второе утверждение пункта (i).

(ii) Прежде всего заметим, что равенство $\mathfrak{b}' = S^{-1}A$ эквивалентно соотношению $\mathfrak{b} \cap S \neq \varnothing$, так как это последнее означает, что $\mathfrak{b}'$ содержит обратимые в $S^{-1}A$ элементы. Из предложения 10 (iii) n° 4 следует, что $\mathfrak{b}' \to \mathfrak{b} = (i_A^S)^{-1}(\mathfrak{b}')$ является изоморфизмом (относительно отношения включения) множества идеалов кольца $S^{-1}A$, отличных от самого кольца $S^{-1}A$, на множество $\mathfrak{F}$ тех идеалов кольца A, которые не пересекаются с S и удовлетворяют условию (MS) предложения 10. Если $\mathfrak{b}'$ — максимальный (соответственно простой) идеал, то, очевидно, что $\mathfrak{b}$ — максимальный идеал (соответственно простой идеал) в $\mathfrak{F}$; верно и обратное (в силу (i)). С другой стороны, если $\mathfrak{r}$ — идеал кольца A, не пересекающийся с S, то его насыщение $\mathfrak{r}_1$ относительно S является идеалом в A, содержащим $\mathfrak{r}$ и не пересекающимся с S, поскольку никакой элемент $a \in S$ не может удовлетворять условию $sa \in \mathfrak{r}$ при $s \in S$, так как из этого следовало бы, что $sa \in \mathfrak{r} \cap S$. Отсюда мы заключаем, что если $\mathfrak{r}$ — максимальный среди тех идеалов в A, которые не пересекаются с S, то он удовлетворяет условию (MS) из предложения 10 § 4 и максимален в $\mathfrak{F}$. Аналогичным образом, если $\mathfrak{r}$ — простой идеал, не пересекающийся с S, то он удовлетворяет условию (MS) в силу определения простых идеалов, а потому принадлежит $\mathfrak{F}$. Это завершает доказательство (ii).

(iii) Предположим, что идеал $\mathfrak{q}'$ прост, так что простым является и идеал $\mathfrak{q}$. Множество $T = A - \mathfrak{q}$ представляет собой мультипликативную систему в A, содержащую множество S, откуда $ST = T$. Положим $T' = i_A^S(T)$; из предложения 7 (i) n° 3, получаем, что существует, и притом единственный, изоморфизм j кольца $T^{-1}A = A_{\mathfrak{q}}$ на $T'^{-1}(S^{-1}A)$, такой, что $j(a/b) = (a/1)/(b/1)$ для всех $a \in A$ и $b \in T$. С другой стороны, очевидно, что T' не имеет общих элементов с $\mathfrak{q}'$. Обратно, пусть $a/s \in S^{-1}A$. Так как элемент $1/s$ обратим в $S^{-1}A$, условие $a/s \notin \mathfrak{q}'$ эквивалентно требованию $i_A^S(a) = a/1 \notin \mathfrak{q}'$ и, следовательно, $a \notin \mathfrak{q}$. Отсюда вытекает, что $S^{-1}A - \mathfrak{q}' = S^{-1}T'$ и, в силу предложения 8 n° 3, справедливо равенство $T'^{-1}(S^{-1}A) = (S^{-1}A)_{\mathfrak{q}'}$, что и требовалось.

Определенный в пункте (iii) изоморфизм называется *каноническим*. Когда кольцо A целостное, канонические изоморфизмы колец $A_{\mathfrak{q}}$ и $(S^{-1}A)_{\mathfrak{q}'}$ на подкольца поля частных K кольца A имеют один и тот же образ.

Замечание. Для того чтобы идеал $\mathfrak{a}$ кольца A удовлетворял равенству $S^{-1}\mathfrak{a} = S^{-1}A$ (в силу теоремы 1 n° 4 это равносильно тому, что $S^{-1}(A/\mathfrak{a}) = 0$), необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{a} \cap S \neq \varnothing$. Это немедленно выводится из определений.

Следствие 1. *Пусть A — кольцо и S — некоторая мультипликативная система в нем. Тогда любой идеал $\mathfrak{p} \subset A$, максимальный среди не пересекающихся с S идеалов, является простым.*

Действительно, в силу предложения 11, условие на идеал $\mathfrak{p}$ означает, что $\mathfrak{p} = (i_A^S)^{-1}(\mathfrak{m}')$, где $\mathfrak{m}'$ — некоторый максимальный идеал кольца $S^{-1}A$; но из простоты идеала $\mathfrak{m}'$ следует простота идеала $\mathfrak{p}$.

Следствие 2. *Пусть A — кольцо и S — какая-нибудь его мультипликативная система. Тогда для любого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A, не пересекающегося с S, существует простой идеал, содержащий $\mathfrak{a}$ и также не пересекающийся с S.*

В самом деле, $S^{-1}(\mathfrak{a}) \neq S^{-1}A$ (см. замечание), а потому существует максимальный идеал кольца $S^{-1}A$, содержащий $S^{-1}\mathfrak{a}$ (*Алгебра*, гл. 1, § 8, n° 7, теорема 2), и данное следствие вытекает из предложения 11 (ii).

Следствие 3. *Пусть A, B — два кольца, ρ — гомоморфизм A в B и $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A. Для существования в B такого простого идеала $\mathfrak{p}'$, что $\rho^{-1}(\mathfrak{p}') = \mathfrak{p}$, необходимо и достаточно, чтобы $\rho^{-1}(B\rho(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$.*

Если существует такой идеал $\mathfrak{p}' \subset B$, что $\rho^{-1}(\mathfrak{p}') = \mathfrak{p}$, то $\rho(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}'$, откуда $B\rho(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}'$ и $\rho^{-1}(B\rho(\mathfrak{p})) \subset \rho^{-1}(\mathfrak{p}') \subset \mathfrak{p}$; но так как обратное включение очевидно, то тем самым $\rho^{-1}(B\rho(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$. Предположим, обратно, что $\rho^{-1}(B\rho(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$, и рассмотрим в кольце B мультипликативную систему $S = \rho(A - \mathfrak{p})$. Сделанные предположения показывают, что $S \cap B\rho(\mathfrak{p}) = \varnothing$. В силу следствия 2, существует некоторый простой идеал $\mathfrak{p}'$ в кольце B, содержащий $B\rho(\mathfrak{p})$ и не пересекающийся с S; но тогда идеал $\rho^{-1}(\mathfrak{p}')$ содержит $\mathfrak{p}$ и не может содержать ни одного элемента из $A - \mathfrak{p}$, т. е. он совпадает с идеалом $\mathfrak{p}$.

Следствие 4. *Пусть A, B — два кольца и ρ — гомоморфизм кольца A в B.*

(i) *Предположим, что существует такой B-модуль E, что A-модуль $\rho_*(E)$ строго плоский. Тогда для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A существует простой идеал $\mathfrak{p}'$ кольца B, для которого $\rho^{-1}(\mathfrak{p}') = \mathfrak{p}$.*

(ii) *Допустим, что, наоборот, B — плоский A-модуль и для всякого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A существует такой идеал $\mathfrak{p}'$ кольца B, что $\rho^{-1}(\mathfrak{p}') = \mathfrak{p}$. Тогда кольцо B является строго плоским A-модулем.*

(i) Из предположений следует, что для всякого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A справедливо равенство $\rho^{-1}(B\rho(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$ (гл. 1, § 3,

n° 5, предложение 8(ii)); поэтому достаточно применить следствие 3.

(ii) Достаточно показать, что для каждого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A существует такой максимальный идеал $\mathfrak{m}'$ кольца B, что $\rho^{-1}(\mathfrak{m}') = \mathfrak{m}$ (гл. 1, § 3, n° 5, предложение 9, д)). Однако, согласно условию, существует такой идеал $\mathfrak{q}$ кольца B, что $\rho^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{m}$. Поскольку $\mathfrak{q} \neq B$, существует максимальный идеал $\mathfrak{m}'$ в B, содержащий $\mathfrak{q}$ и, следовательно, $\rho^{-1}(\mathfrak{m}') \supset \mathfrak{m}$. Но так как $\rho^{-1}(\mathfrak{m}')$ не может содержать 1, то $\rho^{-1}(\mathfrak{m}') = \mathfrak{m}$.

Следствие 5. *Пусть A — кольцо, S — какая-нибудь мультипликативная система в нем и B — кольцо, для которого $i_A^S(A) \subset B \subset S^{-1}A$. Пусть $\mathfrak{q}$ — такой простой идеал в B, что простой идеал $\mathfrak{p} = (i_A^S)^{-1}(\mathfrak{q})$ кольца A не пересекается с S и, наконец, пусть $\mathfrak{p}'$ — простой идеал $S^{-1}\mathfrak{p}$ кольца частных $S^{-1}A$. Тогда имеет место равенство $\mathfrak{p}' \cap B = \mathfrak{q}$.*

Пусть $S' = i_A^S(S)$. Мы уже определили канонический изоморфизм кольца $S'^{-1}B$ на $S^{-1}A$ (n° 1, следствие 4 из предложения 2) и с его помощью отождествим указанные два кольца. Так как $\mathfrak{q} \cap S' = \varnothing$, то $\mathfrak{q}' = S'^{-1}\mathfrak{q}$ является единственным простым идеалом кольца $S^{-1}A = S'^{-1}B$, для которого $\mathfrak{q}' \cap B = (i_B^{S'})^{-1}(\mathfrak{q}') = \mathfrak{q}$ (предложение 11 (ii)), откуда $(i_A^S)^{-1}(\mathfrak{q}') = \mathfrak{p}$. Следовательно, $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}'$ (предложение 11 (ii)).

В обозначениях следствия 5 имеют место канонические изоморфизмы колец $A_\mathfrak{p}$ и $B_\mathfrak{q}$ на $(S^{-1}A)_{\mathfrak{p}'}$ (предложение 11 (iii)), откуда получается канонический изоморфизм $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{q}$.

6. Нильрадикал и минимальные простые идеалы

В любом (коммутативном) кольце A множество нильпотентных элементов является *идеалом*, ибо если x, y — такие элементы из A, что $x^m = y^n = 0$, то $(x+y)^{m+n} = 0$ в силу формулы бинома.

Определение 4. *Нильрадикалом (коммутативного) кольца A называется идеал нильпотентных элементов этого кольца. Корнем (или радикалом) идеала $\mathfrak{a}$ кольца A называется прообраз нильрадикала факторкольца $A/\mathfrak{a}$ при каноническом отображении $A \to A/\mathfrak{a}$.*

Корень идеала $\mathfrak{a} \subset A$ часто будет обозначаться через $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$. Утверждение, что некоторый элемент $x \in A$ принадлежит корню идеала $\mathfrak{a}$, означает, что существует целое число $n > 0$, для которого $x^n \in \mathfrak{a}$. Если f — гомоморфизм кольца A в кольцо B и $\mathfrak{b}$ — идеал в B, то корень идеала $f^{-1}(\mathfrak{b})$ равен полному

прообразу относительно f корня идеала $\mathfrak{b}$, так как $x^n \in f^{-1}(\mathfrak{b})$ означает, что $(f(x))^n \in \mathfrak{b}$.

Нильрадикал любого кольца A содержится в его *радикале* (*Алгебра*, гл. VIII, § 6, n° 3, следствие 3 из теоремы 1) и может быть отличным от него. Тем не менее нильрадикал кольца A равен его радикалу, если A артиново (*Алгебра*, гл. VIII, § 6, n° 4, теорема 3).

Мы будем говорить, что простой идеал $\mathfrak{p}$ кольца A является *минимальным простым идеалом*, если он минимален в упорядоченном по включению множестве простых идеалов кольца A.

Предложение 12. *Пусть $\mathfrak{p}$ — минимальный простой идеал некоторого кольца A. Тогда для любого элемента $x \in \mathfrak{p}$ существуют элемент $s \in A - \mathfrak{p}$ и целое число $k > 0$, такие, что $sx^k = 0$.*

Действительно, множество S элементов вида sx^k (k — целое число $\geqslant 0$, $s \in A - \mathfrak{p}$) является мультипликативной системой кольца A. Если бы $0 \notin S$, то существовал бы простой идеал $\mathfrak{p}'$, не пересекающийся с S (n° 5, следствие 2 из предложения 11). Но тогда бы $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}$, так как $x \in \mathfrak{p}'$, что противоречит минимальности идеала $\mathfrak{p}$.

Предложение 13. *Нильрадикал любого кольца A равен пересечению всех простых идеалов этого кольца и совпадает также с пересечением его минимальных простых идеалов.*

Совершенно ясно, что если элемент $x \in A$ нильпотентен, то он содержится в любом простом идеале из A (§ 1, n° 1, определение 1). Наоборот, пусть x — ненильпотентный элемент в A. Множество S степеней x^k ($k \geqslant 0$ — целое число) будет тогда мультипликативной системой кольца A, не содержащей 0. Следовательно, существует простой идеал $\mathfrak{p} \subset A$, не пересекающийся с S (n° 5, следствие 2 из предложения 11) и a fortiori $x \notin \mathfrak{p}$. Этим установлено первое утверждение. Для доказательства второго достаточно доказать лемму:

Лемма 2. *Любой простой идеал $\mathfrak{p}$ кольца A содержит минимальный простой идеал этого же кольца.*

В силу леммы Цорна, достаточно показать, что множество P простых идеалов, упорядоченное отношением $\supset$, *индуктивно*. Пусть G — непустое вполне упорядоченное подмножество в P; тогда пересечение $\mathfrak{p}_0$ всех идеалов $\mathfrak{p} \in G$ снова является простым идеалом: действительно, если $x \notin \mathfrak{p}_0$ и $y \notin \mathfrak{p}_0$, то существует идеал $\mathfrak{p} \in G$, для которого $x \notin \mathfrak{p}$ и $y \notin \mathfrak{p}$, откуда $xy \notin \mathfrak{p}$ и тем более $xy \notin \mathfrak{p}_0$.

Замечание. В § 4, n° 3, следствие 3 из предложения 14, мы покажем, что в нётеровом кольце множество минимальных

простых идеалов *конечно*; кроме того, позднее будет видно, что в нётеровом кольце любая убывающая последовательность простых идеалов *стационарна*.

Следствие 1. *Корень идеала* $\mathfrak{a}$ *кольца* A *равен пересечению простых идеалов, содержащих* $\mathfrak{a}$; *он равен также пересечению минимальных элементов в этом множестве простых идеалов.*

Следствие 2. *Для любого идеала* $\mathfrak{a}$ *кольца* A *обозначим через* $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ *его корень. Тогда для двух идеалов* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *из* A *справедливы равенства*

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{r}(\mathfrak{b}).$$

В частности, если $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, *то* $\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{b})$.

Действительно, для того чтобы простой идеал содержал $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ (или $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$), необходимо и достаточно, чтобы он содержал хотя бы один из идеалов $\mathfrak{a}$ или $\mathfrak{b}$ (§ 1, n° 1, предложение 1).

Предложение 14. *Для того чтобы два идеала* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *кольца* A *были взаимно простыми, необходимо и достаточно, чтобы были таковыми их корни* $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ *и* $\mathfrak{r}(\mathfrak{b})$.

Необходимость этого условия очевидна, так как $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ и $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{b})$; оно достаточно в силу предложения 3 § 1, n° 2.

Предложение 15. *В кольце* A *пусть* $\mathfrak{a}$ — *некоторый идеал и* $\mathfrak{b}$ — *идеал конечного типа, содержащийся в корне идеала* $\mathfrak{a}$. *Тогда существует такое целое* $k > 0$, *что* $\mathfrak{b}^k \subset \mathfrak{a}$.

Пусть $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — система образующих идеала $\mathfrak{b}$. По условию, существует такое целое h, что $b_i^h \in \mathfrak{a}$ при $1 \leqslant i \leqslant n$. Если записать в развернутом виде произведение nh элементов, каждый из которых является линейной комбинацией элементов b_i с коэффициентами из A, то любое слагаемое оказывается кратным произведению nh сомножителей, каждый из которых есть одно из b_i; среди этих сомножителей по крайней мере h соответствуют одному и тому же индексу i, так что все произведение принадлежит идеалу $\mathfrak{a}$. Следовательно, $k = nh$ является искомым числом.

Следствие. *В нётеровом кольце нильрадикал является нильпотентным идеалом.*

Предложение 16. *Пусть* B — *некоторое кольцо и* A — *его подкольцо. Тогда для любого минимального простого идеала* $\mathfrak{p}$ *кольца* A *существует минимальный простой идеал* $\mathfrak{q}$ *кольца* B, *для которого* $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.

Положим $S = A - \mathfrak{p}$; тогда кольцо $A_{\mathfrak{p}} = S^{-1}A$ можно отождествить с некоторым подкольцом в $S^{-1}B$ (n° 1, предложе-

ние 2), а с другой стороны, $A_{\mathfrak{p}}$ обладает лишь одним простым идеалом $\mathfrak{p}'$, так как идеал $\mathfrak{p}$ минимален (n° 5, предложение 11). Поскольку кольцо $S^{-1}B$ ненулевое (оно содержит $A_{\mathfrak{p}}$), в нем содержится хотя бы один простой идеал $\mathfrak{r}'$ и обязательно $\mathfrak{r}' \cap A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}'$. Если $j = i_B^S$ и если положить $\mathfrak{r} = j^{-1}(\mathfrak{r}')$, то

$$i_A^S(\mathfrak{r} \cap A) \subset \mathfrak{r}' \cap A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}'.$$

Следовательно, $\mathfrak{r} \cap A \subset \mathfrak{p}$ и, в силу минимальности идеала $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{r} \cap A = \mathfrak{p}$. Кроме того, идеал $\mathfrak{r}$ прост в кольце B. Если теперь $\mathfrak{q}$ — любой минимальный простой идеал в B, содержащийся в $\mathfrak{r}$ (лемма 1), то a fortiori $\mathfrak{q} \cap A \subset \mathfrak{p}$, поэтому $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$, так как $\mathfrak{p}$ минимален.

Определение 5. *Говорят, что кольцо A редуцированно, если его нильрадикал равен 0, т. е. любой элемент $\neq 0$ из A не нильпотентен.*

Если $\mathfrak{n}$ — нильрадикал кольца A, то факторкольцо $A/\mathfrak{n}$ редуцированно, так как нильпотентность в $A/\mathfrak{n}$ класса $x \bmod \mathfrak{n}$, $x \in A$, означает, что $x^h \in \mathfrak{n}$ при некотором целом h и, следовательно, $x^{hk} = 0$ при некотором целом k; таким образом, $x \in \mathfrak{n}$.

Предложение 17. *Пусть A — некоторое кольцо, $\mathfrak{n}$ — его нильрадикал. Тогда для любой мультипликативной системы $S \subset A$ идеал $S^{-1}\mathfrak{n}$ служит нильрадикалом кольца частных $S^{-1}A$. В частности, если A редуцированно, то и $S^{-1}A$ редуцированно.*

Действительно, если $x \in A$ и $s \in S$ — такие элементы, что $(x/s)^n = x^n/s^n = 0$, то существует элемент $s' \in S$, для которого $s'x^n = 0$ (n° 1, замечание 3) и a fortiori $(s'x)^n = 0$; поэтому $s'x \in \mathfrak{n}$ и $x/s = s'x/s's \in S^{-1}\mathfrak{n}$. Обратное очевидно.

7. Модули частных тензорных произведений и модулей гомоморфизмов

Предложение 18. *Пусть A — кольцо, S — некоторая мультипликативная система в нем.*

(i) *Если M и N — два A-модуля, то $S^{-1}A$-модули $(S^{-1}M) \otimes_A N$, $M \otimes_A (S^{-1}N)$, $(S^{-1}M) \otimes_{S^{-1}A} (S^{-1}N)$ и $S^{-1}(M \otimes_A N)$ канонически изоморфны.*

(ii) *Если M' и N' — два $S^{-1}A$-модуля, то канонический гомоморфизм*

$$M' \otimes_A N' \to M' \otimes_{S^{-1}A} N',$$

полученный из A-билинейного отображения $(x', y') \to x' \otimes y'$ прямого произведения $M' \times N'$ в тензорное произведение $M' \otimes_{S^{-1}A} N'$, биективен.

Утверждение (i) есть непосредственное следствие определения модуля частных $S^{-1}M = M \otimes_A S^{-1}A$ и ассоциативности тензорного произведения, которая приводит к каноническим изоморфизмам

$$(S^{-1}M) \otimes_{S^{-1}A} (S^{-1}N) = (S^{-1}M) \otimes_{S^{-1}A} (S^{-1}A \otimes_A N) =$$
$$= (S^{-1}M) \otimes_A N = (S^{-1}A) \otimes_A M \otimes_A N = S^{-1}(M \otimes_A N).$$

Для доказательства (ii) сначала отметим, что в модулях M' и N', рассматриваемых над кольцом A, гомотетии умножения на элементы $s \in S$ биективны; поэтому справедливы равенства $M' = S^{-1}M'$ и $N' = S^{-1}N'$ (n° 2, замечание 4). Аналогичным образом, $S^{-1}(M' \otimes_A N') = M' \otimes_A N'$. Утверждение (ii) превратилось теперь в частный случай утверждения (i).

Следствие. *Пусть M — некоторый A-модуль и $\mathfrak{a}$ — идеал в кольце A. Тогда $S^{-1}A$-подмодули $(S^{-1}\mathfrak{a})(S^{-1}M)$, $\mathfrak{a}(S^{-1}M)$, $(S^{-1}\mathfrak{a})j(M)$ (где $j\colon M \to S^{-1}M$ — каноническое отображение) и $S^{-1}(\mathfrak{a}M)$ модуля $S^{-1}M$ совпадают. В частности, если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — два идеала в A, то $(S^{-1}\mathfrak{a})(S^{-1}\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}(S^{-1}\mathfrak{b}) = (S^{-1}\mathfrak{a})\mathfrak{b} = S^{-1}(\mathfrak{ab})$.*

Замечание. Пусть M, N, P — три A-модуля, $f\colon M \times N \to P$ — некоторое A-билинейное отображение и $S^{-1}f\colon (S^{-1}M) \times (S^{-1}N) \to S^{-1}P$ — билинейное отображение над кольцом $S^{-1}A$, полученное из f при расширении кольца скаляров до $S^{-1}A$ (*Алгебра*, гл IX, § 1, n° 4, предложение 1). Пусть $i\colon M \to S^{-1}M$, $j\colon N \to S^{-1}N$ — канонические гомоморфизмы. Очевидно, что если Q есть A-подмодуль модуля P, порожденный образом $f(M \times N)$, то $S^{-1}Q$ является $S^{-1}A$-подмодулем модуля $S^{-1}P$, порожденным образом $(S^{-1}f)(i(M) \times j(N))$.

Предложение 19. *Пусть A — кольцо и S — некоторая мультипликативная система в нем.*

(i) *Если M и N — два A-модуля и M — модуль конечного типа* (соответственно *конечно представимый*), *то канонический гомоморфизм* (гл. I, § 2, n° 10, формула (10))

$$S^{-1}\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

инъективен (соответственно *биективен*).

(ii) *Если M', N' — два $S^{-1}A$-модуля, то каноническое вложение*

$$\mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(M', N') \to \mathrm{Hom}_A(M', N')$$

биективно.

Так как $S^{-1}A$ — плоский A-модуль, то утверждение (i) является частным случаем предложения 11 в гл. 1, § 2, n° 10. С другой стороны, в процессе доказательства предложения 3

n° 2 уже отмечалось, что всякий A-гомоморфизм $S^{-1}A$-модулей обязательно есть $S^{-1}A$-гомоморфизм. Отсюда следует (ii).

Предложение 20. *Пусть A, A' — два кольца, $\rho\colon A \to A'$ — некоторый гомоморфизм и S — мультипликативная система в A; пусть $S' = \rho(S)$ и $\rho'\colon S^{-1}A \to S'^{-1}A'$ — гомоморфизм, соответствующий гомоморфизму ρ* (n° 1, предложение 2).

(i) *Для любого A'-модуля M' существует, и притом единственный, $S^{-1}A$-изоморфизм*

$$j\colon S^{-1}\rho_*(M') \to \rho'_*(S'^{-1}M'),$$

при котором $j(m'/s) = m'/\rho(s)$ для $m' \in M'$, $s \in S$.

(ii) *Для любого A-модуля M существует, и притом единственный, изоморфизм $S'^{-1}A'$-модулей*

$$j'\colon (S^{-1}M) \otimes_{S^{-1}A} (S'^{-1}A') \to S'^{-1}(M \otimes_A A'),$$

при котором $j'((m/s) \otimes (a'/s')) = (m \otimes a')/(\rho(s)s')$.

(i) Если рассматривать $S'^{-1}M$ как A-модуль относительно композиции гомоморфизмов $i^{S'}_{M'} \circ \rho$, то гомотетии умножения на элементы из множества S биективны; следовательно, существует, и притом единственный, гомоморфизм j, обладающий требуемым свойством (n° 2, предложение 3). Так как $\rho(S) = S'$, то гомоморфизм j сюръективен. Кроме того, если $m' \in M'$, $s \in S'$ и $m'/\rho(s) = 0$, то существует такой элемент $t' \in S'$ что $t'm' = 0$; поскольку существует $t \in S$, для которого $\rho(t) = t'$, то $tm' = 0$ в модуле $\rho_*(M')$ и, следовательно, $m's = 0$ в $S^{-1}\rho_*(M')$.

(ii) Так как $(S^{-1}M) \otimes_{S^{-1}A} (S'^{-1}A') = (M \otimes_A S^{-1}A) \otimes_{S^{-1}A} (S'^{-1}A')$ и $S'^{-1}(M \otimes_A A') = (M \otimes_A A') \otimes_{A'} (S'^{-1}A')$, то существование изоморфизма j' следует из ассоциативности тензорного произведения.

8. *Приложения к алгебрам*

Пусть A — некоторое кольцо и B — любая (не обязательно ассоциативная или коммутативная, или обладающая единицей) A-алгебра; обозначим через S какую-нибудь мультипликативную систему в кольце A. Известно, что на $S^{-1}A$-модуле $S^{-1}B = B \otimes_A S^{-1}A$ каноническим образом вводится структура *$S^{-1}A$-алгебры*, о которой говорят, что она получилась *расширением* до $S^{-1}A$ кольца скаляров (*Алгебра*, гл. III, § 3), и в которой произведение $(x/s)(y/t)$ равно элементу $(xy)/st$. Если B обладает единичным элементом e, то $e/1$ — единичный элемент в алгебре $S^{-1}B$, и если B — ассоциативная (соответственно коммутативная) алгебра, то такова же и алгебра $S^{-1}B$,

Пусть A — кольцо, M — некоторый A-модуль; обозначим через $\mathsf{T}(M)$ (соответственно через $\bigwedge(M)$, $\mathsf{S}(M)$) *тензорную* (соответственно *внешнюю*, *симметрическую*) алгебру модуля M (*Algébre*, chap. III, 3e ed.)[1]). Как известно, для любой коммутативной A-алгебры C существует, и притом единственный, изоморфизм j алгебры $\mathsf{T}(M)\otimes_A C$ на алгебру $\mathsf{T}(M\otimes_A C)$ (соответственно алгебры $\bigwedge(M)\otimes_A C$ на $\bigwedge(M\otimes_A C)$ и алгебры $\mathsf{S}(M)\otimes_A C$ на $\mathsf{S}(M\otimes_A C)$), такой, что $j(x\otimes 1)=x\otimes 1$ для $x\in M$, если модуль M канонически отождествить с надлежащим подмодулем в $\mathsf{T}(M)$ (соответственно в $\bigwedge(M)$, $\mathsf{S}(M)$) (loc. cit). В частности, отсюда следует, что если R — мультипликативная система в кольце A, то имеют место *канонические изоморфизмы*

$$R^{-1}\mathsf{T}(M)\to\mathsf{T}(R^{-1}M),\quad R^{-1}\bigwedge(M)\to\bigwedge(R^{-1}M),$$

$$R^{-1}\mathsf{S}(M)\to\mathsf{S}(R^{-1}M),$$

которые сводятся к тождественному отображению на $R^{-1}M$.

9. *Модули частных градуированных модулей*

Пусть A — градуированное кольцо, M — градуированный A-модуль и Δ — моноид степеней. В этом n° мы предполагаем, что Δ является группой. Напомним (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 11), что A и M являются соответственно прямыми суммами аддитивных групп

$$A=\bigoplus_{i\in\Delta}A_i,\qquad M=\bigoplus_{i\in\Delta}M_i,$$

причем $A_iA_j\subset A_{i+j}$ и $A_iM_j\subset M_{i+j}$ для любых i, j из группы Δ. Пусть S — мультипликативная система в A, *все элементы которой однородны*. Для каждого $i\in\Delta$ мы положим $S_i=S\cap A_i$ и обозначим через $(S^{-1}M)_i$ множество тех элементов m' из модуля $S^{-1}M$, для которых существуют элементы j, k из Δ, $m\in M_j$ и $s\in S_k$, такие, что $j-k=i$ и $m'=m/s$. Если $(m'_q)_{1\leqslant q\leqslant r}$ — какое-либо конечное семейство элементов из $S^{-1}M$, таких, что $m'_q\in(S^{-1}M)_{i(q)}$, то существуют элементы $j(q)\in\Delta$, $k\in\Delta$, $m_q\in M_{j(q)}$ $(1\leqslant q\leqslant r)$ и $s\in S_k$, для которых $m'_q=m_q/s$ при $1\leqslant q\leqslant r$ (n° 1, замечание 2).

---

[1]) Конструкцию тензорной алгебры данного модуля см. в *Алгебре*, гл. III, § 4, n° 6; конструкцию внешней алгебры данного модуля см. *там же*, § 5, n° 9. Что касается симметрической алгебры данного модуля, то она строится вполне аналогично внешней, с той лишь разницей, что факторизация проводится по ядру симметрических, а не знакопеременных полилинейных функций (см., например, [Л], гл. XVI, § 7). — *Прим. перев.*

Предложение 21. *Кольцо $S^{-1}A$, наделенное семейством подгрупп $((S^{-1}A)_i)$, является градуированным; далее, модуль $S^{-1}M$, наделенный семейством подгрупп $((S^{-1}M)_i)$, является градуированным модулем над градуированным кольцом $S^{-1}A$. При этом канонические отображения i_A^S и i_M^S однородны степени* 0.

Пусть $m \in M_j$, $s \in S_k$, $m' \in M_{j'}$, $s' \in S_{k'}$, и предположим, что $j-k=j'-k'=i$. Тогда $(m/s)-(m'/s')=(s'm-sm')/ss'$ и имеют место соотношения $s'm-sm' \in M_{j+k'}=M_{j'+k}$ и $ss' \in S_{k+k'}$. Следовательно, по определению $(m/s)-(m'/s') \in (S^{-1}M)_i$; этим доказано, что $(S^{-1}M)_i$ — аддитивные подгруппы модуля $S^{-1}M$. Их сумма дает весь модуль $S^{-1}M$: ведь каждый элемент $x \in S^{-1}M$ записывается в виде m/s, где $m \in M$, $s \in S$; элемент s *однороден* по предположению, а m является суммой однородных элементов m_j. Поэтому x есть сумма элементов m_j/s, каждый из которых принадлежит некоторой подгруппе $(S^{-1}M)_i$. Наконец, сумма подгрупп $(S^{-1}M)_i$ прямая. Действительно, рассмотрим конечное семейство таких элементов x_q $(1 \leqslant q \leqslant n)$, что $x_q \in (S^{-1}M)_{i(q)}$, где индексы $i(q)$ все различны, и предположим, что $\sum_{q=1}^{n} x_q = 0$. Каждый элемент x_q записывается в виде $x_q = m_q/s$, где $s \in S_k$ и $m_q \in M_{i(q)+k}$; из предположений следует существование такого $s' \in S$, что $s'\left(\sum_{q=1}^{n} m_q\right)=0$. Если бы не все произведения $s'm_q$ равнялись нулю, то получилось бы противоречие, так как если $s' \in S_d$, то $s'm_q \in M_{i(q)+d}$, а индексы $i(q)+d$ попарно различны. Таким образом, при всех q имеет место равенство $x_q = 0$.

Непосредственно проверяется, что если $a \in (S^{-1}A)_i$ и $x \in (S^{-1}M)_j$, то $ax \in (S^{-1}M)_{i+j}$. Применяя этот результат к случаю $M=A$, мы видим, что $S^{-1}A$ — кольцо, градуированное группами $(S^{-1}A)_i$. Мы видим далее, что $S^{-1}M$ является градуированным модулем над кольцом $S^{-1}A$. И, наконец, так как $1 \in A_0$, отображения i_A^S и i_M^S однородны степени 0.

Предложение 22. *Пусть A* (соответственно B) *— некоторое градуированное кольцо типа Δ, и пусть M* (соответственно N) *— некоторый градуированный модуль над градуированным кольцом A* (соответственно *над градуированным кольцом B*); *обозначим через S* (соответственно *через T*) *какую-либо мультипликативную систему кольца A* (соответственно *кольца B*), *все элементы которой однородны, и пусть $f\colon A \to B$ такой однородный гомоморфизм степени* 0, *что $f(S) \subset T$; наконец, пусть $u\colon M \to N$ — некоторое A-линейное отображение, являющееся однородным степени k. Тогда гомоморфизм $f'\colon S^{-1}A \to T^{-1}B$,*

полученный из f (n° 1, предложение 2), *будет однородным гомоморфизмом степени* 0 *и* $(S^{-1}A)$*-линейное отображение* $u'\colon S^{-1}M \to T^{-1}N$, *полученное из* f *и из* u (n° 2, предложение 5), *будет однородным степени* k.

Это немедленно следует из формул $f'(a/s) = f(a)/f(s)$ и $u'(m/s) = u(m)/f(s)$.

В заключение отметим, что если E — некоторая *градуированная* A-алгебра и S — мультипликативная система в A, образованная однородными элементами, то модуль частных $S^{-1}E$, наделенный структурой $(S^{-1}A)$-алгебры (n° 8) и градуировкой $(S^{-1}E)_i$, является *градуированной* $(S^{-1}A)$*-алгеброй*, что немедленно вытекает из определений.

Упражнения

1) Говорят, что мультипликативная система S кольца A *насыщена*, если из включения $xy \in S$ следуют включения $x \in S$ и $y \in S$.

а) Для того чтобы некоторое подмножество S кольца A было насыщенной мультипликативной системой, необходимо и достаточно, чтобы множество $A - S$ представлялось в виде объединения простых идеалов кольца A.

б) Пусть S — некоторая мультипликативная система кольца A и $\tilde{S}$ — множество таких элементов $x \in A$, для которых существует такой $y \in A$, что $xy \in S$. Доказать, что $\tilde{S}$ — наименьшая насыщенная мультипликативная система, содержащая S; кроме того, множество $A - \tilde{S}$ является объединением тех простых идеалов кольца A, которые не пересекают S; наконец, показать, что для любого A-модуля M канонический гомоморфизм из $S^{-1}M$ в $\tilde{S}^{-1}M$ биективен.

в) Пусть S и T — две мультипликативные системы кольца A. Доказать эквивалентность следующих двух свойств: α) $S \subset \tilde{T}$; β) для любого A-модуля M, удовлетворяющего соотношению $S^{-1}M = 0$, имеет место равенство $T^{-1}M = 0$. (Чтобы убедиться в том, что из β) следует α), рассмотреть A-фактормодуль A/As, где $s \in S$.)

2) Пусть A — некоторое кольцо и S — мультипликативная система в нем. Показать, что множество $\mathfrak{n}$ таких элементов $x \in A$, что $sx = 0$ для некоторого $s \in S$, является идеалом в A. Положим $A_1 = A/\mathfrak{n}$ и обозначим через S_1 канонический образ системы S в A_1. Доказать, что ни один элемент из S_1 не является делителем нуля в A_1 и что канонический гомоморфизм $S^{-1}A \to S_1^{-1}A_1$ биективен.

Вывести отсюда, что, для того чтобы $S^{-1}A$ было A-модулем конечного типа, необходимо и достаточно, чтобы все элементы системы S_1 были обратимы в A_1, так что в этом случае $S^{-1}A$ отождествляется с A_1.

3) Пусть $S = \mathbf{Z}^*$ (дополнение до $\{0\}$ в кольце $\mathbf{Z}$), p — целое число >1 и M — $\mathbf{Z}$-модуль, равный прямой сумме всех модулей $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ для $n \in \mathbf{N}$. Показать, что $S^{-1}M = 0$, хотя M является точным $\mathbf{Z}$-модулем, и что каноническое отображение $S^{-1}\operatorname{End}_{\mathbf{Z}}(M) \to \operatorname{End}_{S^{-1}\mathbf{Z}}(S^{-1}M)$ не инъективно.

4) Пусть $S = \mathbf{Z}^*$ и M — свободный $\mathbf{Z}$-модуль, обладающий бесконечным базисом. Доказать, что тогда каноническое отображение $S^{-1}\operatorname{End}_{\mathbf{Z}}(M) \to \operatorname{End}_{S^{-1}\mathbf{Z}}(S^{-1}M)$ не сюръективно. Получить отсюда и из упражнения 3 пример такого $\mathbf{Z}$-модуля M, что каноническое отображение $S^{-1}\operatorname{End}_{\mathbf{Z}}(M) \to$

$\to \mathrm{End}_{S^{-1}\mathbf{Z}}(S^{-1}M)$ не является ни инъективным, ни сюръективным.

5) Привести пример такой последовательности (P_n) $\mathbf{Z}$-подмодулей модуля $\mathbf{Z}$, что для $S = \mathbf{Z}^*$ подмодуль $S^{-1}\left(\bigcap_n P_n\right)$ отличается от $\bigcap_n (S^{-1}P_n)$.

6) Привести пример такого $\mathbf{Z}$-модуля M, что для $S = \mathbf{Z}^*$ наряду с равенством $\mathrm{Ann}(M) = 0$ выполняется соотношение $\mathrm{Ann}(S^{-1}M) = \mathbf{Q}$ (ср. с упражнением 3).

7) Пусть S — мультипликативная система кольца A; для любого семейства A-модулей $(M_\iota)_{\iota\in I}$ определить канонический гомоморфизм $S^{-1}\prod_{\iota\in I} M_\iota \to \prod_{\iota\in I} S^{-1}M_\iota$ $S^{-1}A$-модулей. Привести пример, в котором этот гомоморфизм не является ни инъективным, ни сюръективным (ср. с упражнением 3).

8) Пусть A — некоторое кольцо, $(S_\lambda)_{\lambda\in L}$ — какое-либо семейство мультипликативных систем в A, и пусть $M = \bigoplus_{\lambda\in L} S_\lambda^{-1}A$. Показать, что следующие два свойства эквивалентны: α) M — строго плоский A-модуль; β) для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A существует такой $\lambda\in L$, что $\mathfrak{m}\cap S_\lambda = \varnothing$. В частности, если S — мультипликативная система в A, то A-модуль $S^{-1}A$ является строго плоским лишь в том случае, когда все элементы из S обратимы, так что $S^{-1}A$ отождествляется с A.

9) Пусть A — кольцо, S — мультипликативная система в нем и $\mathfrak{q}$ — некоторый простой идеал в кольце A. Показать, что если T — образ системы $A - \mathfrak{q}$ в кольце частных $S^{-1}A$, то кольцо $T^{-1}(S^{-1}A)$ изоморфно кольцу $S'^{-1}A$, где S' — дополнение объединения тех простых идеалов кольца A, которые содержатся в $\mathfrak{q}$ и не пересекаются с S.

10) а) Пусть K — поле, A — кольцо многочленов $K[X, Y]$, $\mathfrak{p} = (X)$, $\mathfrak{q} = (Y)$ и S — дополнение к $\mathfrak{p}\cup\mathfrak{q}$ в A. Показать, что насыщение относительно S идеала $\mathfrak{p}+\mathfrak{q}$ отличается от суммы насыщений идеалов $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$.

б) Пусть K — поле, A — кольцо многочленов $K[X, Y, Z]$, $\mathfrak{p} = (X)+(Z)$, $\mathfrak{q} = (Y)+(Z)$ и S — дополнение до $\mathfrak{p}\cup\mathfrak{q}$ в A. Показать, что насыщение относительно S идеала $\mathfrak{pq}$ отличается от произведения насыщений идеалов $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$

11) Пусть p — простое число; каковы те идеалы кольца $\mathbf{Z}$, которые насыщены относительно идеала (p)?

12) В произвольном кольце A мы будем обозначать через $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ корень идеала $\mathfrak{a}$.

а) Показать, что для любых трех идеалов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ кольца A выполняются равенства $\mathfrak{r}(\mathfrak{a}+\mathfrak{bc}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\cap\mathfrak{r}(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})$.

б) Привести пример такой бесконечной последовательности идеалов $(\mathfrak{a}_n)$ кольца A, что $\mathfrak{r}\left(\bigcap_n \mathfrak{a}_n\right) \neq \bigcap_n \mathfrak{r}(\mathfrak{a}_n)$.

в) Привести пример главного идеала $\mathfrak{a}$, для которого $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ не является идеалом конечного типа и не существует такого целого $n > 0$, что $(\mathfrak{r}(\mathfrak{a}))^n \subset \mathfrak{a}$. (Рассмотреть кольцо недискретного нормирования ранга 1.)

13) Пусть A — кольцо.

а) Дать другое доказательство упражнения 6б) из *Алгебры*, гл. VIII, § 6, для чего рассмотреть образы многочлена f в кольцах $(A/\mathfrak{p})[X]$, где $\mathfrak{p}$ пробегает множество простых идеалов кольца A.

б) Пусть N — квадратная матрица порядка r над кольцом A; для того чтобы N была нильпотентной, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты (за исключением старшего) характеристического многочлена этой матрицы были нильпотентными. (Для того чтобы установить необходимость этого условия, примените метод, аналогичный тому, который использовался в пункте а); для доказательства достаточности воспользуйтесь теоремой Гамильтона — Кэли.)

в) Показать, что для любой пары положительных чисел k, r существует такое наименьшее целое положительное число $m(k, r)$, не зависящее от кольца A, что из равенства $N^k = 0$ следует $(\mathrm{Tr}(N))^{m(k,r)} = 0$. (Рассмотреть кольцо $\Lambda = \mathbf{Z}[T_{ij}]$, где T_{ij} — это r^2 переменных, матрицу $X = (T_{ij})$ над Λ и элемент $t = \sum_{i=1}^{r} T_{ii} = \mathrm{Tr}(X)$ из Λ; если $\mathfrak{a}_k$ — идеал кольца Λ, порожденный элементами матрицы X^k, то покажите с помощью утверждения б), что существует целое число m, для которого $t^m \in \mathfrak{a}_k$.)

г) Показать, что $m(2, 2) = 4$.

¶ 14) а) Пусть A — кольцо (не обязательно коммутативное), которое нётерово слева, и $\mathfrak{a}$ — левый идеал кольца A. Предположим, что существует такой левый идеал $\mathfrak{b} \neq 0$, что $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = 0$.

Показать, что любой элемент $a \in \mathfrak{a}$ является правым делителем нуля. (Пусть $b \neq 0$ — и некоторый элемент из $\mathfrak{b}$, и пусть $\mathfrak{a}_n = Ab + Aba + \ldots + Aba^n$; рассмотреть такое наименьшее целое число n, что $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n+1}$.)

б) Пусть E — векторное пространство бесконечной размерности над полем K и A — кольцо $\mathrm{End}_K(E)$. Привести пример двух элементов u, v из A, таких, что ни u, ни v не являются правыми делителями нуля и $Au \cap Av = 0$.

¶ 15) Пусть X — вполне регулярное топологическое пространство, βX — его компактификация Стоуна — Чеха (*Topologie générale*, chap. IX, 2e éd., § 1, exercice 7) [1]). Для всякой точки $x \in \beta X$ обозначим через $\mathfrak{A}(x)$ максимальный идеал кольца $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, образованный такими функциями $f \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, что точка x является предельной для подмножества $f^{-1}(0)$ пространства X (*Topologie générale*, chap. X, 2e éd., § 4, exercice 15). Обозначим через $\mathfrak{A}(x)$ идеал, образованный такими функциями $f \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, что множество $f^{-1}(0)$ является следом на X некоторой окрестности точки x в βX; идеал $\mathfrak{A}(x)$ равен своему корню.

Говорят, что идеал $\mathfrak{a}$ кольца $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ является *изолированным* (соответственно *абсолютно изолированным*), если для произвольной функции $f \geqslant 0$ из $\mathfrak{a}$ любая функция g, удовлетворяющая неравенствам $0 \leqslant g \leqslant f$ (соответственно неравенству $|g| \leqslant f$), принадлежит идеалу $\mathfrak{a}$ (*Алгебра*, гл. VI, § 1, упражнение 4); тогда $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})/\mathfrak{a}$ снабжается структурой порядка (соответственно структурой решеточного порядка [2])), согласованной со структурой кольца и для которой элементами $\geqslant 0$ служат классы mod $\mathfrak{a}$ элементов $\geqslant 0$ из $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ (loc. cit.).

а) Показать, что идеал $\mathfrak{a}$ кольца $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, равный своему корню, является абсолютно изолированным (если $f \in \mathfrak{a}$ и $|g| \leqslant |f|$, то надо рассмотреть функцию, равную 0, если $f(x) = 0$, и равную $(g(x))^2/f(x)$, если $f(x) \neq 0$). Для того чтобы в этом случае факторкольцо $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})/\mathfrak{a}$ было совершенно упорядоченным, необходимо и достаточно, чтобы идеал $\mathfrak{a}$ был простым; множество простых идеалов кольца $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})/\mathfrak{a}$ является тогда совершенно упорядоченным относительно включения.

б) Для того чтобы некоторый изолированный идеал $\mathfrak{a}$ кольца $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ был таким, что $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})/\mathfrak{a}$ совершенно упорядоченно, необходимо, чтобы идеал $\mathfrak{a}$ содержался в некотором единственном максимальном идеале $\mathfrak{J}(x)$ (в этом случае $\mathfrak{a}$ содержит $\mathfrak{A}(x)$), и достаточно, чтобы $\mathfrak{a}$ содержал какой-нибудь простой идеал (в этом случае $\mathfrak{a}$ является абсолютно изолированным) (заметить, что из равенства $fg = 0$ следует, что или $f \in \mathfrak{A}$, или $g \in \mathfrak{A}$).

в) Возьмем $X = \mathbf{R}$, $x = 0$. Показать, что главный идеал, порожденный функцией $t \to |t|$, содержится в $\mathfrak{J}(0)$ и содержит $\mathfrak{A}(0)$, но не является изо-

---

[1]) См. также Келли Дж., Общая топология, «Наука», М., 1968, стр. 206, где употребляется термин «расширение Стоуна — Чеха». — *Прим. ред.*

[2]) То есть становится структурно упорядоченным в иной терминологии. — *Прим. ред.*

лированным. Главный идеал, порожденный тождественным отображением $t \to t$, содержится в $\mathfrak{J}(0)$, содержит $\mathfrak{A}(0)$ и является изолированным; однако последний идеал не является абсолютно изолированным.

г) Показать, что если $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ — два простых идеала в кольце $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, то $\mathfrak{p}\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ (и, в частности, $\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p}$) и идеал $\mathfrak{p} + \mathfrak{q}$ либо прост, либо равен $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$. (Если $\mathfrak{p} + \mathfrak{q} \neq \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$, то заметить, что идеал $\mathfrak{p} + \mathfrak{q}$ абсолютно изолирован и равен своему корню; воспользоваться пунктом а).)

д) Для того чтобы идеал $\mathfrak{A}(x)$ был простым, необходимо и достаточно, чтобы для всякой функции $f \in \mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ замыкание в βX одного из двух множеств $f^{-1}((0, +\infty))$, $f^{-1}((-\infty, 0))$ было окрестностью точки x. Получить пример, в котором идеал $\mathfrak{A}(x)$ прост и не максимален (рассмотреть топологическое пространство, ассоциированное с нетривиальным ультрафильтром; см. *Общая топология*, гл. I, § 6, п° 5).

е) Предположим, что $x \in X$. Для выполнения равенства $\mathfrak{A}(x) = \mathfrak{J}(x)$ необходимо и достаточно, чтобы всякое счетное пересечение окрестностей точки x в пространстве X было окрестностью этой точки (см. *Общая топология*, гл. I, § 7, упр. 7).

ж) Показать, что кольцо $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$ можно канонически отождествить с полным кольцом частных кольца $\mathscr{C}^\infty(X; \mathbf{R})$.

16) Пусть A — топологическое кольцо (не обязательно коммутативное). Говорят, что топология кольца A *линейна* (слева), если открытые левые идеалы кольца A образуют фундаментальную систему окрестностей нуля. Если это условие выполнено, то множество $\mathscr{F}$ открытых левых идеалов в A удовлетворяет следующим требованиям:

1° Всякий левый идеал кольца A, содержащий некоторый идеал $\mathfrak{m} \in \mathscr{F}$, принадлежит $\mathscr{F}$.

2° Любое конечное пересечение идеалов из $\mathscr{F}$ снова принадлежит $\mathscr{F}$.

3° Если $\mathfrak{m} \in \mathscr{F}$ и $a \in A$, то левый идеал $\mathfrak{n}$, состоящий из элементов $x \in A$, таких, что $xa \in \mathfrak{m}$, принадлежит $\mathscr{F}$.

Обратно, если множество $\mathscr{F}$ левых идеалов кольца A удовлетворяет этим трем условиям, то существует, и притом единственная, топология, согласованная со структурой кольца A, для которой $\mathscr{F}$ служит множеством открытых левых идеалов в A. Говорят, что такое множество $\mathscr{F}$ левых идеалов является *топологизирующим* (слева).

17) [1]) Пусть A — какое-нибудь (не обязательно коммутативное) кольцо и $\mathscr{F}$ — некоторое топологизирующее множество (упражнение 16) левых идеалов кольца A.

а) Говорят, что некоторый A-модуль (левый) M является *$\mathscr{F}$-бесконечно малым*, если аннулятор любого элемента модуля M принадлежит $\mathscr{F}$. Если M является $\mathscr{F}$-бесконечно малым модулем, то таковы же все его подмодули и фактормодули. Если M и N — два $\mathscr{F}$-бесконечно малых модуля над кольцом A, то $\mathscr{F}$-бесконечно малой является и прямая сумма $M \oplus N$. Для того чтобы фактормодуль $A_s/\mathfrak{m}$ был $\mathscr{F}$-бесконечно малым, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{m} \in \mathscr{F}$. Если $(0) \in \mathscr{F}$, то $\mathscr{F}$-бесконечно малым является всякий A-модуль; если множество $\mathscr{F}$ состоит из единственного левого идеала A_s, то всякий A-модуль, являющийся $\mathscr{F}$-бесконечно малым, равен 0.

б) Для любого A-модуля M существует наибольший $\mathscr{F}$-бесконечно малый его подмодуль, который будет обозначаться через $\mathscr{F}M$. Для любого гомоморфизма A-модулей $u: M \to N$ справедливо включение $u(\mathscr{F}M) \subset \mathscr{F}N$; пусть $\mathscr{F}u$ — отображение модуля $\mathscr{F}M$ в модуль $\mathscr{F}N$, график которого совпадает с графиком ограничения $u \mid \mathscr{F}M$. Если имеется некоторая точная последовательность A-модулей

$$0 \to M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P,$$

---

[1]) Упражнения с 17 по 25 (ранее не опубликованные) нам сообщил П. Габриэль.

то последовательность

$$0 \to \mathcal{F}M \xrightarrow{\mathcal{F}u} \mathcal{F}N \xrightarrow{\mathcal{F}v} \mathcal{F}P$$

также точна. Показать, что $\mathcal{F}A_s$ является двусторонним идеалом кольца A.

в) Пусть $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ — два элемента множества $\mathcal{F}$, причем $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}$; для любого левого A-модуля M каноническое вложение $j\colon \mathfrak{m} \to \mathfrak{n}$ определяет некоторый гомоморфизм коммутативных групп

$$u_{\mathfrak{m},\,\mathfrak{n}} = \mathrm{Hom}_A(j,\ 1_M)\colon \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{n},\ M) \to \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m},\ M).$$

Если множество $\mathcal{F}$ упорядочить с помощью отношения включения, то гомоморфизмы $u_{\mathfrak{m},\,\mathfrak{n}}$ будут определять индуктивную систему коммутативных групп, индуктивный предел которой будет обозначаться через $M_{(\mathcal{F})}$. Отображения $u_{\mathfrak{m},\,A_s}$ составляют индуктивную систему, индуктивным пределом которой является отображение (называемое каноническим) модуля $M = \mathrm{Hom}_A(A_s, M)$ в модуль $M_{(\mathcal{F})}$. Аналогичным образом, если $v\colon M \to N$ — какой-нибудь гомоморфизм левых A-модулей, то гомоморфизмы $v_{\mathfrak{m}} = \mathrm{Hom}_A(1, v)\colon \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}, M) \to \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}, N)$ образуют индуктивную систему, индуктивный предел которой есть гомоморфизм коммутативных групп $v_{(\mathcal{F})}\colon M_{(\mathcal{F})} \to N_{(\mathcal{F})}$. Если $0 \to M \xrightarrow{v} N \xrightarrow{w} P$ — некоторая точная последовательность A-модулей, то последовательность $0 \to M_{(\mathcal{F})} \xrightarrow{v_{(\mathcal{F})}} N_{(\mathcal{F})} \xrightarrow{w_{(\mathcal{F})}} P_{(\mathcal{F})}$ также точна.

18) а) Пусть A — кольцо, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — два топологизирующих (см. упражнение 16) множества левых идеалов кольца A. Обозначим через $\mathcal{F}\cdot\mathcal{G}$ множество левых идеалов $\mathfrak{l}$ кольца A, для которых существует такой левый идеал $\mathfrak{n} \in \mathcal{G}$, что модуль $\mathfrak{n}/\mathfrak{l}$ является $\mathcal{F}$-бесконечно малым. Показать, что $\mathcal{F}\cdot\mathcal{G}$ — топологизирующее множество; кроме того, для того чтобы некоторый A-модуль M был $\mathcal{F}\cdot\mathcal{G}$-бесконечно малым, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой $\mathcal{F}$-бесконечно малый подмодуль M' модуля M, что модуль M/M' $\mathcal{G}$-бесконечно мал. Показать, что закон композиции $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathcal{F}\cdot\mathcal{G}$ в множестве топологизирующих множеств левых идеалов кольца A ассоциативен.

Мы говорим, что множество $\mathcal{F}$ *идемпотентно*, если $\mathcal{F}\cdot\mathcal{F} = \mathcal{F}$.

б) Показать, что множество $\mathcal{F}\cdot\mathcal{G}$ содержит все идеалы вида $\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{n}$, где $\mathfrak{m} \in \mathcal{F}$ и $\mathfrak{n} \in \mathcal{G}$.

в) Пусть K — поле, а B — кольцо многочленов с коэффициентами в K от бесконечной системы переменных (X_i) $(i \geqslant 0)$. Пусть $\mathfrak{b}$ — идеал кольца B, порожденный элементами X_iX_j $(i \neq j)$, и пусть A — кольцо $B/\mathfrak{b}$, ξ_i — класс $\bmod \mathfrak{b}$ элемента X_i, $\mathfrak{m}$ — идеал в A, порожденный классами ξ_i. Возьмем в качестве $\mathcal{F}$ множество тех идеалов, которые содержат некоторую степень идеала $\mathfrak{m}$. Показать, что $\mathcal{F}$ — топологизирующее множество и содержит произведение любых двух своих элементов, однако само оно идемпотентным не является.

г) Предположим, что A — *коммутативное* кольцо и $\mathcal{F}$ — топологизирующее множество таких идеалов кольца A, что любой $\mathfrak{m} \in \mathcal{F}$ содержит некоторый идеал $\mathfrak{n} \in \mathcal{F}$ *конечного типа*. Показать, что если произведение любых двух идеалов из $\mathcal{F}$ принадлежит $\mathcal{F}$, то $\mathcal{F}$ идемпотентно.

¶ 19) Пусть $\mathcal{F}$ — множество левых идеалов кольца A; допустим, что $\mathcal{F}$ топологизирующее и идемпотентное (упражнения 16 и 18).

а) Показать, что если $\mathfrak{m} \in \mathcal{F}$, $\mathfrak{n} \in \mathcal{F}$ и $u \in \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{n}, A_s)$, то $u^{-1}(\mathfrak{m}) \in \mathcal{F}$ (рассмотреть точную последовательность $0 \to \mathfrak{n}/u^{-1}(\mathfrak{m}) \to A_s/u^{-1}(\mathfrak{m}) \to A_s/\mathfrak{n} \to 0$). Для любого A-модуля M и любого гомоморфизма $v \in \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}, M)$ обозначим через $u\cdot v$ канонический образ в $M_{(\mathcal{F})}$ (упражнение 17 в)) композиции

гомоморфизмов $u^{-1}(\mathfrak{m}) \xrightarrow{u} \mathfrak{m} \xrightarrow{v} M$. Показать, что отображение $(u, v) \to u \cdot v$ является $\mathbf{Z}$-билинейным и ему соответствует $\mathbf{Z}$-линейное отображение

$$\psi_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}\colon \operatorname{Hom}_A(\mathfrak{n}, A_s) \otimes_{\mathbf{Z}} \operatorname{Hom}_A(\mathfrak{m}, M) \to M_{(\mathscr{F})}.$$

Эти отображения образуют индуктивную систему, и ее индуктивный предел канонически соответствует некоторому $\mathbf{Z}$-билинейному отображению

$$\psi\colon A_{(\mathscr{F})} \times M_{(\mathscr{F})} \to M_{(\mathscr{F})}.$$

Показать, что если $M = A_s$, то ψ представляет собой внутренний закон композиции, который превращает $A_{(\mathscr{F})}$ в кольцо, и каноническое отображение $A \to A_{(\mathscr{F})}$ является гомоморфизмом колец. Для любого левого A-модуля M отображение ψ задает внешний закон, определяющий на $M_{(\mathscr{F})}$ структуру левого $A_{(\mathscr{F})}$-модуля. Относительно этой структуры (и относительно канонического отображения $A \to A_{(\mathscr{F})}$) каноническое отображение $M \to M_{(\mathscr{F})}$ является гомоморфизмом A-модулей.

б) Если $i\colon M \to M_{(\mathscr{F})}$ — канонический гомоморфизм, то показать, что $\operatorname{Ker}(i) = \mathscr{F}M$ и что A-модуль $\operatorname{Coker}(i) = M_{(\mathscr{F})}/i(M)$ является $\mathscr{F}$-бесконечно малым.

в) Для любого левого A-модуля M обозначим через $M_{\mathscr{F}}$ левый A-модуль $(M/\mathscr{F}M)_{(\mathscr{F})}$, а через j_M — каноническое отображение-композицию

$$M \to M/\mathscr{F}M \to M_{\mathscr{F}};$$

тогда $\operatorname{Ker}(j_M) = \mathscr{F}M$ и A-модуль $\operatorname{Coker}(j_M) = M_{\mathscr{F}}/j_M(M)$ является $\mathscr{F}$-бесконечно малым.

Пусть $u\colon P \to M$, $h\colon P \to Q$ — такие гомоморфизмы A-модулей, что $\operatorname{Ker}(h)$ и $\operatorname{Coker}(h)$ являются $\mathscr{F}$-бесконечно малыми модулями; показать, что существует, и притом единственный, A-гомоморфизм $v\colon Q \to M_{\mathscr{F}}$, дающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{u} & M \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_M} \\ Q & \xrightarrow{v} & M_{\mathscr{F}} \end{array}$$

(Сначала надо свести все к случаю, когда h инъективен; после этого, отождествив P с некоторым подмодулем в Q, заметить, что для любого $x \in Q$ существует такой идеал $\mathfrak{m} \in \mathscr{F}$, что $\mathfrak{m}x \subset P$; затем надо сопоставить элементу x канонический образ в $M_{\mathscr{F}}$ композиции гомоморфизмов

$$\mathfrak{m} \xrightarrow{x} \mathfrak{m}x \to P \xrightarrow{u} M \to M/\mathscr{F}M.)$$

г) Показать, что для любого гомоморфизма A-модулей $u\colon M \to N$ существует единственный гомоморфизм $u_{\mathscr{F}}\colon M_{\mathscr{F}} \to N_{\mathscr{F}}$, дающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{u} & N \\ {\scriptstyle j_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_N} \\ M_{\mathscr{F}} & \xrightarrow{u_{\mathscr{F}}} & N_{\mathscr{F}} \end{array}$$

(использовать а), б) и в)). Показать, что если $0 \to M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P$ — некоторая точная последовательность A-модулей, то последовательность $0 \to M_{\mathscr{F}} \xrightarrow{u_{\mathscr{F}}} \to N_{\mathscr{F}} \xrightarrow{v_{\mathscr{F}}} P_{\mathscr{F}}$ также точна (заметить, что отображение $M/\mathscr{F}M \to N/\mathscr{F}N$, получаемое из u при переходе к фактормодулям, инъективно).

Показать, что отображения $j_{M_{\mathscr{F}}}$ и $(j_M)_{\mathscr{F}}$ совпадают и являются изоморфизмами (следовательно, $\mathscr{F}M_{\mathscr{F}} = 0$). Если N' — некоторый A-подмодуль в $M_{\mathscr{F}}$, то $\left(j_M^{-1}(N')\right)_{\mathscr{F}}$ канонически отождествляется с $N'_{\mathscr{F}}$ (заметить, что если положить $N = j_M^{-1}(N')$, то модуль $N'/j_M(N)$ будет $\mathscr{F}$-бесконечно малым).

д) Пусть M — левый A-модуль, φ: $A \times M \to M$ — некоторое $\mathbf{Z}$-билинейное отображение $(a, m) \to am$. Показать, что существует, и притом единственное, $\mathbf{Z}$-билинейное отображение $\varphi_{\mathscr{F}}$: $A_{\mathscr{F}} \times M_{\mathscr{F}} \to M_{\mathscr{F}}$, определяющее коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A \times M & \xrightarrow{\varphi} & M \\ {\scriptstyle j_A \times j_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_M} \\ A_{\mathscr{F}} \times M_{\mathscr{F}} & \xrightarrow{\varphi_{\mathscr{F}}} & M_{\mathscr{F}} \end{array}$$

Таким образом, на $A_{\mathscr{F}}$ определяется структура кольца, а на $M_{\mathscr{F}}$ — структура левого $A_{\mathscr{F}}$-модуля. Если u: $M \to N$ — некоторый гомоморфизм A-модулей, то $u_{\mathscr{F}}$: $M_{\mathscr{F}} \to N_{\mathscr{F}}$ представляет собой гомоморфизм $A_{\mathscr{F}}$-модулей. Для того чтобы при любом A-модуле M отображение $u \to u_{\mathscr{F}}$ из $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ в $\mathrm{Hom}_{A_{\mathscr{F}}}(M_{\mathscr{F}}, N_{\mathscr{F}})$ было биективным, необходимо и достаточно, чтобы отображение j_N было биективным.

е) Возьмем в качестве A кольцо многочленов $K[X, Y]$ над полем K, а в качестве $\mathscr{F}$ — множество (топологизирующее и идемпотентное) идеалов кольца A, содержащих некоторую степень идеала $\mathfrak{m} = (X) + (Y)$. Если $M = A/AX$ и если u: $A \to M$ — каноническое отображение, то показать, что отображение $u_{\mathscr{F}}$: $A_{\mathscr{F}} \to M_{\mathscr{F}}$ не сюръективно. (Показать, что $A_{\mathscr{F}}$ отождествляется с A, а $M_{\mathscr{F}}$ — с $K[\overline{Y}, 1/\overline{Y}]$, где $\overline{Y}$ — класс элемента Y в M, так что $X\overline{Y} = 0$ и $X(1/\overline{Y}) = 0$.)

ж) Считая, что $\mathscr{F}^1M = M_{\mathscr{F}}/j_M(M)$, показать, что для любой точной последовательности A-модулей $0 \to M \to N \to P \to 0$ имеет место точная последовательность $0 \to \mathscr{F}M \to \mathscr{F}N \to \mathscr{F}P \to \mathscr{F}^1M \to \mathscr{F}^1N \to \mathscr{F}^1P$ (воспользоваться змеевидной диаграммой).

з) Пусть $\mathscr{F}'$ — множество левых идеалов $\mathfrak{l}'$ кольца $A_{\mathscr{F}}$, для которых $(A_{\mathscr{F}})_s/\mathfrak{l}'$ является $\mathscr{F}$-бесконечно малым A-модулем. Показать, что $\mathscr{F}'$ представляет собой множество левых идеалов кольца $A_{\mathscr{F}}$, содержащих $j_A(\mathfrak{m})$, где $\mathfrak{m} \in \mathscr{F}$ (воспользовавшись точной последовательностью из г); заметить, что $\mathfrak{m}_{\mathscr{F}} = A_{\mathscr{F}}$ для любого $\mathfrak{m} \in \mathscr{F}$, следовательно, модуль $A_{\mathscr{F}}/j_A(\mathfrak{m})$ является $\mathscr{F}$-бесконечно малым). Для любого $A_{\mathscr{F}}$-модуля M' имеет место равенство $\mathscr{F}M' = \mathscr{F}'M'$ (здесь M' рассматривается как A-модуль относительно отображения j_A). Кроме того, множество $\mathscr{F}'$ — топологизирующее и идемпотентное, и $M'_{\mathscr{F}'}$ канонически отождествляется с $M'_{\mathscr{F}}$.

20) Пусть $\mathscr{F}$ — топологизирующее и идемпотентное множество левых идеалов некоторого кольца A.

а) Предположим, что любой идеал из $\mathscr{F}$ содержит некоторый идеал *конечного типа*, также принадлежащий $\mathscr{F}$. Пусть M — некоторый A-модуль, а

$(N_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство подмодулей модуля M, снабженное возрастающей фильтрацией, объединение элементов которого равно M. Показать, что $M_{\mathscr{F}}$ является объединением $A_{\mathscr{F}}$-подмодулей $(N_\iota)_{\mathscr{F}}$. В частности, для любого семейства A-модулей $(M_\lambda)_{\lambda\in L}$ модуль $\left(\bigoplus_{\lambda\in L} M_\lambda\right)_{\mathscr{F}}$ канонически изоморфен модулю $\bigoplus_{\lambda\in L} (M_\lambda)_{\mathscr{F}}$.

б) Допустим, что выполнены условия пункта а) и, кроме того, для любого сюръективного гомоморфизма A-модулей $u\colon M\to N$ гомоморфизм $u_{\mathscr{F}}\colon M_{\mathscr{F}}\to N_{\mathscr{F}}$ сюръективен. Тогда каноническое отображение $A_{\mathscr{F}}\otimes_A M\to M_{\mathscr{F}}$, определенное с помощью внешнего закона на $A_{\mathscr{F}}$-модуле $M_{\mathscr{F}}$, является изоморфизмом $A_{\mathscr{F}}$-модулей (свести к случаю, когда M — свободный модуль); кольцо $A_{\mathscr{F}}$ есть плоский левый A-модуль и левые $A_{\mathscr{F}}$-модули совпадают с такими левыми A-модулями M, для которых отображение $j_M\colon M\to M_{\mathscr{F}}$ биективно.

в) Предположим, что кольцо A является бесконечным произведением колец $\prod_{\iota\in I} A_\iota$; обозначим через e_ι единичный элемент кольца A_ι и возьмем в качестве $\mathscr{F}$ множество левых идеалов кольца A, содержащих двусторонний идеал $\mathfrak{a}=\bigoplus_{\iota\in I} A_\iota$ (кольца A_ι канонически отождествляются с идеалами в A). Показать, что для любого левого A-модуля M модуль $M_{\mathscr{F}}$ можно отождествить с произведением $\prod_{\iota\in I}(e_\iota M)$ и, в частности, $A_{\mathscr{F}}=A$. Получить отсюда, что для любого сюръективного A-гомоморфизма $u\colon M\to N$ гомоморфизм $u_{\mathscr{F}}\colon M_{\mathscr{F}}\to N_{\mathscr{F}}$ также сюръективен; привести, однако, примеры таких A-модулей M, что гомоморфизм j_M не биективен.

г) Предположим, что выполнены условия пункта а) и, кроме того, допустим, что A — коммутативное кольцо. Показать, что если модуль M является $\mathscr{F}$-бесконечно малым, то $M_{(\mathscr{F})}=0$.

21) Пусть A — коммутативное кольцо, $\mathscr{F}$ — идемпотентное топологизирующее множество идеалов кольца A.

а) В этих условиях кольцо $A_{\mathscr{F}}$ коммутативно (заметить, что если $\mathfrak{m}\in\mathscr{F}$ и $u\in \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}, A)$, то $u(\mathfrak{m}^2)\subset\mathfrak{m}$; если v — второй элемент из $\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}, A)$, то показать, что $v(u(xy))=u(v(xy))$ при $x\in\mathfrak{m}$, $y\in\mathfrak{m}$).

б) Пусть $\mathscr{F}'$ — семейство таких идеалов $\mathfrak{l}'$ кольца $A_{\mathscr{F}}$, что $A_{\mathscr{F}}/\mathfrak{l}'$ является $\mathscr{F}$-бесконечно малым (упражнение 19з)). Показать, что отображение $\mathfrak{p}\to\mathfrak{p}_{\mathscr{F}}$ является биективным отображением множества простых идеалов $\mathfrak{p}$ кольца A, не принадлежащих $\mathscr{F}$, на множество простых идеалов кольца $A_{\mathscr{F}}$, не принадлежащих $\mathscr{F}'$. (Показать сначала, что если кольцо A целостное, то таким же будет и $A_{\mathscr{F}}$, и воспользоваться замечанием, аналогичным замечанию пункта а); далее воспользоваться точной последовательностью из упражнения 19г), для того чтобы установить простоту идеала $\mathfrak{p}_{\mathscr{F}}$. Напомним, что если $\mathfrak{p}'$ — простой идеал из $A_{\mathscr{F}}$, не принадлежащий $\mathscr{F}'$, и $\mathfrak{p}'=j_A^{-1}(\mathfrak{p}')$, то $\mathfrak{p}'=\mathfrak{p}_{\mathscr{F}}$.)

в) Пусть B — некоторая A-алгебра и $\mathscr{G}$ — множество таких левых идеалов $\mathfrak{l}$ из B, что модуль $B_s/\mathfrak{l}$ является $\mathscr{F}$-бесконечно малым. Показать, что $\mathscr{G}$ есть множество левых идеалов B, содержащих идеал вида $B\cdot\mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}\in\mathscr{F}$; получить отсюда, что множество $\mathscr{G}$ — топологизирующее и идемпотентное; кроме того, установить, что для любого B-модуля N справедливо равенство $\mathscr{F}N=\mathscr{G}N$, причем $N_{\mathscr{F}}$ канонически отождествляется с $N_{\mathscr{G}}$.

г) Пусть S — мультипликативная система кольца A, и пусть $\mathscr{F}$ — множество идеалов из A, пересекающих S. Показать, что $\mathscr{F}$ — топологизирующее

и идемпотентное и что для любого A-модуля M модули $M_{(\mathscr{F})}$ и $M_{\mathscr{F}}$ канонически отождествляются с $S^{-1}M$ (заметить, что каждый идеал из $\mathscr{F}$ содержит некоторый главный идеал As, где $s \in S$).

¶ 22) Пусть A — некоторое кольцо (не обязательно коммутативное), и пусть S — мультипликативная система в A.

а) Пусть $\mathscr{F}$ — множество таких левых идеалов $\mathfrak{l}$ кольца A, что при любом $a \in A$ существует элемент $s \in S$, для которого $sa \in \mathfrak{l}$; из этого, в частности, следует, что $\mathfrak{l} \cap S \neq \emptyset$. Показать, что множество $\mathscr{F}$ — топологизирующее и идемпотентное.

б) Пусть B — некоторое кольцо и $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм колец. Мы говорим, что пара (B, φ) является *левым кольцом частных* кольца A со знаменателями в системе S, если удовлетворяются следующие условия:

I) Если $\varphi(a) = 0$, то $sa = 0$ для некоторого $s \in S$.

II) Если $s \in S$, то элемент $\varphi(s)$ обратим в B.

III) Любой элемент из B имеет вид $(\varphi(s))^{-1}\varphi(a)$, где $a \in A$.

Показать, что следующие свойства эквивалентны:

α) Кольцо A обладает левым кольцом частных со знаменателями в системе S.

β) Выполняются следующие условия:

β_1) для любых $s \in S$, $a \in A$ существуют такие элементы $t \in S$ и $b \in A$, что $ta = bs$;

β_2) если $a \in A$ и $s \in S$ удовлетворяют равенству $as = 0$, то существует элемент $t \in S$, для которого $ta = 0$.

γ) Канонические образы элементов из S в $A_{\mathscr{F}}$ обратимы.

Кроме того, из этих свойств вытекают следующие:

δ) Главные идеалы As, где $s \in S$, принадлежат $\mathscr{F}$ и каждый идеал $\mathfrak{m} \in \mathscr{F}$ содержит некоторый из этих главных идеалов.

ε) Левый аннулятор любого элемента $s \in S$ содержится в $\mathscr{F}A_s$.

ζ) Для любой точной последовательности A-модулей $0 \to M \xrightarrow{h} N \xrightarrow{p} P \to 0$ последовательность $0 \to M_{\mathscr{F}} \xrightarrow{h_{\mathscr{F}}} N_{\mathscr{F}} \xrightarrow{p_{\mathscr{F}}} P_{\mathscr{F}} \to 0$ точна.

(Надо показать, что α) $\Rightarrow$ β) $\Rightarrow$ γ) $\Rightarrow$ α). Чтобы установить импликацию γ) $\Rightarrow$ α), заметьте, что для любого A-модуля M и всякого $x \in \mathscr{F}M$ существует такой элемент $s \in S$, что $sx = 0$. Для того чтобы установить, что из β) следует γ), докажите сначала, что из β) следует δ), ε) и ζ). Чтобы показать, что из β) следует ζ), установите при помощи δ), что если $\mathfrak{m} \in \mathscr{F}$ и $u \in \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}, P/\mathscr{F}P)$, то существуют элемент $s \in S$, удовлетворяющий условию $As \subset \mathfrak{m}$, и гомоморфизм $v \in \mathrm{Hom}_A(As, N/\mathscr{F}N)$, для которых диаграмма

$$\begin{array}{ccc} As & \xrightarrow{v} & N/\mathscr{F}N \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ \mathfrak{m} & \xrightarrow[u]{} & P/\mathscr{F}P \end{array}$$

коммутативна, если i — каноническое вложение и p' — отображение, получаемое из p при переходе к фактормодулям. Наконец, рассмотрите для любого $s \in S$ точную последовательность

$$0 \to N \to A \xrightarrow{\mu_s} A \to A/As \to 0,$$

в которой μ_s — это гомотетия $\lambda \to \lambda s$; далее надо использовать ε), ζ) и упражнение 4 из *Алгебры*, гл. I, § 8.)

в) Вывести из пункта б), что если A обладает левым кольцом частных (B, φ) со знаменателями в системе S, то это кольцо обладает следующим универсальным свойством: для всякого гомоморфизма колец $f\colon A \to C$, при котором $f(s)$ обратим в C для любого элемента $s \in S$, существует, и притом

единственный, гомоморфизм g: $B \to C$, удовлетворяющий равенству $f = g \circ \varphi$. В частности, кольцо B канонически изоморфно $A_{\mathscr{F}}$.

г) Аналогичным образом определяется *правое кольцо частных* кольца A со знаменателями в мультипликативной системе S. Вывести из в), что если одновременно существуют правое и левое кольца частных кольца A со знаменателями в S, то эти кольца изоморфны.

д) Пусть E — векторное пространство над полем K, $(e_\iota)_{\iota \in I}$ — некоторый базис в E и T — тензорная алгебра пространства E. Пусть J — непустое подмножество множества I, отличное от I, а S — мультипликативная система алгебры T порожденная теми e_i, для которых $i \in J$. Показать, что T не обладает ни левым, ни правым кольцом частных со знаменателями в S.

е) В обозначениях пункта д) будем считать, что $I = \mathbf{N}$, и рассмотрим факторкольцо A кольца T по двустороннему идеалу, порожденному элементами e_0^2 и $e_0 e_i - e_{i+1} e_0$ для любого $i > 0$ и $e_i e_j - e_j e_i$ для $i > 0$, $j > 0$. Пусть S' — мультипликативное множество, порожденное каноническими образами элементов e_i в A для $i > 0$. Показать, что A обладает левым кольцом частных со знаменателями в системе S', но не имеет правого кольца частных со знаменателями в этой же системе.

ж) Допустим, что A обладает левым кольцом частных со знаменателями в S. Пусть R обозначает следующее отношение на множестве $S \times A$ между (s, x) и (t, y): «существуют такие $r \in S$, $u \in A$, $v \in A$, что $r = us = vt$ и что $ux = vy$». Показать, что R — отношение эквивалентности, и определить на множестве $B = (S \times A)/R$ такую структуру кольца, чтобы пара, образованная системой S и отображением φ: $A \to B$, переводящим $x \in A$ в класс элемента $(1, x)$, была левым кольцом частных кольца A со знаменателями в системе S (воспользоваться тем фактом, что для $s \in S$ и $t \in S$ существуют такие $u \in A$ и $v \in A$, что $r = us = vt$ принадлежит S). (Случай $S = A - \{0\}$ сравните с упражнением 8 из *Алгебры*, гл. I, § 9.)

23) а) Пусть A — нётерово слева кольцо без делителей нуля. Показать, что A обладает левым телом частных (воспользоваться упражнением 14а), для того чтобы показать, что условие β_1 упражнения 22б) выполняется для $S = A - \{0\}$).

б) Пусть A — кольцо, нётерово слева и справа и не имеющее делителей 0. Показать, что любой левый A-модуль M конечного типа, всякий отличный от нуля элемент которого свободен, является подмодулем некоторого свободного A-модуля. (Вложить каноническим образом M в $K \otimes_A M$, где K — тело частных) (левое или правое) кольца A, рассматриваемое как правый A-модуль; если (x_i) — базис левого векторного K-пространства $K \otimes_A M$, то показать, что существует $a \neq 0$ в кольце A, для которого модуль M содержится в A-подмодуле пространства $K \otimes_A M$, порожденном элементами $a^{-1}x_i$.)

¶ 24) Пусть A — кольцо, коммутативное или нет, и $\mathscr{F}$ — множество левых идеалов $\mathfrak{l}$ кольца A, таких, что $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{m} \neq 0$ для *любого* левого идеала $\mathfrak{m} \neq 0$ из A.

Для включения $\mathfrak{l} \in \mathscr{F}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $a \neq 0$ кольца A существовал такой элемент $b \in A$, что $ba \neq 0$ и $ba \in \mathfrak{l}$. Любой идеал $\mathfrak{l}$ множества $\mathscr{F}$ содержит *левый цоколь* кольца A (*Алгебра*, гл. VIII, § 5, упражнение 9), а если A артиново, то $\mathscr{F}$ образовано идеалами, содержащими левый цоколь кольца A.

а) Показать, что $\mathscr{F}$ является топологизирующим множеством (упражнение 16). Вывести отсюда, что множество $\mathfrak{a}$ тех элементов $a \in A$, для которых $\mathfrak{l}a = 0$ при некотором $\mathfrak{l} \in \mathscr{F}$ (это объединение правых аннуляторов идеалов $\mathfrak{l} \in \mathscr{F}$) является *двусторонним* идеалом в A, который не содержит ни одного идемпотента. Если A — нётерово слева кольцо, то показать, что $\mathfrak{a}$ — нильпотентный идеал (доказать сначала, что нильпотентен любой элемент $a \in \mathfrak{a}$ и рассмотреть левые аннуляторы элементов a^n; затем применить упражнение 26б) из *Алгебры*, гл. VIII, § 6).

Пусть K — поле, а B — кольцо многочленов с коэффициентами из K от переменных Y и X_i ($i \geqslant 1$). Пусть $\mathfrak{b}$ — идеал кольца B, порожденный элементами X_iX_j ($i \neq j$) и $Y^{i-1}X_i$, и пусть A — факторкольцо $B/\mathfrak{b}$. Показать, что в кольце A только что определенный идеал $\mathfrak{a}$ содержит класс элемента Y, не являющийся нильпотентным элементом.

б) Показать, что для всякого левого идеала $\mathfrak{m}$ кольца A в A существует такой левый идеал $\mathfrak{n}$, что $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n} = 0$ и $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} \in \mathscr{F}$. (Выбрать в качестве $\mathfrak{n}$ идеал, максимальный среди идеалов $\mathfrak{l}$, для которых $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l} = 0$.)

в) Кольцо A называется *чистым* (слева), если двусторонний идеал $\mathfrak{a}$, определенный в пункте а), равен 0. Когда это имеет место, множество $\mathscr{F}$ идемпотентно. (Пусть $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ — такие левые идеалы кольца A, что $\mathfrak{n} \in \mathscr{F}$, $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{n}$ и $\mathfrak{n}/\mathfrak{l}$ является $\mathscr{F}$-бесконечно малым, а $\mathfrak{m} \neq 0$. Если $x \neq 0$ принадлежит идеалу $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n}$, то существует такой идеал $\mathfrak{r} \in \mathscr{F}$, что $\mathfrak{r}x \subset \mathfrak{l} \cap \mathfrak{m}$.)

¶ 25) Сохраняя обозначения упражнения 24, будем считать, что A — кольцо, чистое слева.

а) Показать, что каноническое отображение $j_A\colon A \to A_{\mathscr{F}}$ инъективно, благодаря чему можно отождествить кольцо A с некоторым подкольцом кольца $A_{\mathscr{F}}$. Пусть $\mathscr{F}'$ — множество таких левых идеалов $\mathfrak{l}'$ кольца $A_{\mathscr{F}}$, что $\mathfrak{l}'_{\mathscr{F}} = A_{\mathscr{F}}$; показать, что множество $\mathscr{F}'$ совпадает с множеством тех левых идеалов $\mathfrak{l}'$ кольца $A_{\mathscr{F}}$, для которых $\mathfrak{l}' \cap \mathfrak{m}' \neq 0$ при любом левом идеале $\mathfrak{m}' \neq 0$ кольца $A_{\mathscr{F}}$. (Показать сначала, что для каждого левого идеала $\mathfrak{m}' \neq 0$ из $A_{\mathscr{F}}$ имеет место неравенство $A \cap \mathfrak{m}' \neq 0$; с другой стороны, заметить, что идеалы $\mathfrak{l}' \in \mathscr{F}'$ — это в точности левые идеалы из $A_{\mathscr{F}}$, содержащие некоторый идеал $\mathfrak{m} \in \mathscr{F}$.) Показать, что кольцо $A_{\mathscr{F}}$ чисто слева.

б) Показать, что $A_{\mathscr{F}}$ является *инъективным* A-модулем, т. е. (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 2, exercice 11) [1]), что для всякого левого идеала $\mathfrak{l}$ кольца A и всякого гомоморфизма $u \in \mathrm{Hom}_A(\mathfrak{l}, (A_{\mathscr{F}})_s)$ существует такой элемент $a' \in A_{\mathscr{F}}$, что $u(x) = xa'$ для любого $x \in \mathfrak{l}$. (Воспользоваться упражнением 24б) и упражнением 19в).) Получить отсюда, что любой эндоморфизм A-модуля $A_{\mathscr{F}}$ имеет вид $u\colon x \to xa'$, где $a' \in A_{\mathscr{F}}$ (обратить внимание на то, что $\mathrm{Hom}_A(A, A_{\mathscr{F}}) = \mathrm{Hom}_{A_{\mathscr{F}}}(A_{\mathscr{F}}, A_{\mathscr{F}})$ в силу упражнения 19д)); кроме того, имеет место равенство $\mathrm{Ker}(u) = (\mathrm{Ker}(u))_{\mathscr{F}}$.

в) Показать, что для любого левого идеала $\mathfrak{l}$ кольца A кольцо $\mathfrak{l}_{\mathscr{F}}$ является прямым слагаемым в $A_{\mathscr{F}}$. (Пусть $\mathfrak{m}$ — левый идеал кольца A, такой, что $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l} = 0$ и $\mathfrak{m} + \mathfrak{l} \in \mathscr{F}$; продолжить проекцию идеала $\mathfrak{m} + \mathfrak{l}$ на $\mathfrak{m}$, равную нулю на $\mathfrak{l}$, до эндоморфизма p кольца $A_{\mathscr{F}}$; показать, что $p^2 = p$ и что $\mathrm{Ker}(p) = \mathfrak{l}_{\mathscr{F}}$.)

г) Показать, что $A_{\mathscr{F}}$ — абсолютно плоское кольцо (гл. I, § 2, упражнение 17). (Свести рассмотрение к случаю, когда $A = A_{\mathscr{F}}$. Если u — эндоморфизм левого A-модуля A_s вида $x \to xa$, то $\mathrm{Ker}(u) = (\mathrm{Ker}(u))_{\mathscr{F}}$ и, следовательно, $\mathrm{Ker}(u)$ обладает дополнительным идеалом $\mathfrak{m}$ в A_s; заметить, что $\mathrm{Im}(u)$ изоморфен $\mathfrak{m}$, а потому *инъективен* (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 2, exercice 11) [2]); по этой причине $\mathrm{Im}(u)$ является прямым слагаемым модуля A_s (*там же*). В заключение воспользоваться упражнением 13 из *Algébre*, chap. II, 3e éd., § 1.)

¶ 26) а) Показать, что всякое кольцо Цорна (*Алгебра*, гл. VIII, § 6, упражнение 13) без ненулевых нильпотентных идеалов чисто слева; в частности,

---

[1]) См. также [КЭ], гл. I, § 3, теорема 3.2, или [Л], стр. 113. — *Прим. перев.*

[2]) См. также [КЭ], гл. I, § 3. — *Прим. перев.*

всякое абсолютно плоское кольцо чисто слева; то же можно сказать и о примитивном кольце, цоколь которого отличен от 0.

б) Пусть A — примитивное слева кольцо, цоколь которого не равен нулю; показать, что если A представляется как плотное подкольцо кольца эндоморфизмов некоторого векторного пространства $\mathrm{End}_D(V)$ (*Алгебра*, гл. VIII, § 5, упражнение 10), то кольцо $A_{\mathscr{F}}$, соответствующее A (упражнение 25), изоморфно кольцу $\mathrm{End}_D(V)$.

в) Показать, что всякое квазипростое кольцо A (*Алгебра*, гл. VIII, § 5, упражнение 5) чисто слева и справа и что соответствующее кольцо $A_{\mathscr{F}}$ квазипросто. Получить отсюда, что для всякого кольца B, отличного от 0, существует гомоморфизм $\varphi\colon B \to R$ в кольцо R, являющееся квазипростым, абсолютно плоским и обладающее тем свойством, что R_s является инъективным R-модулем.

г) Пусть A — нётерово слева кольцо, не имеющее нильпотентных идеалов. Показать, что A чисто слева и что соответствующее кольцо $A_{\mathscr{F}}$ является *простым* (*«теорема Голди»*; воспользоваться упражнением 24а) и, с другой стороны, применить упражнение 7 из *Алгебры*, гл. VIII, § 2, с учетом того, что в абсолютно плоском кольце $A_{\mathscr{F}}$ не может существовать бесконечного семейства ортогональных друг другу идемпотентов, так как в противном случае A содержало бы бесконечную прямую сумму левых идеалов, отличных от 0). Показать, что если элемент $s \in A$ не является правым делителем нуля в A, то он обратим в $A_{\mathscr{F}}$ и наоборот; множество S таких элементов составляет мультипликативную систему в A. Показать, что $\mathscr{F}$ является множеством левых идеалов кольца A, пересекающих S (для того чтобы увидеть, что идеалы, пересекающие S, принадлежат $\mathscr{F}$, следует заметить, что элементы из S не являются левыми делителями нуля в A; для того чтобы увидеть, что каждый идеал $\mathfrak{l} \in \mathscr{F}$ содержит некоторый элемент из S, надо представить $A_{\mathscr{F}}$ как кольцо эндоморфизмов некоторого векторного пространства E размерности n и индукцией по n определить такие элементы $u_1, \ldots, u_n$ из $\mathfrak{l}$, что $u_i u_j = 0$ для $j < i$ и $u \neq 0$, причем u_i имеет ранг 1; наконец, нужно показать, что ядро отображения $s = u_1 + \ldots + u_n$ равно нулю). Получить отсюда, что пара $(A_{\mathscr{F}}, i_A)$ является левым кольцом частных кольца A со знаменателями в системе S (упражнение 22).

27) а) Пусть A — коммутативное кольцо, M — некоторый точный A-модуль конечного типа. Показать, что если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — такие два идеала из A, что $\mathfrak{a}M = \mathfrak{b}M$, то корни идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ равны (воспользоваться следствием 2 предложения 4 п° 2).

б) Вывести из пункта а), что если $\mathfrak{p}$ — простой идеал конечного типа в целостном кольце A, то $\mathfrak{p}^m \neq \mathfrak{p}^n$ при $m \neq n$.

в) Пусть K — поле и A — кольцо многочленов $K[X, Y]$ от двух переменных. Пусть в кольце A через $\mathfrak{a}$ обозначен идеал $AX^4 + AX^3Y + AXY^3 + AY^4$ и через $\mathfrak{b}$ — идеал $\mathfrak{a} + AX^2Y^2$; показать, что $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{a}$ и что $\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{a}^2$.

§ 3. Локальные кольца. Переход от локального случая к глобальному

1. Локальные кольца

Предложение 1. *Пусть A — некоторое кольцо и I — множество необратимых элементов в A. Тогда множество I представляет собой объединение идеалов кольца A, отличных от самого A. Кроме того, следующие условия эквивалентны:*

а) *множество I является идеалом;*

б) *множество идеалов кольца A, отличных от самого A, обладает наибольшим элементом*;

в) *кольцо A имеет единственный максимальный идеал.*

Действительно, включение $x \in I$ эквивалентно тому, что $1 \notin xA$, следовательно, $xA \neq A$. Если $\mathfrak{a}$ — идеал кольца A, не равный A, и $x \in \mathfrak{a}$, то $xA \subset \mathfrak{a}$, следовательно, $xA \neq A$ и $x \in I$. Поэтому каждый идеал, отличный от A, содержится в I и каждый элемент $x \in I$ принадлежит главному идеалу $xA \neq A$. Это доказывает первое утверждение и дает все необходимое для того, чтобы отсюда немедленно получилась эквивалентность свойств а), б) и в).

Замечание. 1). Отметим, что если выполнено в), то I является радикалом кольца A (*Алгебра*, гл. VIII, § 6, n° 3, определение 3).

Определение 1. *Кольцо A называется локальным, если оно удовлетворяет эквивалентным условиям* а), б), в) *предложения* 1. *Факторкольцо локального кольца A по его радикалу* (*который в этом случае равен единственному максимальному идеалу в A*) *называется полем вычетов кольца A.*

Определение 2. *Пусть A, B — два локальных кольца, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ — их максимальные идеалы соответственно. Гомоморфизм u: $A \to B$ называется локальным, если $u(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$.*

Это равносильно тому, что $u^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$, так как $u^{-1}(\mathfrak{n})$ — это идеал, содержащий $\mathfrak{m}$ и не содержащий 1, т. е. равный $\mathfrak{m}$. При факторизации из локального гомоморфизма u каноническим образом получается *инъективный гомоморфизм* $A/\mathfrak{m} \to B/\mathfrak{n}$ поля вычетов кольца A в поле вычетов кольца B.

Примеры. 1) Поле является локальным кольцом. Кольцо, состоящее из одного лишь 0, не является локальным.

2) Пусть A — локальное кольцо и k — его поле вычетов. Тогда кольцо формальных степенных рядов $B = A[[X_1, \ldots, X_n]]$ является локальным, поскольку необратимые элементы в B представляют собой те степенные ряды, свободный член которых необратим в A (*Алгебра*, гл. IV, § 5, n° 6, предложение 4). Каноническое вложение кольца A в кольцо B является локальным гомоморфизмом, а соответствующее вложение полей вычетов — изоморфизмом.

3) Пусть $\mathfrak{b}$ — какой-нибудь идеал произвольного кольца A, содержащийся *лишь в одном* максимальном идеале $\mathfrak{m}$. Тогда $A/\mathfrak{b}$ — *локальное кольцо* с максимальным идеалом $\mathfrak{m}/\mathfrak{b}$ и с полем вычетов, канонически изоморфным полю $A/\mathfrak{m}$. В частности, это наблюдение можно использовать в случае $\mathfrak{b} = \mathfrak{m}^k$, где $\mathfrak{m}$ — какой-нибудь максимальный идеал в A (§ 1, n° 1, следствие из пред-

ложения 1). Если A — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, то для любого идеала $\mathfrak{b} \neq A$ кольца A факторкольцо $A/\mathfrak{b}$ является локальным, канонический гомоморфизм $A \to A/\mathfrak{b}$ локален, а соответствующий гомоморфизм полей частных *биективен.*

4) Пусть X — топологическое пространство, x_0 — некоторая точка в нем, A — кольцо ростков в точке x_0 числовых функций, непрерывных в некоторой окрестности точки x_0 (*Общая топология*, 1968, гл. I, § 6, n° 10). Очевидно, что, для того чтобы росток в точке x_0 некоторой непрерывной функции f был обратим в A, необходимо и достаточно, чтобы $f(x_0) \neq 0$, ибо из этого условия следует, что $f(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0. Таким образом, A — локальное кольцо и его максимальный идеал $\mathfrak{m}$ состоит из ростков функций, равных нулю в x_0. При факторизации отображение $g \to g(x_0)$ кольца A в поле вещественных чисел $\mathbf{R}$ дает изоморфизм поля вычетов $A/\mathfrak{m}$ на поле $\mathbf{R}$.

Предложение 2. *Пусть A — кольцо и $\mathfrak{p}$ — его простой идеал. Тогда кольцо частных $A_\mathfrak{p}$ локально; его максимальный идеал равен идеалу $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$, порожденному каноническим образом идеала $\mathfrak{p}$ в $A_\mathfrak{p}$. Поле вычетов кольца $A_\mathfrak{p}$ канонически изоморфно полю частных целостного кольца $A/\mathfrak{p}$.*

В самом деле, пусть $S = A - \mathfrak{p}$, и пусть j: $A \to A_\mathfrak{p}$ — канонический гомоморфизм. Из простоты идеала $\mathfrak{p}$ следует, что относительно системы S он насыщен, следовательно, $j^{-1}(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ (§ 2, n° 4, предложение 10), и, так как идеалами, не пересекающимися с S, являются идеалы, содержащиеся в $\mathfrak{p}$, первые два утверждения — это частные случаи предложения 11 (ii) из § 2, n° 5. Кроме того, если f — канонический гомоморфизм $A \to A/\mathfrak{p}$, то $f(S)$ совпадает с множеством отличных от нуля элементов целостного кольца $A/\mathfrak{p}$, так что последнее утверждение является частным случаем предложения 11 (i) из § 2, n° 5.

Определение 3. *Пусть A — любое кольцо и $\mathfrak{p}$ — его простой идеал. Кольцо $A_\mathfrak{p}$ называется локальным кольцом кольца A в $\mathfrak{p}$ или, если можно не опасаться путаницы, локальным кольцом идеала $\mathfrak{p}$.*

Замечание. 2) Если A — локальное кольцо и $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал, то элементы из $A - \mathfrak{m}$ обратимы (предложение 1), так что $A_\mathfrak{m}$ канонически отождествляется с A (§ 2, n° 1, замечание 5).

Примеры. 5) Пусть p — простое число. Локальное кольцо $\mathbf{Z}_{(p)}$ представляет собой множество рациональных чисел a/b, в которых a, b — целые рациональные числа, причем b взаимно просто с p. Поле вычетов кольца $\mathbf{Z}_{(p)}$ изоморфно простому полю $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/(p)$.

*6) Пусть V — аффинное алгебраическое многообразие, A — кольцо регулярных функций на V, W — некоторое неприводимое подмногообразие в V и $\mathfrak{p}$ — идеал (обязательно простой) кольца A, состоящий из функций, равных нулю в каждой точке на W. Кольцо $A_{\mathfrak{p}}$ называется *локальным кольцом подмногообразия* W на V. *

Предложение 3. *Пусть A — кольцо, $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A и $S = A - \mathfrak{p}$. Для всякого идеала $\mathfrak{b}'$ кольца $A_{\mathfrak{p}}$, отличного от самого $A_{\mathfrak{p}}$, обозначим через $\mathfrak{b}$ идеал $(i_A^S)^{-1}(\mathfrak{b}')$ кольца A, так что $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}}$.*

(i) *Пусть f — канонический гомоморфизм $A \to A/\mathfrak{b}$. Тогда гомоморфизм кольца $A_{\mathfrak{p}}$ в кольцо $(A/\mathfrak{b})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{b}}$, канонически ассоциированный с f* (§ 2, n° 1, предложение 2), *сюръективен и его ядро равно $\mathfrak{b}'$. Этим определяется при переходе к факторкольцам канонический изоморфизм $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{b}'$ на $(A/\mathfrak{b})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{b}}$.*

(ii) *Отображение $\mathfrak{b}' \to \mathfrak{b} = (i_A^S)^{-1}(\mathfrak{b}')$, ограниченное на множество простых идеалов кольца $A_{\mathfrak{p}}$, является изоморфизмом (относительно отношения включения) этого множества на множество простых идеалов кольца A, содержащихся в идеале $\mathfrak{p}$. Если $\mathfrak{b}'$ — простой идеал в $A_{\mathfrak{p}}$, то существует некоторый изоморфизм кольца $A_{\mathfrak{b}}$ на кольцо $(A_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{b}'}$, который переводит элемент a/s в элемент $(a/1)/(s/1)$, $a \in A$, $s \in A - \mathfrak{b}$.*

Это не что иное, как частный случай предложения 11 § 2, n° 5.

Замечания. 3) Если $\mathfrak{a}$ — идеал кольца A, не содержащийся в $\mathfrak{p}$, то $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$ и $(A/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}} = 0$ (§ 2, n° 5, замечание).

4) Пусть A, B — два кольца, ρ: $A \to B$ — некоторый гомоморфизм, $\mathfrak{q}$ — простой идеал B и $\mathfrak{p} = \rho^{-1}(\mathfrak{q})$ — простой идеал в A. Так как $\rho(A - \mathfrak{p}) \subset B - \mathfrak{q}$, то по гомоморфизму ρ канонически строится гомоморфизм $\rho_{\mathfrak{q}}$: $A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{q}}$ (§ 2, n° 1, предложение 2) и немедленно проверяется, что $\rho_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) \subset \mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}$. Следовательно, отображение $\rho_{\mathfrak{q}}$ — *локальный* гомоморфизм.

2. *Модули над локальным кольцом*

Предложение 4. *Пусть A — кольцо, не обязательно коммутативное, $\mathfrak{m}$ — правый идеал кольца A, содержащийся в его радикале, и M — левый A-модуль. Допустим, что выполнено одно из следующих условий:*

(i) *M — модуль конечного типа.*

(ii) *$\mathfrak{m}$ — нильпотентный идеал.*

Тогда из равенства $(A_d/\mathfrak{m}) \otimes_A M = 0$ следует, что $M = 0$.

Это утверждение в случае предположения (i) есть не что иное, как следствие 3 предложения 6 в *Алгебре*, гл. VIII, § 6, n° 3. С другой стороны, равенство $(A_d/\mathfrak{m}) \otimes_A M = 0$ эквивалентно тому, что $M = \mathfrak{m}M$, и из него поэтому следует равенство $M = \mathfrak{m}^n M$ при любом целом $n > 0$. Отсюда получается утверждение и в случае предположения (ii).

Следствие 1. *Пусть A — кольцо, не обязательно коммутативное, $\mathfrak{m}$ — какой-либо правый идеал, содержащийся в радикале кольца A, M и N — два левых A-модуля и u: $M \to N$ — некоторое A-линейное отображение. Если N — модуль конечного типа (или если $\mathfrak{m}$ — нильпотентный идеал) и если отображение $1 \otimes u$: $(A_d/\mathfrak{m}) \otimes_A M \to (A_d/\mathfrak{m}) \otimes_A N$ сюръективно, то сюръективно и отображение u.*

Действительно, модуль $(A_d/\mathfrak{m}) \otimes_A (N/u(M))$ канонически изоморфен модулю $((A_d/\mathfrak{m}) \otimes_A N)/\mathrm{Im}(1 \otimes u)$ (*Algèbre*, chap. II, 3e éd., § 3, n° 6, corollaire 1 de la proposition 6[1])). Поэтому из предположения следует, что $(A_d/\mathfrak{m}) \otimes_A (N/u(M)) = 0$, и, следовательно, в силу предложения 4, $N/u(M) = 0$.

Следствие 2. *Пусть A — кольцо, не обязательно коммутативное, $\mathfrak{m}$ — двусторонний идеал, содержащийся в радикале данного кольца, M — левый A-модуль и $(x_\iota)_{\iota \in I}$ — некоторое семейство элементов модуля M. Если M — модуль конечного типа (или если $\mathfrak{m}$ — нильпотентный идеал) и если элементы $1 \otimes x_\iota$ $(\iota \in I)$ порождают левый $(A/\mathfrak{m})$-модуль $(A/\mathfrak{m}) \otimes_A M$, то элементы x_ι порождают M.*

В самом деле, пусть $(e_\iota)_{\iota \in I}$ — канонический базис левого A-модуля $A_s^{(I)}$. Тогда достаточно применить следствие 1 к A-линейному отображению u: $A_s^{(I)} \to M$, при котором $u(e_\iota) = x_\iota$ для всех $\iota \in I$.

Предложение 5. *Пусть A — кольцо, не обязательно коммутативное, $\mathfrak{m}$ — двусторонний идеал в A, содержащийся в радикале кольца A, и M — левый A-модуль. Допустим, что выполняется одно из следующих условий:*

(i) *модуль M конечно представим;*

(ii) *идеал $\mathfrak{m}$ нильпотентен.*

Тогда если $(A/\mathfrak{m}) \otimes_A M = M/\mathfrak{m}M$ является свободным левым $(A/\mathfrak{m})$-модулем и если канонический гомоморфизм модуля $\mathfrak{m} \otimes_A M$ в модуль M инъективен, то A-модуль M свободен. Выражаясь более точно, если $(x_\iota)_{\iota \in I}$ — такое семейство элементов модуля

---

[1]) См. *Алгебра*, Приложение II к гл. III, n° 5, предложение 4. — *Прим. перев.*

M, что $(1 \otimes x_\iota)$ составляет базис $(A/\mathfrak{m})$-модуля $M/\mathfrak{m}M$, то и набор (x_ι) является базисом в модуле M.

Если $a \in A$, $x \in M$ и $\bar{a}$ — класс элемента a в факторкольце $A/\mathfrak{m}$, то $\bar{a} \otimes x = 1 \otimes (ax)$; поэтому из условия следует, что существует такое семейство $(x_\iota)_{\iota \in I}$ элементов модуля M, что $(1 \otimes x_\iota)$ является базисом в $(A/\mathfrak{m})$-модуле $(A/\mathfrak{m}) \otimes_A M$. Уже известно, что элементы x_ι порождают M (следствие 2 из предложения 4); сейчас мы увидим, что они линейно независимы над кольцом A. Для этого рассмотрим свободный A-модуль $L = A_s^{(I)}$, и пусть (e_ι) — его канонический базис; пусть u: $A_s^{(I)} \to M$ — такое A-линейное отображение, что $u(e_\iota) = x_\iota$ при всех $\iota \in I$. Обозначим через R ядро отображения u и докажем, что $R = 0$. Согласно условию (i), $(A/\mathfrak{m}) \otimes_A M$ является $(A/\mathfrak{m})$-модулем конечного типа и, следовательно, множество I непременно конечно, а R является A-модулем конечного типа в силу леммы 9 из гл. I, § 2, n° 8. Согласно предложению 4, достаточно доказать (при первом или при втором условии), что $R = \mathfrak{m}R$.

Пусть j — каноническое вложение $R \to L$; таким образом, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{m} \otimes R & \xrightarrow{1 \otimes j} & \mathfrak{m} \otimes L & \xrightarrow{1 \otimes u} & \mathfrak{m} \otimes M \\ \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c \\ R & \xrightarrow[j]{} & L & \xrightarrow[u]{} & M \end{array}$$

в которой обе строки точны, отображение j инъективно, а отображение $1 \otimes u$ сюръективно (гл. I, § 2, n° 1, лемма 1). Так как по условию $\mathrm{Ker}(c) = 0$, то точна такая последовательность:

$$0 \xrightarrow{d} \mathrm{Coker}(a) \to \mathrm{Coker}(b) \xrightarrow{v} \mathrm{Coker}(c)$$

(гл. I, § 1, n° 4, предложение 2). Достаточно проверить, что отображение v биективно, так как отсюда получится, что $\mathrm{Coker}(a) = 0$, т. е., другими словами, что a — сюръективное отображение и, следовательно, что $R = \mathfrak{m}R$. Однако $\mathrm{Coker}(b) = (A/\mathfrak{m}) \otimes_A L$ и $\mathrm{Coker}(c) = (A/\mathfrak{m}) \otimes_A M$ и, по определению, $v(1 \otimes e_\iota) = 1 \otimes x_\iota$. Так как $(1 \otimes e_\iota)$ — базис модуля $(A/\mathfrak{m}) \otimes_A L$, то определение элементов x_ι показывает, что v — биективное отображение.

Следствие 1. *Пусть A — кольцо, не обязательно коммутативное, $\mathfrak{m}$ — радикал кольца A и M — левый A-модуль. Допустим, что $A/\mathfrak{m}$ — тело, что канонический гомоморфизм модуля $\mathfrak{m} \otimes_A M$ в M инъективен и что выполняется одно из условий* (i) *или* (ii) *предложения* 5. *Тогда, для того чтобы некоторое семейство (y_λ) элементов модуля M было базисом некоторого*

прямого слагаемого модуля M, необходимо и достаточно, чтобы семейство $(1 \otimes y_\lambda)$ было свободным в фактормодуле $M/\mathfrak{m}M$.

Действительно, если это условие выполняется, то можно предположить, что (y_λ) является подсемейством такого семейства (x_ι) элементов модуля M, что $(1 \otimes x_\iota)$ составляет базис модуля $M/\mathfrak{m}M$ (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 7, n° 1, theorème 2)[1]), и предложение 5 показывает теперь, что (x_ι) — базис модуля M.

Следствие 2. *Пусть A — кольцо, не обязательно коммутативное, $\mathfrak{m}$ — радикал в A и M — левый A-модуль. Допустим, что $A/\mathfrak{m}$ — тело и что выполняется оно из следующих условий:*

(i) *модуль M допускает конечное представление;*

(ii) *идеал $\mathfrak{m}$ нильпотентен.*

Тогда следующие свойства эквивалентны:

а) *модуль M свободен;*

б) *модуль M проективен;*

в) *модуль M является плоским;*

г) *канонический гомоморфизм $\mathfrak{m} \otimes_A M \to M$ инъективен;*

*д) *имеет место равенство $\operatorname{Tor}_1^A(A/\mathfrak{m}, M) = 0$.* *

Импликации а)$\Rightarrow$ б)$\Rightarrow$ в)$\Rightarrow$ г) устанавливаются немедленно. Поскольку $A/\mathfrak{m}$ — тело, то $(A/\mathfrak{m}) \otimes_A M$ является свободным $(A/\mathfrak{m})$-модулем, и предложение 5 показывает, что из г) следует а).

* Наконец, как известно, $\operatorname{Tor}_1^A(A, M) = 0$, и, следовательно, из точной последовательности $0 \to \mathfrak{m} \to A \to A/\mathfrak{m} \to 0$ получается точная последовательность

$$0 \to \operatorname{Tor}_1^A(A/\mathfrak{m}, M) \to \mathfrak{m} \otimes_A M \to M.$$

Это доказывает, что модуль $\operatorname{Tor}_1^A(A/\mathfrak{m}, M)$ изоморфен ядру канонического гомоморфизма $\mathfrak{m} \otimes_A M \to M$, так что свойства г) и д) эквивалентны. *

Можно показать, что для всякого кольца A, факторкольцо $A/\mathfrak{m}$ которого по радикалу $\mathfrak{m}$ является телом, *любой* проективный A-модуль свободен (упражнение 3).

Предложение 6. *Пусть A — кольцо, не обязательно коммутативное, $\mathfrak{m}$ — его радикал; предположим, что $A/\mathfrak{m}$ — тело. Пусть M и N — два свободных A-модуля конечного типа и u: $M \to N$ — некоторый гомоморфизм. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

а) *гомоморфизм u является изоморфизмом модуля M на некоторое прямое слагаемое модуля N;*

б) *гомоморфизм $1 \otimes u$: $(A/\mathfrak{m}) \otimes_A M \to (A/\mathfrak{m}) \otimes_A N$ инъективен;*

[1]) См. также [Л], гл. III, § 4, стр. 103. — *Прим. перев.*

в) *гомоморфизм u инъективен и* $\mathrm{Coker}(u)$ *является свободным A-модулем;*

г) *транспонированный гомоморфизм* ${}^t u\colon N^* \to M^*$ *сюръективен.*

Известно (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 1, n° 11, proposition 21)[1]), что если $N/u(M)$ — свободный модуль, то $u(M)$ является прямым слагаемым модуля N, так что из в) следует а). Обратно, из а) следует, что модуль $\mathrm{Coker}(u)$, изоморфный дополнению $u(M)$ в N, является проективным A-модулем конечного типа и *тем более* конечно представим (гл. I, § 2, n° 8, лемма 8). Поэтому этот модуль свободен, согласно следствию 2 из предложения 5, и из а) следует в). С другой стороны, очевидно, что из а) следует б). Положим, ради простоты, $M' = (A/\mathfrak{m}) \otimes_A M$, $N' = (A/\mathfrak{m}) \otimes_A N$. Так как M и N — модули конечного типа, то сопряженные модули M'^* и N'^* к $(A/\mathfrak{m})$-модулям M' и N' канонически отождествляются с $M^* \otimes_A (A/\mathfrak{m})$ и $N^* \otimes_A (A/\mathfrak{m})$, а гомоморфизм ${}^t(1 \otimes u)$ — с гомоморфизмом $({}^t u) \otimes 1$ (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 5, n° 4, prop. 8). Так как M' и N' — векторные пространства над телом $A/\mathfrak{m}$, то из инъективности отображения $1 \otimes u$ следует сюръективность ${}^t(1 \otimes u)$ (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 7, n° 5, proposition 10)[2]). Поэтому следствие 1 из предложения 4 показывает, что ${}^t u$ сюръективно, и мы доказали, что из б) следует г). Наконец, покажем, что из г) вытекает а). Допустим, что гомоморфизм ${}^t u$ сюръективен. Поскольку модуль M^* свободен, существует такой гомоморфизм f модуля M^* в N^*, что $1_{M^*} = {}^t u \circ f$ (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 1, n° 11, proposition 21). Так как M и N — свободные модули конечного типа, то существует такой гомоморфизм g модуля N в M, что $f = {}^t g$. Следовательно, ${}^t 1_M = 1_{M^*} = {}^t u \circ {}^t g = {}^t(g \circ u)$, откуда $1_M = g \circ u$. Это доказывает, что u является изоморфизмом модуля M на некоторый подмодуль модуля N, являющийся в N прямым слагаемым (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 1, n° 9, corollaire 2 de la proposition 15)[3]).

Следствие. *В условиях предложения* 6 *следующие свойства эквивалентны:*

а) *u есть изоморфизм M на N;*

б) *модули M и N имеют одинаковый ранг* (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 7, n° 2) *и гомоморфизм u сюръективен.*

в) *гомоморфизм $1 \otimes u$: $M/\mathfrak{m}M \to N/\mathfrak{m}N$ биективен.*

---

[1]) См. также *Алгебра*, гл. II, § 1, n° 6, следствие из предложения 4. — *Прим. перев.*

[2]) См. также *Алгебра*, гл. II, § 4, n° 9, следствие из теоремы 3. — *Прим. перев.*

[3]) См. [КЭ], гл. I, § 1, стр. 18, 19. — *Прим. перев.*

Очевидно, что из а) следует б). Из свойства б) вытекает, что гомоморфизм $1\otimes u$ сюръективен; кроме того, из предположения о том, что M и N имеют одинаковые ранги, следует, что тем же свойством обладают и векторные пространства $(A/\mathfrak{m})\otimes_A M$ и $(A/\mathfrak{m})\otimes_A N$ над телом $A/\mathfrak{m}$, так что $1\otimes u$ — биективное отображение (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 7, n° 4, corollaire de la proposition 9); таким образом, из б) следует в). Наконец, в силу предложения 6, из условия в) получается, что модуль N равен прямой сумме модуля $u(M)$ и некоторого свободного подмодуля P и что u является изоморфизмом на модуль $u(M)$. Если бы $P\neq 0$, то $(A/\mathfrak{m})\otimes_A P\neq 0$ и $1\otimes u$ не было бы сюръективным отображением. Следовательно, из в) вытекает а).

Доказанные выше предложения этого n° будут чаще всего применяться, когда A — *локальное кольцо* и $\mathfrak{m}$ — его *максимальный идеал*. Дополним в этом случае следствие 2 из предложения 5 следующим утверждением:

Предложение 7. *Пусть A — редуцированное локальное кольцо, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал, $(\mathfrak{p}_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство всех минимальных простых идеалов кольца A, K_ι — поле частных кольца $A/\mathfrak{p}_\iota$, M — некоторый A-модуль конечного типа. Для того чтобы M был свободным, необходимо и достаточно, чтобы*

$$[(A/\mathfrak{m})\otimes_A M : (A/\mathfrak{m})] = [K_\iota\otimes_A M : K_\iota] \text{ для всех } \iota\in I. \qquad (1)$$

Если модуль M свободен, то, очевидно, обе части равенства (1) при каждом ι равны рангу модуля M. Допустим теперь, что данное условие выполнено, и обозначим общее значение обеих частей равенства (1) через n. Согласно следствию 2 из предложения 4, модуль M обладает системой из n образующих x_j $(1\leqslant j\leqslant n)$. Сначала предположим, что кольцо A *целостное*, так что $\mathfrak{p}_\iota = 0$ при всех ι. Элементы $1\otimes x_j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ порождают векторное пространство $K\otimes M$ над полем частных K кольца A; однако, ввиду того что это векторное пространство, согласно условию, имеет ранг n над полем K, элементы $1\otimes x_j$ линейно независимы над K. Отсюда получается (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 1, n° 13, remarque) [1]), что элементы x_j линейно независимы над кольцом A, а потому составляют базис модуля M.

Перейдем к общему случаю. Отметим, что существует сюръективный гомоморфизм v свободного модуля $L = A^n$ на M. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{v} & M \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u'} \\ \prod_\iota ((A/\mathfrak{p}_\iota)\otimes L) & \xrightarrow{v'} & \prod_\iota ((A/\mathfrak{p}_\iota)\otimes M) \end{array}$$

[1]) См. также *Алгебра*, гл. III, § 2, n° 3, теорема 2. — *Прим. перев.*

в которой u (соответственно u') означает отображение $x \to (\varphi_\iota(x))$ (соответственно $y \to (\psi_\iota(y))$), $\varphi_\iota : L \to (A/\mathfrak{p}_\iota) \otimes L$ (соответственно $\psi_\iota : M \to (A/\mathfrak{p}_\iota) \otimes M$) — каноническое отображение, а v' представляет собой произведение отображений $1_{A/\mathfrak{p}_\iota} \otimes v$. Имеет место следующее равенство: $(A/\mathfrak{p}_\iota)/(\mathfrak{m}/\mathfrak{p}_\iota) \otimes_{A/\mathfrak{p}_\iota} ((A/\mathfrak{p}_\iota) \otimes_A M) = (A/\mathfrak{m}) \otimes_A M$; поскольку $A/\mathfrak{p}_\iota$ — целостное кольцо, то из первой части утверждения следует, что каждое из отображений $1_{A/\mathfrak{p}_\iota} \otimes v$ — изоморфизм, следовательно, изоморфизмом будет и отображение v'. С другой стороны, поскольку кольцо A редуцировано, $\bigcap_\iota \mathfrak{p}_\iota = (0)$ (§ 2, n° 6, предложение 13), откуда $\bigcap_\iota (\mathfrak{p}_\iota L) = 0$, так как модуль L свободен (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 3, n° 7, remarque). Поскольку $\mathfrak{p}_\iota L$ — ядро гомоморфизма φ_ι, то отсюда следует, что гомоморфизм u инъективен. Таким образом, $v' \circ u = u' \circ v$ является инъективным отображением и, следовательно, v инъективно. Так как, по определению, отображение v к тому же и сюръективно, то M — свободный модуль.

3. *Переход от локального случая к глобальному*

Предложение 8. *Пусть A — кольцо, $\mathfrak{m}$ — некоторый максимальный идеал в нем и M — какой-либо A-модуль. Если существует такой идеал $\mathfrak{a}$ кольца A, что $\mathfrak{m}$ — единственный максимальный идеал в A, содержащий $\mathfrak{a}$, и $\mathfrak{a}M = 0$, то канонический гомоморфизм $M \to M_\mathfrak{m}$ биективен.*

Действительно, в данных условиях $A/\mathfrak{a}$ — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}/\mathfrak{a}$ и M можно рассматривать как $(A/\mathfrak{a})$-модуль. Канонический образ любого элемента $s \in A - \mathfrak{m}$ в кольце $A/\mathfrak{a}$ обратим и, следовательно, гомотетия $x \to sx$ модуля M биективна. В силу определения $M_\mathfrak{m}$ как решения задачи об универсальном отображении (§ 2, n° 2), отсюда следует утверждение.

В частности, если существует такое $k \geqslant 0$, что $\mathfrak{m}^k M = 0$, то гомоморфизм $M \to M_\mathfrak{m}$ биективен (§ 1, n° 1, следствие предложения 1).

Предложение 9. *Пусть A — кольцо, $\mathfrak{m}$ — некоторый максимальный идеал в нем, M — какой-либо A-модуль и $k \geqslant 0$ — целое число. Тогда канонический гомоморфизм $M \to M_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^k M_\mathfrak{m}$ сюръективен, его ядро равно $\mathfrak{m}^k M$ и им определяется изоморфизм модуля $M/\mathfrak{m}^k M$ на $M_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^k M_\mathfrak{m}$.*

Поскольку случай $k = 0$ тривиален, допустим, что $k \geqslant 1$. Из предложения 8 следует, что канонический гомоморфизм

$M/\mathfrak{m}^k M \to (M/\mathfrak{m}^k M)_\mathfrak{m}$ биективен. С другой стороны, модуль $(M/\mathfrak{m}^k M)_\mathfrak{m}$ каноническим образом отождествляется с $M_\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^k M)_\mathfrak{m}$ (§ 2, n° 4, теорема 1) и $(\mathfrak{m}^k M)_\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^k M_\mathfrak{m}$ (§ 2, n° 7, следствие предложения 18). Отсюда получается изоморфизм модуля $M/\mathfrak{m}^k M$ на $M_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^k M_\mathfrak{m}$, который переводит класс элемента $x \in M$ в класс элемента $x/1$.

Следствие. *Пусть A — некоторое кольцо, $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_n$ — набор попарно различных максимальных идеалов в A, M — некоторый A-модуль и $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — целые числа $\geqslant 0$. Тогда канонический гомоморфизм модуля M в $\prod_{i=1} M_{\mathfrak{m}_i}/\mathfrak{m}_i^{k_i} M_{\mathfrak{m}_i}$ сюръективен и его ядро равно $\left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i^{k_i}\right) M$.*

Это немедленно следует из предложения 9 и из предложения 6 § 1, n° 2, с учетом того, что идеалы $\mathfrak{m}_i^{k_i}$ попарно взаимно просты (§ 1, n° 2, предложение 3).

В дальнейшем в этом n° *через A обозначается некоторое кольцо, а через $\Omega(A)$ (или просто через Ω) — множество максимальных идеалов кольца A.*

Предложение 10. *Модуль $\bigoplus_{\mathfrak{m} \in \Omega} A_\mathfrak{m}$ над кольцом A (прямая сумма колец частных $A_\mathfrak{m}$ по всем $\mathfrak{m} \in \Omega$) является строго плоским.*

Действительно, каждый A-модуль $A_\mathfrak{m}$ является плоским (§ 2, n° 4, теорема 1); следовательно, $E = \bigoplus_{\mathfrak{m} \in \Omega} A_\mathfrak{m}$ — плоский модуль (гл. I, § 2, n° 3, предложение 2). Кроме того, для всякого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A идеал $\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$ является единственным максимальным идеалом в $A_\mathfrak{m}$, так что $\mathfrak{m}A_\mathfrak{m} \neq A_\mathfrak{m}$, откуда $\mathfrak{m}E \neq E$ и, следовательно, E есть строго плоский модуль (гл. I, § 3, n° 1, предложение 1г)).

Теорема 1. *Пусть M, N — два A-модуля, u: $M \to N$ — некоторый A-гомоморфизм, и для любого $\mathfrak{m} \in \Omega$ пусть $u_\mathfrak{m}$: $M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ — соответствующий $A_\mathfrak{m}$-гомоморфизм* (§ 2, n° 2, замечание 5). *Для того чтобы гомоморфизм u был инъективным* (соответственно *сюръективным, биективным, нулевым*), *необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\mathfrak{m} \in \Omega$ был инъективен* (соответственно *сюръективен, биективен, равен нулю*) *гомоморфизм $u_\mathfrak{m}$.*

Действительно, сказать, что гомоморфизм $u_\mathfrak{m}$ инъективен (соответственно сюръективен, биективен, равен нулю) при всяком $\mathfrak{m} \in \Omega$, — это все равно, что сказать, что гомоморфизм

$\bigoplus_{\mathfrak{m}} u_{\mathfrak{m}} : \bigoplus_{\mathfrak{m}} M_{\mathfrak{m}} \to \bigoplus_{\mathfrak{m}} N_{\mathfrak{m}}$ обладает тем же самым свойством. Но $\bigoplus_{\mathfrak{m}} M_{\mathfrak{m}} = M \otimes_A E$, $\bigoplus_{\mathfrak{m}} N_{\mathfrak{m}} = N \otimes_A E$ и $\bigoplus_{\mathfrak{m}} u_{\mathfrak{m}} = u \otimes 1$, где $E = \bigoplus_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}}$. Поскольку E — строго плоский модуль (предложение 10), данная теорема следует из предложения 1в) гл. I, § 3, n° 1, и из предложения 2.

Следствие 1. *Пусть M — некоторый A-модуль, N — его подмодуль и x — какой-нибудь элемент из M. Для включения $x \in N$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\mathfrak{m} \in \Omega$ канонический образ x в $M_{\mathfrak{m}}$ принадлежал подмодулю $N_{\mathfrak{m}}$.*

Пусть $\bar{x}$ — класс элемента x в фактормодуле M/N. Включение $x \in N$ означает, что A-линейное отображение u: $\alpha \to \alpha\bar{x}$ модуля A в M/N нулевое. Однако модуль частных $(M/N)_{\mathfrak{m}}$ отождествляется с $M_{\mathfrak{m}}/N_{\mathfrak{m}}$ (§ 2, n° 4, теорема 1), а гомоморфизм $u_{\mathfrak{m}}$: $A_{\mathfrak{m}} \to M_{\mathfrak{m}}/N_{\mathfrak{m}}$ — с отображением $\lambda \to \lambda\bar{x}_{\mathfrak{m}}$, где $\bar{x}_{\mathfrak{m}}$ — класс $\bmod N_{\mathfrak{m}}$ канонического образа элемента x в модуле $M_{\mathfrak{m}}$. Так как в силу теоремы 1 равенство $u = 0$ эквивалентно равенству $u_{\mathfrak{m}} = 0$ при любом $\mathfrak{m}$, то следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть M — некоторый A-модуль; обозначим для всякого $\mathfrak{m} \in \Omega$ через $f_{\mathfrak{m}}$ канонический гомоморфизм $M \to M_{\mathfrak{m}}$. Тогда гомоморфизм $x \to (f_{\mathfrak{m}}(x))$ из M в $\prod_{\mathfrak{m} \in \Omega} M_{\mathfrak{m}}$ инъективен.*

Действительно, применяя следствие 1 к случаю $N = 0$, мы видим, что равенство $x = 0$ эквивалентно равенству $f_{\mathfrak{m}}(x) = 0$ при любом $\mathfrak{m} \in \Omega$.

Следствие 3. (i) *Пусть $\mathfrak{b}$ — некоторый идеал кольца A и a — какой-либо элемент в A. Для включения $a \in \mathfrak{b}$ необходимо и достаточно, чтобы при всяком $\mathfrak{m} \in \Omega$ канонический образ элемента a в $A_{\mathfrak{m}}$ принадлежал идеалу $\mathfrak{b}A_{\mathfrak{m}}$.*

(ii) *В частности, пусть b и c — два элемента кольца A. Для того чтобы c было кратно b, необходимо и достаточно, чтобы при всяком $\mathfrak{m} \in \Omega$ канонический образ c в $A_{\mathfrak{m}}$ был кратен каноническому образу элемента b в $A_{\mathfrak{m}}$.*

Так как $\mathfrak{b}A_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{b}_{\mathfrak{m}}$ (§ 2, n° 7, следствие предложения 18), то утверждение (i) является частным случаем следствия 1; утверждение (ii) получается из (i), примененного к идеалу Ab.

Следствие 4. *Пусть кольцо A целостное, K — его поле частных и M — некоторый A-модуль без кручения; таким образом, M канонически отождествляется с A-подмодулем в $K \otimes_A M$. Тогда для всякого $\mathfrak{m} \in \Omega$ модуль частных $M_{\mathfrak{m}}$ канонически отождествляется с некоторым A-подмодулем в $K \otimes_A M$ и справедливо равенство $M = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \Omega} M_{\mathfrak{m}}$.*

В самом деле, так как M отождествляется с некоторым подмодулем в $K\otimes_A M$, то модуль $M_{\mathfrak{m}}$ является $A_{\mathfrak{m}}$-подмодулем модуля $(K\otimes_A M)_{\mathfrak{m}}=K_{\mathfrak{m}}\otimes_A M$ (§ 2, n° 4, теорема 1). Поскольку $K_{\mathfrak{m}}=K$, то ясно, что $M_{\mathfrak{m}}$ — модуль без кручения. Кроме того, коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} M & \to & K\otimes_A M \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_{\mathfrak{m}} & \to & (K\otimes_A M)_{\mathfrak{m}} \end{array}$$

показывает, что каноническое отображение $M\to M_{\mathfrak{m}}$ инъективно. Поэтому доказываемое следствие получается из следствия 1, примененного к A-модулю $K\otimes_A M$ и к его подмодулю M.

В частности, для всякого *целостного кольца* A имеем

$$A=\bigcap_{\mathfrak{m}\in\Omega} A_{\mathfrak{m}}. \tag{2}$$

Следствие 5. *Пусть A — кольцо. Тогда любая система образующих A-модуля A^n, состоящая из n элементов, является базисом в A^n.*

Пусть $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — канонический базис модуля A^n и $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — произвольная система образующих в A^n, состоящая из n элементов; пусть u: $A^n\to A^n$ — такое A-линейное отображение, что $u(e_i)=x_i$ для $1\leqslant i\leqslant n$. По условию, u сюръективно, так что достаточно доказать его инъективность. Но это немедленно сводится, в силу теоремы 1, к случаю, когда A — *локальное* кольцо. Если $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал локального кольца A, то элементы $1\otimes x_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ составляют в $(A/\mathfrak{m})^n$ систему образующих свободного $(A/\mathfrak{m})$-модуля $(A/\mathfrak{m})^n$. Так как A^n — свободный A-модуль, то из предложения 5 следует, что (x_i) — базис модуля.

Предложение 11. *Пусть M — некоторый A-модуль, N — какой-либо A-модуль конечного типа и u: $M\to N$ — некоторый гомоморфизм. Для сюръективности гомоморфизма u необходимо и достаточно, чтобы при всяком $\mathfrak{m}\in\Omega$ гомоморфизм $M/\mathfrak{m}M\to N/\mathfrak{m}N$, полученный из u при факторизации, был сюръективным.*

Действительно, из теоремы 1 следует, что для того, чтобы сюръективным был гомоморфизм u, необходимо и достаточно, чтобы при всяком $\mathfrak{m}\in\Omega$ был сюръективен гомоморфизм $u_{\mathfrak{m}}$: $M_{\mathfrak{m}}\to N_{\mathfrak{m}}$. В силу того что $A_{\mathfrak{m}}$ — локальное кольцо и $N_{\mathfrak{m}}$ является $A_{\mathfrak{m}}$-модулем конечного типа, предыдущее условие эквивалентно сюръективности гомоморфизма $u'_{\mathfrak{m}}$: $M_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}M_{\mathfrak{m}}\to N_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}N_{\mathfrak{m}}$, полученного при факторизации (n° 2, следствие 1 предложения 4). Но модуль $M_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}M_{\mathfrak{m}}$ (соответственно модуль $N_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}N_{\mathfrak{m}}$) отождествляется с модулем $M/\mathfrak{m}M$ (соответственно с модулем $N/\mathfrak{m}N$) (предложение 9), откуда и следует доказываемое утверждение.

Предложение 12. *Пусть E, F, G — три A-модуля, $v\colon G \to F$ и $u\colon E \to F$ — некоторые гомоморфизмы. Допустим, что модуль E конечно представим. Для того чтобы существовал гомоморфизм $w\colon E \to G$, такой, что имеет место разложение $u\colon E \xrightarrow{w} G \xrightarrow{v} F$, необходимо и достаточно, чтобы при всяком $\mathfrak{m} \in \Omega$ существовал гомоморфизм $w^{\mathfrak{m}}\colon E_{\mathfrak{m}} \to G_{\mathfrak{m}}$, такой, что имеет место разложение $E_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{w^{\mathfrak{m}}} G_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{v^{\mathfrak{m}}} F_{\mathfrak{m}}$ гомоморфизма $u_{\mathfrak{m}}\colon E_{\mathfrak{m}} \to F_{\mathfrak{m}}$.*

Существование требуемого гомоморфизма w эквивалентно следующему: гомоморфизм u принадлежит образу P отображения $r = \mathrm{Hom}(1_E, v)\colon \mathrm{Hom}_A(E, G) \to \mathrm{Hom}_A(E, F)$. Однако модуль $(\mathrm{Hom}_A(E, F))_{\mathfrak{m}}$ (соответственно $(\mathrm{Hom}_A(E, G))_{\mathfrak{m}}$) канонически отождествляется с модулем $\mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{m}}}(E_{\mathfrak{m}}, F_{\mathfrak{m}})$ (соответственно $\mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{m}}}(E_{\mathfrak{m}}, G_{\mathfrak{m}})$) (§ 2, n°7, предложение 19(i)), а канонический образ элемента u в $(\mathrm{Hom}_A(E, F))_{\mathfrak{m}}$ отождествляется с $u_{\mathfrak{m}}$; далее, $r_{\mathfrak{m}}$ отождествляется с $\mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{m}}}(1_{E_{\mathfrak{m}}}, v_{\mathfrak{m}})$ и $P_{\mathfrak{m}}$ — с образом отображения $r_{\mathfrak{m}}$. Теперь предложение получается из следствия 1 теоремы 1, примененного к модулю $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ и его подмодулю P.

Следствие 1. *Пусть M — некоторый A-модуль, N — такой подмодуль в M, что модуль M/N конечно представим. Для того чтобы N был прямым слагаемым модуля M, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\mathfrak{m} \in \Omega$ модуль $N_{\mathfrak{m}}$ был прямым слагаемым модуля $M_{\mathfrak{m}}$.*

Действительно, утверждение о том, что N — прямое слагаемое модуля M, означает, что тождественный гомоморфизм модуля M/N разлагается в композицию $M/N \xrightarrow{w} M \xrightarrow{\varphi} M/N$, где w — некоторый гомоморфизм и φ — канонический гомоморфизм (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 1, n°9, prop. 14); так как $(M/N)_{\mathfrak{m}} = M_{\mathfrak{m}}/N_{\mathfrak{m}}$ и $\varphi_{\mathfrak{m}}$ является каноническим гомоморфизмом $M_{\mathfrak{m}} \to M_{\mathfrak{m}}/N_{\mathfrak{m}}$, то данное следствие немедленно вытекает из предложения 12.

Следствие 2. *Пусть M — свободный A-модуль конечного типа, N — подмодуль в M, который также свободен над A и имеет конечный тип. Для того чтобы N был прямым слагаемым модуля M, необходимо и достаточно, чтобы при всяком $\mathfrak{m} \in \Omega$ выполнялось равенство $\mathfrak{m}N = N \cap (\mathfrak{m}M)$.*

В самом деле, по определению модуль M/N конечно представим. С другой стороны, $N_{\mathfrak{m}}$ и $M_{\mathfrak{m}}$ — свободные $A_{\mathfrak{m}}$-модули конечного типа. Для того чтобы $N_{\mathfrak{m}}$ был прямым слагаемым в $M_{\mathfrak{m}}$, необходимо и достаточно, чтобы каноническое отобра-

жение $N_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}N_{\mathfrak{m}} \to M_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}M_{\mathfrak{m}}$ было инъективным (n° 2, предложение 6), что равносильно инъективности канонического отображения $N/\mathfrak{m}N \to M/\mathfrak{m}M$ (предложение 9); а так как ядро последнего равно $(N \cap \mathfrak{m}M)/\mathfrak{m}N$, то это доказывает следствие.

Предложение 1 (соответственно следствие 1) будет, в частности, применяться в случае, когда кольцо A *нётерово*, а E (соответственно M/N) — A-модуль *конечного типа* (гл. I, § 2, n° 8, лемма 8).

4. *Поведение плоских модулей при локализации*

Предложение 13. *Пусть S — мультипликативная система кольца A и M — некоторый A-модуль. Если модуль M плоский* (соответственно *строго плоский*), *то $S^{-1}M$ является плоским* (соответственно *строго плоским*) *$S^{-1}A$-модулем и, кроме того, плоским A-модулем.*

Так как $S^{-1}M = M \otimes_A S^{-1}A$, то первое утверждение вытекает из следствия 2 предложения 8 гл. I, § 2, n° 7 (соответственно из предложения 5 гл. I, § 3, n° 3). Кроме того $S^{-1}A$ является плоским A-модулем (§ 2, n° 4, теорема 1); следовательно, если M — плоский A-модуль, то таков же и $S^{-1}M$ в силу следствия 3 предложения 8 гл. I, § 2, n° 7.

Замечание. Если N — некоторый $S^{-1}A$-модуль, то $S^{-1}N$ отождествляется с N и, следовательно, высказывания «N есть плоский $S^{-1}A$-модуль» и «N есть плоский A-модуль» эквивалентны.

Предложение 14. *Пусть A — кольцо, B — коммутативная A-алгебра и T — мультипликативная система в B. Если N — некоторый B-модуль, являющийся плоским как A-модуль, то $T^{-1}N$ является плоским A-модулем.*

В самом деле, $T^{-1}N = T^{-1}B \otimes_B N$. Это предложение следует теперь из предложения 8 гл. I, § 2, n° 7, примененного к случаю, где вместо A берется B, вместо B берется A, вместо E берется $T^{-1}B$ и F заменяется на N.

Предложение 15. *Пусть A, B — два кольца, φ: $A \to B$ — некоторый гомоморфизм, N — некоторый B-модуль. Следующие свойства эквивалентны:*

а) *N — плоский A-модуль;*

б) *для любого максимального идеала $\mathfrak{n}$ кольца B $N_{\mathfrak{n}}$ является плоским A-модулем;*

в) *если положить $\mathfrak{m} = \varphi^{-1}(\mathfrak{n})$ для любого максимального идеала $\mathfrak{n}$ кольца B, то $N_{\mathfrak{n}}$ является плоским $A_{\mathfrak{m}}$-модулем.*

Для всякого $a \notin \mathfrak{m}$ гомотетия умножения на a модуля $N_{\mathfrak{n}}$ биективна, так что $N_{\mathfrak{n}}$ канонически отождествляется с $(N_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{m}}$ и эквивалентность свойств б) и в) вытекает из замечания, сделанного после предложения 13. Тот факт, что из а) следует б), является частным случаем предложения 14. Остается доказать, что из б) следует а), т. е. если выполнено условие б), то для всякого инъективного гомоморфизма A-модулей $u\colon M \to M'$ гомоморфизм $v = 1 \otimes u\colon N \otimes_A M \to N \otimes_A M'$ также инъективен. Однако гомоморфизм v является и гомоморфизмом B-модулей, и, для того чтобы он был инъективным, необходимо и достаточно, чтобы для любого максимального идеала $\mathfrak{n}$ кольца B был инъективным гомоморфизм $v_{\mathfrak{n}}\colon (N \otimes_A M)_{\mathfrak{n}} \to (N \otimes_A M')_{\mathfrak{n}}$ (n° 3, теорема 1). Так как

$$(N \otimes_A M)_{\mathfrak{n}} = B_{\mathfrak{n}} \otimes_B (N \otimes_A M) = N_{\mathfrak{n}} \otimes_A M,$$

то $v_{\mathfrak{n}}$ есть не что иное, как гомоморфизм $1 \otimes u\colon N_{\mathfrak{n}} \otimes_A M \to N_{\mathfrak{n}} \otimes_A M'$, а он инъективен, так как по предложению $N_{\mathfrak{n}}$ — плоский A-модуль.

Следствие. *Для того чтобы A-модуль M был плоским* (соответственно *строго плоским*), *необходимо и достаточно, чтобы для всякого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A модуль $M_{\mathfrak{m}}$ был плоским* (соответственно *строго плоским*) *$A_{\mathfrak{m}}$-модулем.*

Необходимость этих условий следует из предложения 13. Обратно, если $M_{\mathfrak{m}}$ — плоский $A_{\mathfrak{m}}$-модуль при каждом максимальном идеале $\mathfrak{m}$ кольца A, то M — плоский A-модуль, согласно предложению 15, примененному к случаю тождественного отображения φ. Наконец, если $M_{\mathfrak{m}}$ — строго плоский $A_{\mathfrak{m}}$-модуль при каждом $\mathfrak{m}$, то $\mathfrak{m}M_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}M_{\mathfrak{m}} \neq M_{\mathfrak{m}}$, следовательно, $\mathfrak{m}M \neq M$ при всех $\mathfrak{m}$ (n° 3, предложение 9), а это и доказывает, что M — строго плоский A-модуль (гл. I, § 3, n° 1, предложение 1г)).

5. *Полулокальные кольца*

Предложение 16. *Пусть A — кольцо. Следующие условия эквивалентны:*

а) *множество максимальных идеалов кольца A конечно;*

б) *факторкольцо кольца A по его радикалу распадается в прямое произведение конечного числа полей.*

Предположим, что факторкольцо A по его радикалу $\mathfrak{R}$ распадается в прямое произведение конечного числа полей. Тогда $A/\mathfrak{R}$ обладает лишь конечным числом идеалов и, *тем более*, конечным числом максимальных идеалов. Поскольку любой максимальный идеал содержит $\mathfrak{R}$ (*Алгебра*, гл. VIII, § 6, n° 2, опре-

деление 2), то максимальными идеалами кольца A служат прообразы максимальных идеалов кольца $A/\mathfrak{R}$ относительно канонического гомоморфизма $A \to A/\mathfrak{R}$. Таким образом, этих идеалов лишь конечное число.

Обратно, предположим, что кольцо A содержит лишь конечное число различных максимальных идеалов $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$. Факторкольца $A/\mathfrak{m}_i$ являются полями, и из предложения 5 § 1, n° 2, следует, что каноническое отображение $A \to \prod_{i=1}^{n} A/\mathfrak{m}_i$ сюръективно. Так как его ядро $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i$ равно радикалу $\mathfrak{R}$ (*Алгебра*, гл. VIII, § 6, n° 2, определение 2), то кольцо $A/\mathfrak{R}$ изоморфно прямому произведению $\prod_{i=1}^{n} A/\mathfrak{m}_i$.

Определение 4. *Кольцо называется полулокальным, если оно удовлетворяет эквивалентным условиям* а) *и* б) *предложения* 16.

Примеры. Любое локальное кольцо полулокально. Всякое факторкольцо полулокального кольца полулокально. Любое конечное произведение полулокальных колец есть полулокальное кольцо. *Если A нётерово полулокальное кольцо и B — некоторая A-алгебра, являющаяся A-модулем конечного типа, то B — полулокальное кольцо (гл. IV, § 2, n° 5, следствие 3 из предложения 9).*

Другой пример, обобщающий конструкцию локальных колец $A_{\mathfrak{p}}$, получается из следующего предложения:

Предложение 17. *Пусть A — некоторое кольцо и $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ — простые идеалы в A. Положим $S = \bigcap_{i=1}^{n} (A - \mathfrak{p}_i) = A - \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. Тогда*

а) *кольцо $S^{-1}A$ полулокально; если $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r$ — различные максимальные (относительно отношения включения) элементы множества идеалов $\mathfrak{p}_i$, то максимальные идеалы кольца $S^{-1}A$ — это идеалы $S^{-1}\mathfrak{q}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$, причем все они попарно различны;*

б) *кольцо $A_{\mathfrak{p}_i}$ канонически изоморфно кольцу $(S^{-1}A)_{S^{-1}\mathfrak{p}_i}$ при $i = 1, \ldots, n$;*

в) *если кольцо A целостное, то $S^{-1}A = \bigcap_{i=1}^{n} A_{\mathfrak{p}_i}$ в поле частных кольца A.*

а) Идеалы кольца A, не пересекающиеся с системой S, исчерпываются идеалами, содержащимися в объединении идеалов $\mathfrak{p}_i$, а следовательно, по крайней мере в одном из идеалов $\mathfrak{p}_i$

(§ 1, n° 1, предложение 2). Поэтому $\mathfrak{q}_j$ представляют собой максимальные элементы в множестве тех идеалов, которые не пересекают S. Отсюда в свою очередь, согласно предложению 11 (ii) из § 2, n° 5, получается, что $S^{-1}\mathfrak{q}_j$ — это максимальные идеалы кольца $S^{-1}A$.

б) Это частный случай предложения 11 (iii) из § 2, n° 5.

в) Допустим, что A — целостное кольцо. Если $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}_k$, то $A_{\mathfrak{p}_i} \supset A_{\mathfrak{p}_k}$. Чтобы доказать в), можно, следовательно, предположить, что идеалы $\mathfrak{p}_i$ друг в друге не содержатся. Тогда утверждение а) и следствие 4 теоремы 1 из n° 3 дают равенство $S^{-1}A = \bigcap_{i=1}^{n} (S^{-1}A)_{S^{-1}\mathfrak{p}_i}$. Отсюда утверждение в) получается как следствие утверждения б).

Если A — целостное кольцо, то кольцо $S^{-1}A$ также целостное, и, таким образом, предложение 17 дает пример полулокального кольца, которое не распадается в прямую сумму локальных колец (ср. с гл. III, § 2, n° 13).

Следствие. *Пусть A — область целостности и $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ — простые идеалы кольца A, не сравнимые друг с другом относительно отношения включения. Если $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_{\mathfrak{p}_i}$ в поле частных кольца A, то максимальные идеалы кольца A — это идеалы $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$.*

Если положить $S = \bigcap_{i=1}^{n} (A - \mathfrak{p}_i)$, то $S^{-1}A = A$ в силу предложения 17в). Следовательно, элементы системы S обратимы в A и $S^{-1}\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i$ при любом i. Наше утверждение получается отсюда с помощью предложения 17а).

Упражнения

1) а) Пусть A — кольцо, не обязательно коммутативное, I_s (соответственно I_d) — множество элементов из A, не имеющих обратного слева (соответственно справа). Показать, что следующие условия эквивалентны: 1° сумма любых двух элементов из I_s принадлежит I_s; 2° множество I_s является левым идеалом; 3° существует наибольший левый идеал $\mathfrak{J}$ в множестве левых идеалов, отличных от A. Если эти условия выполнены, то им удовлетворяет и противоположное кольцо A° и $I_s = I_d = \mathfrak{J}$, а $\mathfrak{J}$ является единственным максимальным (левым или правым) идеалом в A, следовательно, радикалом в A; всякий элемент $x \notin \mathfrak{J}$ обратим и $A/\mathfrak{J}$ есть тело (ср. с *Алгеброй*, гл. VIII, § 6, n° 3). В этом случае тоже говорят, что A — *локальное кольцо*.

б) Показать, что в локальном кольце не существует идемпотентов, отличных от 0 и 1.

2) а) Пусть A — локальное кольцо (коммутативное), максимальный идеал $\mathfrak{m}$ которого является главным, причем $\bigcap_{n \geqslant 1} \mathfrak{m}^n = 0$ (ср. с гл. III, § 3, n° 2, следствие и предложения 4). Показать, что единственно возможными

идеалами в A, отличными от самого A, являются степени $\mathfrak{m}^n$; вывести отсюда, что A — нётерово кольцо, что оно либо *является кольцом дискретного нормирования (гл. VI)*, либо представляет собой *квазиглавное кольцо*, в котором 1 является неразложимым идемпотентом (*Алгебра*, гл. VII, § 1, упражнение 6) [1]).

б) Пусть A — кольцо ростков в точке $t = 0$ числовых функций, определенных и непрерывных в некоторой окрестности точки 0 и дифференцируемых в 0 (*Общая топология*, 1968, гл. I, § 6, n° 10). Показать, что A — локальное кольцо, максимальный идеал $\mathfrak{m}$ которого порождается ростком функции j: $t \to t$; для любого n имеет место неравенство $\mathfrak{m}^n \neq 0$, однако A не является кольцом главных идеалов. Если c — росток функции $t \to \exp(-1/t^2)$ и $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца A, не содержащий c, то показать, что факторкольцо $B = A/\mathfrak{p}$ будет целостным локальным кольцом, не являющимся кольцом главных идеалов, но максимальный идеал в нем является главным.

¶ 3) Пусть A — локальное кольцо (не обязательно коммутативное, см. упражнение 1) и $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал.

а) Пусть L — свободный левый A-модуль, $x \neq 0$ — некоторый элемент из L. Пусть $(e_\iota)_{\iota \in I}$ — некоторый базис модуля L, в котором число отличных от нуля координат элемента x наименьшее; если $x = \sum_{\iota \in I} \xi_\iota e_\iota$, то пусть J — множество тех индексов $\iota \in I$, для которых $\xi_\iota \neq 0$. Показать, что ни один из элементов ξ_ι ($\iota \in J$) не принадлежит тому правому идеалу кольца A, который порожден остальными координатами.

б) Сохраняя обозначения и предположения пункта а), обозначим через P, Q дополнительные подмодули в L, такие, что $x \in P$; пусть для любого $\iota \in I$ $e_\iota = y_\iota + z_\iota$, где $y_\iota \in P$, $z_\iota \in Q$. Показать, что семейство, образованное элементами y_ι для $\iota \in J$ и элементами e_ι для $\iota \notin J$, является базисом модуля L. (С помощью а) доказать, что если $z_\varkappa = \sum_{\iota \in I} \xi_{\varkappa\iota} e_\iota$, то координаты $\xi_{\varkappa\iota}$, для которых $\varkappa \in J$ и $\iota \in J$ обязательно принадлежат $\mathfrak{m}$, и воспользоваться следствием 2 из предложения 4). Вывести отсюда, что существует свободный подмодуль в P, который содержит элемент x и является прямым слагаемым модуля P.

в) Показать, что всякий проективный A-модуль P свободен (применить теорему Капланского (*Algèbre*, chap. II, 3e éd., § 2, exercise 4) [2]), чтобы свести рассмотрения к случаю, когда P порожден счетной системой элементов, и применить в этом случае пункт б)).

г) Привести пример локального кольца A и плоского A-модуля M, который не является свободным и удовлетворяет равенству $\mathfrak{m}M = M$. (Взять $A = \mathbf{Z}_{(p)}$.) *(В гл. III, § 3, мы дадим примеры строго плоских A-модулей, не являющихся свободными над нётеровым локальным кольцом A).*

д) Пусть A — локальное кольцо и M — плоский A-модуль конечного типа. Показать, что M — свободный A-модуль (воспользоваться упражнением 23д) гл. I, § 2).

4) Пусть A — локальное кольцо (не обязательно коммутативное) и $\mathfrak{m}$ — его радикал. Пусть M и N — два свободных A-модуля (конечного типа или нет); пусть u: $M \to N$ — такой гомоморфизм, что $1 \otimes u$: $M/\mathfrak{m}M \to N/\mathfrak{m}N$ является биективным отображением. Показать, что гомоморфизм u биективен. (Последовательно доказать, что гомоморфизм u сюръективен и что он инъективен, сводя все к случаю, когда M и N имеют конечный тип, и используя соответственно следствие 1 предложения 4 и предложение 6.)

5) Показать на примере, что предложение 7 не распространяется на случай, когда локальное кольцо A не редуцировано.

---

[1]) Где использован термин «квазикольцо главных идеалов». — *Прим. ред.*

[2]) См. прим. перев. на стр. 49. — *Прим. ред.*

6) а) Пусть M — определенный в *Алгебре,* гл. VII, § 4, упражнение 22з), $\mathbf{Z}$-модуль; пусть T — подмодуль кручения в M. Показать, что для любого простого числа p подмодуль $T_{(p)}$ модуля $M_{(p)}$ является прямым слагаемым в $M_{(p)}$, в то время как T прямым слагаемым в M не является.

б) Пусть N — определенный в *Алгебре*, гл. VII, § 3, упражнение 5, $\mathbf{Z}$-модуль; показать, что для любого простого числа p $M_{(p)}$ является свободным $\mathbf{Z}_{(p)}$-модулем, в то время как M не является свободным $\mathbf{Z}$-модулем.

7) Пусть A — кольцо и $(S_\lambda)_{\lambda\in L}$ — некоторое семейство таких мультипликативных систем кольца A, что для всякого максимального идеала $\mathfrak{m}$ из A существует такой индекс $\lambda\in L$, что $\mathfrak{m}\cap S_\lambda=\varnothing$ (ср. с упражнением 8 § 2). Пусть M, N — два A-модуля и u: $M\to N$ — некоторый гомоморфизм. Для того чтобы гомоморфизм u был сюръективным (соответственно инъективным, биективным, нулевым), необходимо и достаточно, чтобы для любого $\lambda\in L$ этим же свойством обладал гомоморфизм $S_\lambda^{-1}u$: $S_\lambda^{-1}M\to S_\lambda^{-1}N$. Как обобщить следствия теоремы 1 в n° 3?

8) Пусть A — кольцо, B — некоторая A-алгебра (не обязательно коммутативная) и E — левый B-модуль конечного типа.

а) Пусть S — мультипликативная система в A; снабдим $S^{-1}B=S^{-1}A\otimes_A B$ структурой $S^{-1}A$-алгебры; тогда модуль $S^{-1}E$ может рассматриваться как левый $S^{-1}B$-модуль (*Алгебра,* гл. VIII, § 7, n° 1), изоморфный $S^{-1}B\otimes_B E$. Показать, что если E — плоский B-модуль, то $S^{-1}E$ — плоский $S^{-1}B$-модуль.

б) Пусть $(S_\lambda)_{\lambda\in L}$ — такое семейство мультипликативных систем кольца A, что для всякого максимального идеала $\mathfrak{m}$ из A существует индекс $\lambda\in L$, для которого $\mathfrak{m}\cap S_\lambda=\varnothing$. Показать, что $\bigoplus_{\lambda\in L} S_\lambda^{-1}B$ является строго плоским B-модулем (левым или правым; ср. с упражнением 8 § 2). Показать, что если для любого $\lambda\in L$ $S_\lambda^{-1}E$ является строго плоским $S_\lambda^{-1}B$-модулем (соответственно плоским), то E является строго плоским B-модулем (соответственно плоским) (воспользоваться упражнением 9 гл. I, § 3, при $C_\lambda=S_\lambda^{-1}A$).

в) Предположим, что системы S_λ удовлетворяют условию пункта б) и что L — конечное множество. Показать, что если $S_\lambda^{-1}E$ является проективным $S_\lambda^{-1}B$-модулем конечного типа для любого индекса $\lambda\in L$, то E является проективным B-модулем конечного типа.

9) Показать, что, для того чтобы некоторое (коммутативное) кольцо A было абсолютно плоским (гл. I, § 2, упражнение 17), необходимо и достаточно, чтобы для всякого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A кольцо $A_\mathfrak{m}$ было полем (заметить, что абсолютно плоское локальное кольцо обязательно является полем и применить следствие предложения 15).

10) Пусть A, B — два кольца, ρ: $A\to B$ — некоторый гомоморфизм, $\mathfrak{q}$ — минимальный простой идеал в B и $\mathfrak{p}=\rho^{-1}(\mathfrak{q})$. Предположим, что существует такой B-модуль N, что $N_\mathfrak{q}$ является отличным от нуля плоским A-модулем и что $N_\mathfrak{q}$ является $A_\mathfrak{p}$-модулем конечного типа; тогда простой идеал $\mathfrak{p}$ минимален в A. (Обратить внимание на то, что $N_\mathfrak{p}$ в этом случае является строго плоским $A_\mathfrak{p}$-модулем и применить следствие 4 предложения 11 § 2, n° 5.)

11) Пусть A — некоторое кольцо, $\mathfrak{a}$ — идеал в A и S — мультипликативная система в A, образованная теми элементами, канонические образы которых в $A/\mathfrak{a}$ не являются делителями 0; пусть Φ — множество максимальных элементов в множестве таких идеалов кольца A, которые не пересекаются с S (таким образом, идеалы $\mathfrak{p}\in\Phi$ просты, ср. § 2, n° 5, предложение 11). Показать, что $\mathfrak{a}$ является пересечением своих насыщений относительно идеалов $\mathfrak{p}\in\Phi$ (свести к случаю, когда $\mathfrak{a}=0$ и применить следствие 1 теоремы 1).

¶ 12) Пусть $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$ — произведение некоторого конечного семейства локальных колец A_i, канонически отождествленных с идеалами кольца A. Пусть B — такое подкольцо в A, что $\mathrm{pr}_i B = A_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Показать, что B разлагается в прямое произведение не более чем n локальных колец и является прямым произведением n локальных колец только в том случае, когда $B = A$. (Провести индукцию по n, рассматривая идеалы $\mathfrak{a}_i = B \cap A_i$ кольца B. Последовательно проверить случай $\mathfrak{a}_i = A_i$ по крайней мере для одного индекса i и случай $\mathfrak{a}_i \neq A_i$ для любого индекса i. Обратить внимание на то, что если $\mathfrak{a}_i \neq A_i$, то каждый максимальный идеал кольца B содержит $\mathfrak{a}_i$ и, рассматривая кольцо $B/\mathfrak{a}_i$, получить отсюда, что имеется не более $n-1$ различных максимальных идеалов в B; далее, если B не является локальным кольцом, то свести дело к случаю, когда $\mathfrak{a}_j = A_j$ для $j \neq i$ и воспользоваться предположением индукции, а также упражнением 1б).) Привести пример, когда $n > 1$ и B является локальным кольцом, не изоморфным ни одному из A_i (взять в качестве A_i алгебры над одним и тем же полем K, максимальные идеалы $\mathfrak{m}_i$ которых имеют нулевые квадраты.)

¶ 13) Пусть G — конечная группа порядка n, равного степени p^l некоторого простого числа p, и K — поле характеристики p.

а) Пусть E — конечное множество, на котором действует данная группа G (*Алгебра*, гл. I, § 7, n° 2); если E' — множество тех элементов из E, которые инвариантны относительно каждого $g \in G$, то показать, что $\mathrm{Card}\,(E) \equiv \mathrm{Card}\,(E') \pmod{p}$. Вывести отсюда, что если G не равна своему нейтральному элементу e, то центр Z группы G не сводится к элементу e (представить G как группу операторов на самой себе с помощью внутренних автоморфизмов). Сделать отсюда вывод о том, что G — разрешимая группа (*Алгебра*, гл. I, § 6, упражнение 14).

б) Пусть V — векторное пространство над K, и пусть ρ — гомоморфизм из G в $\mathbf{GL}(V)$. Пусть V' — множество элементов $x \in V$, инвариантных относительно линейных отображений $\rho(g)$, где $g \in G$. Показать, что если V' равно нулю, то V обязательно тоже равно нулю. (Если $x \in V$ и $x \neq 0$, то применить пункт а) к аддитивной подгруппе E пространства V, порожденной элементами $\rho(g)x$, где $g \in G$.)

в) Пусть $A = K^{(G)}$ — групповая алгебра группы G над полем K (*Algèbre*, chap. III, 3e éd., § 1) [1]) и пусть I — векторное подпространство в A (над K), порожденное элементами вида $1 - g$, где $g \in G$. Показать, что I является радикалом кольца A и что A/I изоморфно полю K (воспользоваться пунктом б) и определением радикала); вывести отсюда, что I — нильпотентный идеал.

г) Пусть V — модуль конечного типа над кольцом A, а V' — множество таких элементов x из V, что $gx = x$ при всех $g \in G$. Показать, что имеют место следующие неравенства:

$$\dim_K (V) \leqslant n \cdot \dim_K (V/IV); \quad (*) \qquad \dim_K (V) \leqslant n \cdot \dim_K (V'). \quad (**)$$

(Чтобы установить (*), воспользуйтесь следствием 2 из предложения 4; чтобы вывести (**), надо рассмотреть пространство, двойственное к векторному пространству V над K.) Для того чтобы оба члена неравенства (*) (соответственно (**)) были равны, необходимо и достаточно, чтобы V было свободным A-модулем (ср. следствие 1 из предложения 5).

14) Пусть A — некоторое, не обязательно коммутативное, кольцо, радикал $\mathfrak{m}$ которого таков, что $A/\mathfrak{m}$ — тело; пусть M — свободный A-модуль конечного типа.

а) Пусть M' — второй свободный A-модуль конечного типа и пусть $u\colon M \to M'$ — такой гомоморфизм, что $u(M)$ является прямым слагаемым в M'; назовем *рангом* гомоморфизма u и обозначим через $\mathrm{rg}\,(u)$ число $\dim u\,(M)$.

[1]) См. также [Л], стр. 130. — *Прим. ред.*

Для любого такого гомоморфизма Ker (u) является прямым слагаемым в M и $\operatorname{rg}(u) = \dim M - \dim(\operatorname{Ker}(u))$; для того чтобы гомоморфизм u был инъективным (соответственно сюръективным), необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rg}(u) = \dim M$ (соответственно $\operatorname{rg}(u) = \dim M'$). Транспонированное отображение ${}^t u$ таково, что ${}^t u(M'^*)$ служит прямым слагаемым в M^*, и имеет место равенство $\operatorname{rg}({}^t u) = \operatorname{rg}(u)$.

б) Пусть $n = \dim M$. Назовем *прямыми* (соответственно *гиперплоскостями*) в M прямые слагаемые модуля M размерности 1 (соответственно $n-1$). Говорят, что автоморфизм $u \in \mathbf{GL}(M)$, отличный от тождественного, является *трансвекцией*, если существует гиперплоскость H в M, элементы которой инвариантны относительно u, и $u(x) = x + a\varphi(x)$, где φ — некоторая линейная форма на M, для которой $H = \operatorname{Ker}(\varphi)$ и $a \in H$. Если кольцо A коммутативно, то показать, что любой автоморфизм $u \in \mathbf{GL}(M)$ с определителем 1 является произведением трансвекций (заметить, что в матрице автоморфизма u относительно какого-нибудь базиса модуля M каждый столбец содержит по крайней мере один обратимый элемент из A и что матрица вида $I + \lambda E_{ij}$ $(i \neq j)$ является матрицей трансвекции).

в) Привести пример такого автоморфизма $u \in \mathbf{GL}(M)$, что ядро отображения $1 - u$ не является прямым слагаемым модуля M (взять в качестве A локальное кольцо $K[[X, Y]]$ формальных степенных рядов от двух переменных над полем K и положить $M = A^2$).

г) Привести пример прямых слагаемых N, P модуля M (обязательно свободных), для которых $N + P$ и $N \cap P$ не являются прямыми слагаемыми для M. (Взять $A = K[X]/(X^2)$, где K — поле, и положить $M = A^2$.)

¶ 15) Пусть A — некоторое кольцо (коммутативное) и M — A-модуль.

а) Для того чтобы некоторый подмодуль M' модуля M был чистым (гл. I, § 2, упражнение 24), необходимо и достаточно, чтобы для всякого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A модуль $M'_{\mathfrak{m}}$ был чистым $A_{\mathfrak{m}}$-подмодулем модуля $M_{\mathfrak{m}}$ (воспользоваться теоремой 1 n° 3).

б) Предположим, что A — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и M — свободный A-модуль конечного типа. Для того чтобы некоторый подмодуль M' конечного типа модуля M был чистым, необходимо и достаточно, чтобы он был прямым слагаемым в M. (Используя следствие 1 из предложения 5 в n° 2, свести все к доказательству того, что если $M' \subset \mathfrak{m}M$, то M' может быть чистым подмодулем в M только тогда, когда $M' = 0$.)

16) Пусть $(A_\lambda, f_{\mu\lambda})$ — фильтрующаяся индуктивная система локальных колец, в которой гомоморфизмы $f_{\mu\lambda}$ — локальные; пусть $\mathfrak{m}_\lambda$ — максимальный идеал в A_λ, и пусть $K_\lambda = A_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda$. Тогда $A = \varinjlim A_\lambda$ является локальным кольцом, в котором $\mathfrak{m} = \varinjlim \mathfrak{m}_\lambda$ служит максимальным идеалом, а $K = \varinjlim K_\lambda$ является его полем вычетов. Кроме того, если $\mathfrak{m}_\mu = A_\mu \mathfrak{m}_\lambda$ для $\lambda < \mu$, то $\mathfrak{m} = A\mathfrak{m}_\lambda$ при всех λ.

§ 4. Спектры колец и носители модулей

1. Неприводимые пространства

Определение 1. *Топологическое пространство X называется неприводимым, если пересечение любого конечного числа непустых открытых множеств в X непусто.*

Неприводимое пространство всегда непусто, что видно из рассмотрения пустого семейства открытых множеств в X. Для того чтобы некоторое топологическое пространство X было не-

приводимым, необходимо и достаточно, чтобы оно было непустым и чтобы пересечение двух любых непустых открытых множеств в X всегда было непустым (или, что то же самое, чтобы объединение двух любых отличных от X замкнутых множеств всегда отличалось от X).

Предложение 1. *Пусть X — непустое топологическое пространство. Следующие условия эквивалентны:*

а) *X неприводимо;*

б) *любое непустое открытое множество пространства X плотно в X;*

в) *любое открытое множество пространства X связно.*

По определению, плотное множество топологического пространства X — это множество, имеющее непустое пересечение с любым непустым открытым множеством; следовательно, а) и б) эквивалентны. Непосредственно проверяется, что из в) следует а), так как если U_1 и U_2 — открытые непустые непересекающиеся множества, то $U_1 \cup U_2$ является множеством открытым и несвязным. Наконец, покажем, что из а) следует в): если U — любое открытое несвязное множество, то оно является объединением двух множеств U' и U'', которые между собой не пересекаются, открыты в U, а потому открыты и в X; отсюда следует, что X не является неприводимым.

Отделимое пространство является неприводимым лишь в том случае, когда оно состоит из одной точки.

Подмножество E топологического пространства X называется *неприводимым*, если E как подпространство пространства X неприводимо. Для того чтобы E было неприводимым множеством, необходимо и достаточно, чтобы для любой пары множеств U и V, открытых в X и пересекающихся с E, множество $U \cap V$ также пересекалось с E или (что то же самое) чтобы для любой пары множеств F, G, замкнутых в X и таких, что $E \subset F \cup G$, выполнялось одно из включений $E \subset F$ или $E \subset G$; индукцией по n отсюда получается, что если $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — любое конечное семейство таких замкнутых множеств в X, что $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} F_i$, то существует индекс i, для которого $E \subset F_i$.

Предложение 2. *Для того чтобы множество E в топологическом пространстве X было неприводимым, необходимо и достаточно, чтобы неприводимым было его замыкание $\bar{E}$.*

Действительно, для того чтобы открытое множество в X пересекало E, необходимо и достаточно, чтобы оно пересекало $\bar{E}$, и предложение следует из предыдущих замечаний.

Предложение 3. (i) *Если X — неприводимое пространство, то любое его непустое открытое подмножество также неприводимо.*
(ii) Пусть $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ — *непустое покрытие топологического пространства X, образованное такими открытыми множествами, что $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ для любой пары индексов (α, β). Если множества U_α неприводимы, то неприводимо и пространство X.*

(i) Если X — неприводимое пространство, $U \subset X$ — непустое открытое множество в нем и $V \subset U$ — произвольное непустое открытое множество в U, то V открыто и в X; следовательно, V плотно в X и a fortiori оно плотно в U. Следовательно, U — неприводимое множество.

(ii) Покажем, что если V — любое непустое открытое в X множество, то $V \cap U_\alpha \neq \varnothing$ для всякого $\alpha \in A$. Отсюда и из условия будет следовать, что множество $V \cap U_\alpha$ плотно в U_α, а потому V плотно в X и этим будет установлена неприводимость пространства X (предложение 1). Действительно, существует по крайней мере один индекс γ, для которого $V \cap U_\gamma \neq \varnothing$; так как $U_\alpha \cap U_\gamma \neq \varnothing$ при всех α и, кроме того, множество $V \cap U_\gamma$ плотно в множестве U_γ, то $U_\alpha \cap U_\gamma \cap V \neq \varnothing$ и a fortiori $U_\alpha \cap V \neq \varnothing$. Этим завершается доказательство пункта (ii).

Предложение 4. *Пусть X и Y — два топологических пространства и f — любое непрерывное отображение пространства X в Y. Тогда для любого неприводимого подмножества E пространства X множество $f(E)$ — неприводимое подмножество в Y.*

Действительно, если U, V — два открытых множества в пространстве Y, пересекающиеся с $f(E)$, то их прообразы $f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(V)$ являются открытыми множествами в пространстве X, пересекающимися с E. Следовательно, множество $f^{-1}(U) \cap \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V)$ пересекается с E, в силу чего $U \cap V$ пересекается с $f(E)$. Предложение доказано.

Определение 2. *Неприводимой компонентой топологического пространства X называется любое его максимальное неприводимое подмножество.*

Из предложения 2 следует, что любая неприводимая компонента пространства X *замкнута* в X.

Предложение 5. *Пусть X — топологическое пространство. Всякое неприводимое подмножество пространства X содержится в некоторой неприводимой компоненте пространства X и само X является объединением своих неприводимых компонент.*

Для доказательства первого утверждения достаточно, в силу теоремы Цорна, показать, что множество $\mathfrak{F}$ неприводимых подмножеств пространства X индуктивно. Пусть $\mathfrak{G}$ — любое совершенно упорядоченное подмножество множества $\mathfrak{F}$; мы покажем,

что объединение E множеств $F \in \mathfrak{S}$ неприводимо. Пусть U, V — два открытых множества в пространстве X, пересекающих E; поскольку $\mathfrak{S}$ совершенно упорядочено, существует некоторое $F \in \mathfrak{S}$, пересекающееся с U и V. Так как множество F неприводимо, то $U \cap V$ пересекается с F, а потому и с E, что и доказывает неприводимость множества E. Следовательно, множество $\mathfrak{S}$ индуктивно. Второе утверждение следует из первого, так как любое подмножество в X, состоящее из одной точки, неприводимо.

Следствие. *Любая связная компонента топологического пространства X является объединением неприводимых компонент этого пространства.*

Действительно, всякое неприводимое подпространство X связно в силу предложения 1; поэтому оно содержится в некоторой связной компоненте пространства X.

Отметим, что две различные неприводимые компоненты пространства X могут иметь общие точки (упражнение 11).

Предложение 6. *Пусть X — топологическое пространство и $(P_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — конечное покрытие этого пространства неприводимыми замкнутыми множествами. Тогда неприводимые компоненты пространства X являются максимальными (в смысле отношения включения) элементами множества, состоящего из всех P_i.*

Можно ограничиться случаем, когда множества P_i попарно несравнимы. Если E — любое неприводимое подмножество в X, то $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} P_i$, и потому E содержится в одном из замкнутых множеств P_i. Отсюда следует, что P_i являются единственно возможными максимальными неприводимыми множествами в X.

Следствие. *Пусть X — топологическое пространство и E — подпространство в X, имеющее лишь конечное число различных неприводимых компонент Q_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Тогда неприводимыми компонентами замыкания $\overline{E}$ в пространстве X служат замыкания $\overline{Q}_i$ компонент Q_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, причем $\overline{Q}_i \neq \overline{Q}_j$ при $i \neq j$.*

В самом деле, $\overline{E}$ является объединением замыканий $\overline{Q}_i$, а они неприводимы (предложение 2); так как множество Q_i замкнуто в E, то $\overline{Q}_i \cap E = Q_i$; так как $Q_i \not\subset Q_j$ для $i \neq j$, то $\overline{Q}_i \not\subset \overline{Q}_j$. Отсюда в силу предложения 6, получается данное следствие.

Замечание. Предположим, что пространство X имеет лишь *конечное* число различных неприводимых компонент X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; тогда множество $U_i = \mathbf{C}\left(\bigcup_{l \neq i} X_l\right)$ *открыто в X и*

плотно в X_i, так как $X_i \not\subset \bigcup_{j \neq i} X_j$. Следовательно, множества U_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ непустые, открытые в X, неприводимые (предложение 2), попарно не пересекаются и их объединение плотно в X.

Предложение 7. *Пусть* U *— открытое подмножество топологического пространства* X. *Тогда отображение* $V \to \overline{V}$ *(взятие замыкания в* X*) является биективным отображением множества неприводимых подмножеств подпространства* U, *замкнутых в* U, *на множество неприводимых подмножеств пространства* X, *замкнутых в* X *и пересекающихся с* U; *обратное биективное отображение задается так:* $Z \to Z \cap U$. *В частности, указанное биективное отображение переводит множество неприводимых компонент пространства* U *на множество неприводимых компонент пространства* X, *пересекающихся с* U.

Действительно, если V — неприводимое и замкнутое в U множество, то его замыкание $\overline{V}$ также неприводимо (предложение 2) и $V = \overline{V} \cap U$. Обратно, если множество Z неприводимо, замкнуто в X и пересекается с U, то $Z \cap U$ — непустое открытое множество в Z, а потому оно неприводимо (предложение 3), плотно в Z и, так как Z замкнуто, $Z = \overline{Z \cap U}$. Предложение доказано.

2. *Нётеровы топологические пространства*

Определение 3. *Топологическое пространство* X *называется нётеровым, если любое непустое множество замкнутых подмножеств пространства* X, *упорядоченное по включению, обладает минимальным элементом.*

Это равносильно тому, что всякое непустое множество открытых подмножеств пространства X, упорядоченное по включению, содержит максимальный элемент, или тому, что всякая убывающая (соответственно возрастающая) последовательность замкнутых (соответственно открытых) множеств стационарна (*Теория множеств*, гл. III, § 6, n° 5, предложение 6).

Предложение 8. (i) *Всякое подпространство нётерова пространства само является нётеровым.*

(ii) *Пусть* $(A_i)_{i \in I}$ *— конечное покрытие топологического пространства* X. *Если подпространства* A_i *пространства* X *нётеровы, то нётерово и само пространство* X.

(i) Пусть X — нётерово пространство, A — подпространство пространства X и (F_n) — убывающая последовательность подмножеств из A, *замкнутых* в A; имеем $F_n = \overline{F}_n \cap A$, и замыкания $\overline{F}_n$ множеств F_n в пространстве X образуют убывающую после-

довательность замкнутых подмножеств в X. Так как эта последовательность стационарна, то такова же и последовательность (F_n).

(ii) Пусть $(G_n)_{n\geqslant 0}$ — произвольная убывающая последовательность замкнутых множеств в пространстве X. По условию, каждая из последовательностей $(G_n \cap A_i)_{n\geqslant 0}$ стационарна. Так как множество I конечно, то существует такое целое n_0, что $G_n \cap A_i = G_{n_0} \cap A_i$ при $n \geqslant n_0$ для всех $i \in I$. Но $G_n = \bigcup_{i\in I} (G_n \cap A_i)$, в силу чего последовательность (G_n) стационарна и пространство X нётерово.

Предложение 9. *Для того чтобы топологическое пространство X было нётеровым, необходимо и достаточно, чтобы любое открытое в X множество было квазикомпактным.*

Для доказательства необходимости этого условия можно ограничиться, согласно предложению 8, доказательством того, что любое нётерово пространство X квазикомпактно. Пусть $(U_\iota)_{\iota\in I}$ — произвольное открытое покрытие пространства X. Множество конечных объединений подмножеств U_ι не пусто и, следовательно, обладает некоторым максимальным элементом $V = \bigcup_{\iota\in H} U_\iota$, где H — конечное подмножество в I. По определению, $V \cup U_\iota = V$ при всех $\iota \in I$; следовательно, $V = X$.

Обратно, предположим, что всякое открытое в X множество квазикомпактно, и пусть (U_n) — возрастающая последовательность открытых подмножеств пространства X. Поскольку объединение V множеств U_n открыто, оно квазикомпактно; но так как (U_n) представляет собой открытое покрытие V, то существует конечное подсемейство в системе множеств (U_n), являющееся покрытием множества V. Поэтому $V = U_n$ при некотором индексе n, в силу чего последовательность (U_n) стационарна.

Лемма 1 (принцип нётеровой индукции). *Пусть E — упорядоченное множество, в котором всякое непустое подмножество имеет минимальный элемент. Пусть F — подмножество в E, обладающее следующим свойством: если $a \in E$ — такой элемент, что из соотношения $x < a$ вытекает включение $x \in F$, то $a \in F$. Тогда $F = E$.*

Действительно, предположим, что $F \neq E$. Тогда множество $\complement F$ обладает минимальным элементом b. По определению, $x \in F$ для любого $x < b$, откуда следует, что $b \in F$, — противоречие.

Предложение 10. *Если X — нётерово пространство, то множество неприводимых компонент пространства X (и, тем более, множество его связных компонент) конечно.*

Достаточно доказать, что X является конечным объединением своих замкнутых неприводимых подмножеств (n° 1, предложение 6). Мы покажем, что здесь можно воспользоваться принципом нётеровой индукции, взяв в качестве E множество замкнутых подмножеств пространства X, упорядоченное по включению, а в качестве F — множество конечных объединений неприводимых замкнутых подмножеств. Пусть Y — такое замкнутое подмножество в X, что любая замкнутая часть подмножества Y, отличная от Y, принадлежит F. Если Y неприводимо, то, по определению, $Y \in F$. В противном случае Y представляет собой объединение двух замкнутых множеств Y_1, Y_2, отличных от Y. Следовательно, $Y_1 \in F$ и $Y_2 \in F$ по условию, откуда $Y \in F$, в силу определения множества F.

Отсюда, в частности следует, что *отделимое* нётерово пространство обязательно *конечно*.

3. Простой спектр кольца

Пусть A — любое кольцо и X — множество его простых идеалов. Для любой системы M элементов кольца A обозначим через $V(M)$ множество тех простых идеалов в A, которые содержат M. Очевидно что если $\mathfrak{a}$ — идеал, порожденный множеством M, то $V(M) = V(\mathfrak{a})$; если система M сводится к единственному элементу f, то мы будем писать $V(f)$ вместо $V(\{f\})$; очевидно, что $V(f) = V(Af)$. Отображение $M \to V(M)$ является *убывающим* в смысле отношения включения в множествах A и X. Кроме того, имеют место следующие формулы:

$$V(0) = X, \qquad V(1) = \varnothing; \tag{1}$$

$$V\left(\bigcup_{\iota \in I} M_\iota\right) = V\left(\sum_{\iota \in I} M_\iota\right) = \bigcap_{\iota \in I} V(M_\iota) \tag{2}$$

для любого семейства $(M_\iota)_{\iota \in I}$ подмножеств кольца A. Для любой пары идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}'$ кольца A имеет место формула

$$V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}') = V(\mathfrak{a}\mathfrak{a}') = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{a}'). \tag{3}$$

Действительно, формулы (1) и (2) очевидны; с другой стороны, формула (3) означает, что, для того чтобы некоторый простой идеал $\mathfrak{p}$ кольца A содержал один из идеалов $\mathfrak{a}$ либо $\mathfrak{a}'$, необходимо и достаточно, чтобы он содержал $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$, или чтобы он содержал $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}'$. Это последовательно получается из предложения 1 (§ 1, n° 1). Вторая из формул (1) имеет следующее обращение:

если $\mathfrak{a}$ — такой идеал A, что $V(\mathfrak{a}) = \varnothing$, то $\mathfrak{a} = A$, ибо не существует максимального идеала в A, содержащего $\mathfrak{a}$. Наконец, если $\mathfrak{a}$ — любой идеал в A и $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ — его *корень* (§ 2, n° 6, определение 4), то

$$V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{r}(\mathfrak{a})), \tag{4}$$

что вытекает из следствия 1 предложения 13 (§ 2, n° 6).

Формулы (1)—(3) показывают, что подмножества $V(M)$ удовлетворяют аксиомам *замкнутых множеств* некоторой топологии (*Общая топология*, 1968, гл. I, § 1, n° 4).

Определение 4. *Пусть A — кольцо. Простым спектром кольца A (он будет обозначаться через* $\mathrm{Spec}(A)$*) называется множество X простых идеалов этого кольца, снабженное топологией, в которой замкнутыми множествами являются множества $V(M)$, где M пробегает $\mathfrak{P}(A)$. Так определенная топология называется спектральной или топологией Зарисского на пространстве X.*

Очевидно, что равенство $\mathrm{Spec}(A) = \varnothing$ эквивалентно равенству $A = \{0\}$.

Пусть X — простой спектр кольца A; обозначим для любого $f \in A$ через X_f множество тех простых идеалов в A, которые *не содержат* элемент f; очевидно, что $X_f = X - V(f)$ и X_f — открытое множество. В силу формулы (2), любое замкнутое подмножество в X представляет собой пересечение замкнутых множеств вида $V(f)$; следовательно, множества X_f образуют базис спектральной топологии на X. Кроме того, из определений немедленно следует, что

$$X_0 = \varnothing, \quad X_1 = X, \tag{5}$$

и, более общо, $X_f = X$ для любого обратимого элемента $f \in A$.

$$X_{fg} = X_f \cap X_g \text{ для любых элементов } f \text{ и } g \text{ кольца } A. \tag{6}$$

Обозначим через $\mathfrak{I}(Y)$, где Y — любое подмножество в X, пересечение простых идеалов кольца A, принадлежащих подмножеству Y. Ясно, что $\mathfrak{I}(Y)$ является идеалом в кольце A и что отображение $Y \to \mathfrak{I}(Y)$ является убывающим в смысле отношений включения в множествах X и A. Очевидно, что

$$\mathfrak{I}(\varnothing) = A, \tag{7}$$

$$\mathfrak{I}\Big(\bigcup_{\lambda \in L} Y_\lambda\Big) = \bigcap_{\lambda \in L} \mathfrak{I}(Y_\lambda) \tag{8}$$

для любого семейства $(Y_\lambda)_{\lambda \in L}$ подмножеств в X. Кроме того, имеет место

Предложение 11. *Пусть A — кольцо, $\mathfrak{a}$ — идеал в A и Y — подмножество в $X = \operatorname{Spec}(A)$.* Тогда

(i) *множество $V(\mathfrak{a})$ замкнуто в X, а $\mathfrak{I}(Y)$ является идеалом в A, совпадающим со своим корнем;*

(ii) *идеал $\mathfrak{I}(V(\mathfrak{a}))$ является корнем идеала $\mathfrak{a}$, а множество $V(\mathfrak{I}(Y))$ — замыканием множества Y в X;*

(iii) *отображения $\mathfrak{I}$ и V определяют взаимно обратные убывающие биективные соответствия между множеством замкнутых подмножеств пространства X и множеством тех идеалов кольца A, которые совпадают со своим корнем.*

Утверждение (i) и первое из утверждений в (ii) следуют из определений и из следствия 1 предложения 13 в § 2, n° 6. Если некоторое замкнутое множество $V(M)$ (для какого-то $M \subset A$) содержит Y, то $M \subset \mathfrak{p}$ для любого простого идеала $\mathfrak{p} \in Y$, откуда $M \subset \mathfrak{I}(Y)$ и, следовательно, $V(M) \supset V(\mathfrak{I}(Y))$; но так как $Y \subset V(\mathfrak{I}(Y))$, то $V(\mathfrak{I}(Y))$ — наименьшее замкнутое множество в X, содержащее Y, что доказывает утверждение пункта (ii). Наконец, из (ii) следует, что если $\mathfrak{a}$ — идеал, равный своему корню, то $\mathfrak{I}(V(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$, а если Y замкнуто в X, то $V(\mathfrak{I}(Y)) = Y$. Этим доказано и (iii).

Из предложения 11 немедленно следует, что если M — произвольное подмножество кольца A и Y — произвольное подмножество X, то $V(M) = V(\mathfrak{I}(V(M)))$ и $\mathfrak{I}(Y) = \mathfrak{I}(V(\mathfrak{I}(Y)))$.

Следствие 1. *Для любого семейства $(Y_\lambda)_{\lambda \in L}$ замкнутых подмножеств пространства X идеал $\mathfrak{I}\left(\bigcap_{\lambda \in L} Y_\lambda\right)$ является корнем суммы идеалов $\mathfrak{I}(Y_\lambda)$.*

В самом деле, из предложения 11 (iii) следует, что $\mathfrak{I}\left(\bigcap_{\lambda \in L} Y_\lambda\right)$ представляет собой наименьший идеал, равный своему корню и содержащий все идеалы $\mathfrak{I}(Y_\lambda)$. Следовательно, этот идеал содержит и $\sum_{\lambda \in L} \mathfrak{I}(Y_\lambda)$, а потому и корень идеала $\sum_{\lambda \in L} \mathfrak{I}(Y_\lambda)$ (§ 2, n° 6, следствие 2 из предложения 13), откуда следует требуемый результат.

Следствие 2. *Обозначим через $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ корень идеала $\mathfrak{a}$ кольца A; если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — два идеала кольца A, то отношение $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b})$ эквивалентно включению $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ и включению $\mathfrak{r}(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$.*

Немедленно проверяется, что отношения $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ и $\mathfrak{r}(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ эквивалентны, и так как $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{r}(\mathfrak{a}))$, то следствие вытекает непосредственно из предложения 11 (iii).

Следствие 3. *Пусть* $(f_\lambda)_{\lambda\in L}$ — *некоторое семейство элементов кольца* A. *Для того чтобы элемент* $g\in A$ *обладал тем свойством, что* $X_g\subset\bigcup_{\lambda\in L}X_{f_\lambda}$, *необходимо и достаточно, чтобы существовало целое* $n>0$, *при котором элемент* g^n *принадлежал бы идеалу, порожденному элементами* f_λ.

Действительно, соотношение $X_g\subset\bigcup_{\lambda\in L}X_{f_\lambda}$ эквивалентно соотношению $V(g)\supset\bigcap_{\lambda\in L}V(f_\lambda)$, и потому достаточно применить следствие 2.

Следствие 4. *Для того чтобы два элемента* f, g *кольца* A *обладали тем свойством, что* $X_f=X_g$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали целые* $m>0$ *и* $n>0$, *для которых* $f^m\in Ag$ *и* $g^n\in Af$.

Следствие 5. *Для того чтобы* $X_f=\varnothing$ *при некотором элементе* $f\in A$, *необходимо и достаточно, чтобы* f *был нильпотентным.*

Это немедленно вытекает из следствия 4.

Следствие 6. *Замыкание множества, состоящего из одной точки* $\mathfrak{p}\in X=\operatorname{Spec}(A)$, *представляет собой множество* $V(\mathfrak{p})$ *простых идеалов, содержащих* $\mathfrak{p}$. *Для того чтобы множество* $\{\mathfrak{p}\}$ *было замкнуто в* X (или, как говорят для краткости в этом случае, чтобы $\mathfrak{p}$ была *замкнутой точкой пространства* X) *необходимо и достаточно, чтобы идеал* $\mathfrak{p}$ *был максимален.*

Следствие 7. *Если* A — *нётерово кольцо, то* $X=\operatorname{Spec}(A)$ — *нётерово пространство.*

Предложение 12. *Для любого* $f\in A$ *открытое множество* X_f *в пространстве* $X=\operatorname{Spec}(A)$ *квазикомпактно. В частности, само пространство* X *является квазикомпактным.*

Поскольку множества X_g составляют базис топологии, достаточно доказать, что если $(g_\lambda)_{\lambda\in L}$ — такое семейство элементов кольца A, что $X_f\subset\bigcup_{\lambda\in L}X_{g_\lambda}$, то существует такое конечное подсемейство $(g_\lambda)_{\lambda\in H}$, что $X_f\subset\bigcup_{\lambda\in H}X_{g_\lambda}$. Но соотношение $X_f\subset\bigcup_{\lambda\in L}X_{g_\lambda}$ означает, что существуют такое целое $n>0$ и такое конечное подсемейство $(g_\lambda)_{\lambda\in H}$, что f^n принадлежит идеалу, порожденному этим подсемейством (следствие 3 предложения 11). Отюда следует предложение.

Предложение 13. *Пусть A, A' — два кольца, $X = \mathrm{Spec}(A)$, $X' = \mathrm{Spec}(A')$ и h — некоторый гомоморфизм кольца A в кольцо A'. Тогда отображение ${}^a h$: $\mathfrak{p}' \to h^{-1}(\mathfrak{p}')$ пространства X' в пространство X непрерывно.*

Действительно, для $M \subset A$ множество $({}^a h)^{-1}(V(M))$ представляет собой множество таких простых идеалов $\mathfrak{p}'$ кольца A', что $M \subset h^{-1}(\mathfrak{p}')$, а это эквивалентно включению $h(M) \subset \mathfrak{p}'$. Следовательно, это множество равно $V(h(M))$ и, таким образом, является замкнутым.

Говорят, что ${}^a h$ есть отображение, *ассоциированное* с гомоморфизмом h.

Замечание. Если h — сюръективный гомоморфизм и $\mathfrak{a}$ — его ядро, то из определения спектральной топологии следует, что ${}^a h$ является гомеоморфизмом спектра X' на замкнутое подпространство $V(\mathfrak{a})$ спектра X. Действительно, для того чтобы простой идеал $\mathfrak{p}'$ кольца A' содержал некоторый идеал $\mathfrak{b}'$ кольца A', необходимо и достаточно, чтобы $h^{-1}(\mathfrak{p}')$ содержал $h^{-1}(\mathfrak{b}')$. Таким образом, прежде всего видно, что ${}^a h$ инъективно, если считать $\mathfrak{b}'$ простым; кроме того, для любого идеала $\mathfrak{b}'$ кольца A' образ относительно ${}^a h$ множества $V(\mathfrak{b}')$ равен $V(h^{-1}(\mathfrak{b}'))$. Отсюда уже следует наше утверждение, так как в виде $h^{-1}(\mathfrak{b}')$ можно представить все идеалы кольца A, содержащие $\mathfrak{a}$.

Следствие. *Пусть S — мультипликативная система кольца A, $A' = S^{-1}A$ и h — канонический гомоморфизм i_A^S. Тогда ${}^a h$ представляет собой гомеоморфизм спектра $X' = \mathrm{Spec}(A')$ на подпространство спектра $X = \mathrm{Spec}(A)$, которое состоит из простых идеалов, не пересекающихся с S.*

В самом деле, пусть $f' = f/s$, где $f \in A$, $s \in S$. Тогда $X'_{f'} = X'_{f/1}$, так как $s/1$ — обратимый в A' элемент. Уже известно, что ${}^a h$ — инъективное отображение и что для любого $\mathfrak{p}' \in X'$ соотношения $f/1 \in \mathfrak{p}'$ и $f \in h^{-1}(\mathfrak{p}') = {}^a h(\mathfrak{p}')$ эквивалентны; следовательно, эквивалентны и условия $\mathfrak{p}' \in X'_{f/1}$ и ${}^a h(\mathfrak{p}') \in X_f$. Это показывает, что ${}^a h(X'_{f'})$ равно $X_f \cap {}^a h(X')$, откуда следует первое утверждение, так как множества X_f (соответственно $X'_{f'}$) составляют базис топологии пространства X (соответственно X'). Второе утверждение вытекает из предложения 11 (ii) § 2, n° 5.

Предложение 14. *Пусть A — кольцо. Для того чтобы подмножество Y спектра $X = \mathrm{Spec}(A)$ было неприводимым, необходимо и достаточно, чтобы идеал $\mathfrak{I}(Y)$ был простым.*

Положим $\mathfrak{p} = \mathfrak{I}(Y)$ и заметим, что для любого элемента $f \in A$ соотношение $f \in \mathfrak{p}$ эквивалентно соотношению $Y \subset V(f)$. Допустим, что Y неприводимо, и пусть f, g — такие элементы в A, что $fg \in \mathfrak{p}$. Следовательно,

$$Y \subset V(fg) = Y(f) \cup V(g).$$

Так как Y неприводимо, а $V(f)$ и $V(g)$ замкнуты, то или $Y \subset V(f)$, или $Y \subset V(g)$; следовательно, $f \in \mathfrak{p}$ или $g \in \mathfrak{p}$, чем и доказывается простота идеала $\mathfrak{p}$.

Предположим теперь, что идеал $\mathfrak{p}$ прост. В силу предложения 11(ii), $\overline{Y} = V(\mathfrak{p})$, и так как $\mathfrak{p}$ — простой идеал, то $\mathfrak{p} = \mathfrak{I}(\{\mathfrak{p}\})$, откуда $\overline{Y} = V(\mathfrak{I}(\{\mathfrak{p}\})) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ (предложение 11(ii)). Так как множество, состоящее из одной точки, неприводимо, то Y — неприводимое множество.

Следствие 1. *Для того чтобы пространство $X = \mathrm{Spec}(A)$ было неприводимо, необходимо и достаточно, чтобы факторкольцо кольца A по его нильрадикалу $\mathfrak{N}$ было целостным.*

Действительно (предложение 11 (ii)), идеал $\mathfrak{I}(X)$ является корнем идеала (0), т. е. нильрадикалом $\mathfrak{N}$.

Следствие 2. *Отображение $\mathfrak{p} \to V(\mathfrak{p})$ является биективным отображением множества $X = \mathrm{Spec}(A)$ на множество неприводимых замкнутых подмножеств пространства X. В частности, неприводимыми компонентами замкнутого подмножества $Y \subset X$ служат множества $V(\mathfrak{p})$, где $\mathfrak{p}$ пробегает всевозможные минимальные элементы множества простых идеалов кольца A, содержащих идеал $\mathfrak{I}(Y)$.*

Так как $\mathfrak{I}(V(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$ для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A и $Y = V(\mathfrak{I}(Y))$ для любого замкнутого подмножества Y пространства X, то первое утверждение следует из предложения 14. С другой стороны, для включения $Y \supset V(\mathfrak{p})$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{p} = \mathfrak{I}(V(\mathfrak{p})) \supset \mathfrak{I}(Y)$ (предложение 11), откуда следует и второе утверждение.

Следствие 3. *Множество минимальных простых идеалов нётерова кольца A конечно.*

Действительно, $X = \mathrm{Spec}(A)$ имеет лишь конечное число неприводимых компонент (следствие 7 предложения 11 и n° 2, предложение 10), и это следствие вытекает из предыдущего следствия 2.

Предложение 15. *Пусть A — некоторое кольцо, I — конечное множество, E — множество таких ортогональных семейств $(e_i)_{i \in I}$ идемпотентов $e_i \neq 0$ кольца A, что $\sum_{i \in I} e_i = 1$. Для каждого семейства $(e_i)_{i \in I} \in E$ положим $\bar{\omega}((e_i)_{i \in I}) = (V(A(1-e_i)))_{i \in I}$ и $\sigma((e_i)_{i \in I}) = (Ae_i)_{i \in I}$. Тогда $\bar{\omega}$ является биективным отображением множества E на множество P разбиений $(U_i)_{i \in I}$ пространства $X = \mathrm{Spec}(A)$ на открытые множества, а σ представляет собой биективное отображение множества E на*

множество S семейств $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ таких идеалов $\neq 0$ кольца A, что A является прямой суммой идеалов $\mathfrak{a}_i$.

Пусть $(e_i)_{i\in I}$ — элемент множества E, и положим $Y_i = V(A(1-e_i))$; если $i\neq j$, то $1 = 1-e_i+e_i(1-e_j)\in A(1-e_i)+A(1-e_j)$, откуда $Y_i\cap Y_j = \varnothing$ (формулы (1) и (2)). С другой стороны, $\bigcup_{i\in I} Y_i = V\left(\prod_{i\in I} A(1-e_i)\right)$ (формула (3)). По условию, $\prod_{i\in I}(1-e_i) = 1-\sum_{i\in I} e_i = 0$, в силу чего $\bigcup_{i\in I} Y_i = X$ (формула (1)). Так как множества Y_i замкнуты, то они открыты, так что $\bar{\omega}(E)\subset P$. Кроме того, очевидно, что $A = \sum_{i\in I} Ae_i$; если $0 = \sum_{i\in I} a_ie_i$ при $a_i\in A$, то, умножая это последнее равенство на e_i, получаем $0 = a_ie_i^2 = a_ie_i$ для всех i. Этим доказано включение $\sigma(E)\subset S$.

Лемма 2. *Если для двух идемпотентов e и f кольца A идеалы Ae и Af имеют один и тот же корень, то $e = f$.*

Действительно, согласно условию, существуют такие целые $n\geqslant 0$ и $m\geqslant 0$, что $e = e^m\in Af$ и $f = f^n\in Ae$. Пусть x, y — элементы из A, для которых $e = xf$ и $f = ye$. Тогда $ef = xf^2 = xf = e$ и, аналогичным образом, $ef = ye^2 = ye = f$, откуда $e = f$.

Лемма 2 и следствие 2 предложения 11 показывают, что отображения $\bar{\omega}$ и σ *инъективны*.

Теперь установим, что σ — сюръективное отображение. Если $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ — какой-либо элемент семейства S, то существуют такие элементы $e_i\in\mathfrak{a}_i$, что $1 = \sum_{i\in I} e_i$; если $i\neq j$, то $e_ie_j\in\mathfrak{a}_i\cap\mathfrak{a}_j = \{0\}$, откуда получается равенство $e_i = \sum_{i\in I} e_ie_j = e_i^2$. Наконец, $Ae_i\subset\mathfrak{a}_i$ для всякого $i\in I$ и $\sum_{i\in I} Ae_i = A$, в силу чего $Ae_i = \mathfrak{a}_i$.

Остается доказать сюръективность отображения $\bar{\omega}$. Пусть $(U_i)_{i\in I}$ — какой-нибудь элемент множества P; положим $Z_i = \complement U_i = \bigcup_{j\neq i} U_j$; поскольку множества U_i и Z_i замкнуты, существуют такие идеалы $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ кольца A, что $U_i = V(\mathfrak{a}_i)$, $Z_i = V(\mathfrak{b}_i)$. Можно считать — и это сейчас будет доказано, — что $\mathfrak{a}_i\cap\mathfrak{b}_i = \{0\}$. Так как $U_i\cap Z_i = \varnothing$, то $\mathfrak{a}_i+\mathfrak{b}_i = A$. Пусть $a_i\in\mathfrak{a}_i$, $b_i\in\mathfrak{b}_i$ — такие элементы, что $a_i+b_i = 1$. Поскольку $X = U_i\cup Z_i = V(\mathfrak{a}_i\mathfrak{b}_i)$ (формула (3)), то каждый элемент произведения $\mathfrak{a}_i\mathfrak{b}_i$ нильпотентен (следствие 2 предложения 11); пусть p — целое число, для которого $a_i^pb_i^p = 0$. Отметим теперь такие соотношения: $U_i\subset V(Aa_i) = V(Aa_i^p)$, $Z_i\subset V(Ab_i) = V(Ab_i^p)$ и $V(Aa_i)\cap V(Ab_i) = V(Aa_i+Ab_i) = \varnothing$; следо-

вательно, $U_i = V(Aa_i^p)$ и $Z_i = V(Ab_i^p)$, откуда и получается наше утверждение, если заменить $\mathfrak{a}_i$ на Aa_i^p, а $\mathfrak{b}_i$ — на Ab_i^p. Если считать, что идеалы $\mathfrak{a}_i$ и $\mathfrak{b}_i$ выбраны именно такими, то из того факта, что отображение σ биективно, следует, что существуют два идемпотента $f_i \in \mathfrak{a}_i$, $e_i \in \mathfrak{b}_i$, для которых $1 = e_i + f_i$, $e_i f_i = 0$, $\mathfrak{a}_i = Af_i$, $\mathfrak{b}_i = Ae_i$. Если $i \neq j$, то $X = Z_i \cup Z_j = V(Ae_i, e_j)$, и так как $e_i e_j$ — идемпотент, то лемма 2 показывает, что $e_i e_j = 0$. Наконец, элемент $e = \sum_{i \in I} e_i$ является идемпотентным, и для любого $i \in I$ имеет место включение $e_i \in Ae$, откуда $V(Ae) \subset Z_i$ при каждом i. Отсюда следует, что $V(Ae) = \varnothing = V(A \cdot 1)$ и лемма 2 вновь показывает, что $e = 1$.

Следствие 1. *Пусть A — кольцо, $\mathfrak{r}$ — нильидеал*[1]) *в A и $h\colon A \to A/\mathfrak{r}$ — канонический гомоморфизм. Тогда для всякого ортогонального конечного семейства $(e'_i)_{i \in I}$ идемпотентов кольца $A/\mathfrak{r}$, удовлетворяющего равенству $\sum_{i \in I} e'_i = 1$, существует такое ортогональное конечное семейство $(e_i)_{i \in I}$ идемпотентов кольца A, что $\sum_{i \in I} e_i = 1$ и $h(e_i) = e'_i$ для всех $i \in I$.*

Положим $A' = A/\mathfrak{r}$. Уже известно (замечание, следующее за предложением 13), что отображение

$$^a h\colon \operatorname{Spec}(A') \to \operatorname{Spec}(A)$$

является биективным гомеоморфизмом, так как, по условию, всякий простой идеал из A содержит $\mathfrak{r}$. Из предложения 15 видно, что в кольце A существует такое конечное ортогональное семейство $(e_i)_{i \in I}$ идемпотентов, что $\sum_{i \in I} e_i = 1$ и что образ при отображении $^a h$ множества $V(A'(1 - e'_i))$ равен $V(A(1 - e_i))$. Однако, совершенно очевидно, что множество $V(A(1 - e_i))$ представляет собой и образ множества $V(A'(1 - h(e_i)))$ при отображении $^a h$; поскольку $1 - e'_i$ и $1 - h(e_i)$ — идемпотенты, лемма 2 показывает, что $e'_i = h(e_i)$. Отсюда и получается наше следствие.

Следствие 2. *Для того чтобы простой спектр $X = \operatorname{Spec}(A)$ кольца A был связным, необходимо и достаточно, чтобы в A не было никаких идемпотентов, кроме 0 и 1.*

В самом деле, утверждение о том, что пространство X несвязно, означает, что существует одновременно открытое и замкнутое множество в X, отличное от $\varnothing$ и от самого X.

---

[1]) Иначе говоря, $\mathfrak{r}$ — идеал кольца A, содержащийся в нильрадикале этого кольца. — *Прим. перев.*

4. Носитель модуля

Определение 5. *Пусть A — кольцо и M — некоторый A-модуль. Носителем модуля M называется множество тех простых идеалов $\mathfrak{p}$ кольца A, для которых $M_\mathfrak{p} \neq 0$; носитель модуля M обозначается через* $\operatorname{Supp}(M)$.

Поскольку любой максимальный идеал в A прост, из следствия 2 теоремы 1 § 3, n° 3, вытекает, что A-модуль M равен 0 *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Supp}(M) = \varnothing$.

Пример. Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в кольце A. В обозначениях n° 3 имеет место следующее равенство:

$$V(\mathfrak{a}) = \operatorname{Supp}(A/\mathfrak{a}). \tag{9}$$

В самом деле, известно, что если $\mathfrak{p}$ — такой простой идеал кольца A, что $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$, то $(A/\mathfrak{a})_\mathfrak{p} = 0$ (§ 3, n° 1, замечание 3); наоборот, если $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, то идеал $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}$ содержится в максимальном идеале $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ кольца частных $A_\mathfrak{p}$ и $(A/\mathfrak{a})_\mathfrak{p}$ изоморфно факторкольцу $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}$, а потому оно отлично от 0 (§ 3, n° 1, предложение 3). Отсюда следует наше утверждение.

В частности, $\operatorname{Supp}(A) = \operatorname{Spec}(A)$.

Предложение 16. *Пусть A — кольцо и M — некоторый A-модуль.*

(i) *Если N — подмодуль модуля M, то*

$$\operatorname{Supp}(M) = \operatorname{Supp}(N) \cup \operatorname{Supp}(M/N).$$

(ii) *Если модуль M есть сумма некоторого семейства $(N_\iota)_{\iota \in I}$ своих подмодулей, то*

$$\operatorname{Supp}(M) = \bigcup_{\iota \in I} \operatorname{Supp}(N_\iota).$$

(i) Из точной последовательности $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A получается точная последовательность

$$0 \to N_\mathfrak{p} \to M_\mathfrak{p} \to (M/N)_\mathfrak{p} \to 0$$

(§ 2, n° 4, теорема 1). Таким образом, для того чтобы модуль частных $M_\mathfrak{p}$ был равен 0, необходимо и достаточно, чтобы нулевыми были модули $N_\mathfrak{p}$ и $(M/N)_\mathfrak{p}$. Иными словами, соотношение $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Supp}(M)$ эквивалентно тому, что $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Supp}(N)$ и $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Supp}(M/N)$, этим доказывается утверждение (i).

(ii) Для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A модуль $M_\mathfrak{p}$ представляет собой сумму семейства подмодулей $(N_\iota)_\mathfrak{p}$ (§ 2, n° 4). Но неравенство $M_\mathfrak{p} \neq 0$ означает, что существует такой индекс $\iota \in I$, что $(N_\iota)_\mathfrak{p} \neq 0$, откуда следует (ii).

Следствие. *Пусть A — кольцо, M — некоторый A-модуль, $(m_\iota)_{\iota\in I}$ — какая-либо система образующих модуля M и $\mathfrak{a}_\iota$ — аннулятор элемента m_ι. Тогда* $\operatorname{Supp}(M)=\bigcup_{\iota\in I} V(\mathfrak{a}_\iota)$.

Действительно, согласно предложению 16 (ii), $\operatorname{Supp}(M)=\bigcup_{\iota\in I}\operatorname{Supp}(Am_\iota)$. С другой стороны, модуль Am_ι изоморфен A-модулю $A/\mathfrak{a}_\iota$ и было показано, что $\operatorname{Supp}(A/\mathfrak{a}_\iota)=V(\mathfrak{a}_\iota)$ (см. приведенный выше пример).

Предложение 17. *Пусть A — кольцо, M — некоторый A-модуль и $\mathfrak{a}$ — его аннулятор. Если M — модуль конечного типа, то* $\operatorname{Supp}(M)=V(\mathfrak{a})$ *и, следовательно, множество* $\operatorname{Supp}(M)$ *замкнуто в* $\operatorname{Spec}(A)$.

Пусть $(m_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — некоторая система образующих модуля M, и пусть $\mathfrak{a}_i$ — аннулятор элемента m_i. Тогда $\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{a}_i$ и, следовательно, $V(\mathfrak{a})=\bigcup_{i=1}^{n}V(\mathfrak{a}_i)$ (n° 3, формула (3)). Доказываемое предложение следует теперь из следствия предложения 16.

Следствие 1. *Пусть A — кольцо, M — некоторый A-модуль конечного типа и a — какой-нибудь элемент из A. Для того чтобы элемент a принадлежал всякому простому идеалу носителя модуля M, необходимо и достаточно, чтобы гомотетия умножения на a модуля M была нильпотентной.*

Действительно, из предложения 17 следует, что пересечение простых идеалов, принадлежащих $\operatorname{Supp}(M)$, является корнем аннулятора $\mathfrak{a}$ модуля M (n° 3, предложение 11 (ii)). Утверждение о том, что элемент a принадлежит этому корню, эквивалентно утверждению, что некоторая степень a^k принадлежит $\mathfrak{a}$, т. е. что $a^kM=0$.

Следствие 2. *Пусть A — нётерово кольцо, M — некоторый A-модуль конечного типа и $\mathfrak{a}$ — идеал в A. Для включения* $\operatorname{Supp}(M)\subset V(\mathfrak{a})$ *необходимо и достаточно, чтобы существовало целое число k, для которого $\mathfrak{a}^kM=0$.*

В самом деле, если $\mathfrak{b}$ — аннулятор модуля M, то включение $\operatorname{Supp}(M)\subset V(\mathfrak{a})$ эквивалентно включению $V(\mathfrak{b})\subset V(\mathfrak{a})$, в силу предложения 17, и, следовательно, включению $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{r}(\mathfrak{b})$, где $\mathfrak{r}(\mathfrak{b})$ — корень идеала $\mathfrak{b}$ (n° 3, следствие 2 из предложения 11). Но так как A — нётерово кольцо, то это условие в свою очередь эквивалентно существованию такого целого $k>0$, что $\mathfrak{a}^k\subset\mathfrak{b}$ (§ 2, n° 6, предложение 15).

Предложение 18. *Пусть M, M' — два модуля конечного типа над кольцом A. Тогда*

$$\operatorname{Supp}(M \otimes_A M') = \operatorname{Supp}(M) \cap \operatorname{Supp}(M'). \tag{10}$$

Нужно доказать, что если $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца A, то утверждение $(M \otimes_A M')_{\mathfrak{p}} \neq 0$ и утверждение $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ и $M'_{\mathfrak{p}} \neq 0$ эквивалентны. Но поскольку $A_{\mathfrak{p}}$-модули $M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} M'_{\mathfrak{p}}$ и $(M \otimes_A M')_{\mathfrak{p}}$ изоморфны (§ 2, п° 7, предложение 18), наше утверждение вытекает из следующей леммы:

Лемма 3. *Пусть B — локальное кольцо, а E и E' — два B-модуля конечного типа. Если $E \neq 0$ и $E' \neq 0$, то и $E \otimes_B E' \neq 0$.*

В самом деле, пусть k — поле вычетов кольца B. В силу предложения 4 из § 3, п° 2, имеют место неравенства $k \otimes_B E \neq 0$ и $k \otimes_B E' \neq 0$. Отсюда следует, что $(k \otimes_B E) \otimes_k (k \otimes_B E') \neq 0$ (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 3, n° 8) [1]). Благодаря ассоциативности тензорного произведения (там же, § 3, п° 8), это тензорное произведение изоморфно модулю $E \otimes_B ((k \otimes_k k) \otimes_B E') = E \otimes_B (k \otimes_B E')$; и, следовательно, модулю $k \otimes_B (E \otimes_B E')$, откуда получается требуемое.

Следствие. *Пусть M — некоторый A-модуль конечного типа и $\mathfrak{n}$ — его аннулятор. Тогда для всякого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A справедливы равенства* $\operatorname{Supp}(M/\mathfrak{a}M) = V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{n}) = V(\mathfrak{a} + \mathfrak{n})$.

Действительно, $M/\mathfrak{a}M = M \otimes_A (A/\mathfrak{a})$ и $A/\mathfrak{a}$ — модуль конечного типа.

Предложение 19. *Пусть A, B — два кольца, φ: $A \to B$ — некоторый гомоморфизм и ${}^a\varphi$: $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ — непрерывное отображение, ассоциированное с φ* (предложение 13). *Тогда для любого A-модуля M имеет место включение* $\operatorname{Supp}(M_{(B)}) \subset {}^a\varphi^{-1}(\operatorname{Supp} M)$. *Если, к тому же, M — модуль конечного типа, то* $\operatorname{Supp}(M_{(B)}) = {}^a\varphi^{-1}(\operatorname{Supp}(M))$.

Пусть $\mathfrak{q}$ — простой идеал B и $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. Предположим, что $\mathfrak{q}$ принадлежит носителю $\operatorname{Supp}(M_{(B)})$; имеем $M_{(B)} \otimes_B B_{\mathfrak{q}} = (M \otimes_A B) \otimes_B B_{\mathfrak{q}} = M \otimes_A B_{\mathfrak{q}} = (M \otimes_A A_{\mathfrak{p}}) \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{q}}$, ибо гомоморфизм $A \to B \to B_{\mathfrak{q}}$ разлагается на $A \to A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{q}}$ (§ 2, п° 1, предложение 2). Следовательно, предположение $M_{(B)} \otimes_B B_{\mathfrak{q}} \neq 0$ влечет за собой, что $M \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \neq 0$, откуда получается первое утверждение. Поскольку гомоморфизм $\varphi_{\mathfrak{q}}$: $A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{q}}$ локален, наше второе утверждение получается из следующей леммы:

[1]) См. также *Алгебра*, гл. III, § 1. — *Прим. перев.*

Лемма 4. *Пусть A, B — два локальных кольца, $\rho\colon A \to B$ — локальный гомоморфизм и E — некоторый A-модуль конечного типа. Если $E \neq 0$, то $E_{(B)} \neq 0$.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца A и $k = A/\mathfrak{m}$ — поле вычетов; из условия следует, что $B \otimes_A k = B/\mathfrak{m}B \neq 0$. В силу ассоциативности тензорного произведения, модуль $(E \otimes_A B) \otimes_A k$ изоморфен модулю $E \otimes_A (B \otimes_A k)$, а потому и модулю $E \otimes_A (k \otimes_k (B \otimes_A k))$ и, наконец, модулю $(E \otimes_A k) \otimes_k \otimes_k (B \otimes_A k)$. Согласно предложению 4 из § 3, n°2, $E \otimes_A k \neq 0$ и, следовательно, $(E \otimes_A B) \otimes_A k \neq 0$ (*Algébre*, chap. II, 3e éd; § 3, n°7)[1]), так что a fortiori $E \otimes_A B \neq 0$.

Предложение 20. *Пусть A — кольцо и M — некоторый A-модуль конечного типа. Тогда для всякого простого идеала $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$ существует ненулевой A-гомоморфизм $w : M \to A/\mathfrak{p}$.*

Пусть $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M)$. Так как M — модуль конечного типа и $M_\mathfrak{p} \neq 0$, то $M_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}M_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}) \neq 0$ (§ 3, n°2, предложение 4). Пусть $K = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ — поле частных целостного кольца $A/\mathfrak{p}$. Поскольку $M_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}M_\mathfrak{p}$ является векторным K-пространством, отличным от 0, существует некоторая ненулевая линейная форма u: $M_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}M_\mathfrak{p} \to K$. Композиция u и канонического отображения $M/\mathfrak{p}M \to M_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}M_\mathfrak{p}$ дает ненулевое $A/\mathfrak{p}$-линейное отображение v: $M/M \to K$. Если $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — некоторая система образующих $(A/\mathfrak{p})$-модуля $M/\mathfrak{p}M$, то существует такой элемент $\alpha \neq 0$ в кольце $A/\mathfrak{p}$, что при $1 \leqslant i \leqslant n$ произведения $\alpha u(x_i)$ принадлежат $A/\mathfrak{p}$. Следовательно, $w = \alpha u$ представляет собой ненулевое $(A/\mathfrak{p})$ — линейное отображение модуля $M/\mathfrak{p}M$ в $A/\mathfrak{p}$. Композиция гомоморфизмов

$$M \to M/\mathfrak{p}M \xrightarrow{w} A/\mathfrak{p}$$

дает, таким образом, ответ на рассматриваемый вопрос.

Упражнения

1) Пусть $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — проективная система топологических пространств с фильтрующимся множеством индексов, пусть $X = \varprojlim X_\alpha$ и f_α — каноническое отображение из X в X_α. Предположим, что для любого α отображение f_α сюръективно. Показать, что если пространства X_α неприводимы, то неприводимо и X (ср. *Общая топология*, 1968, гл. I, § 4, n° 4, следствие из предложения 9). В частности, любое произведение неприводимых пространств неприводимо.

2) Говорят, что в неприводимом пространстве X некоторая точка x является *общей*, если множество $\{x\}$ плотно в X.

а) Если X — пространство Колмогорова (*Общая топология*, 1968, гл. I, § 1, упражнение 2), то оно обладает не более чем одной общей точкой;

[1]) См. также *Алгебра*, гл. III, § 1. — *Прим. перев.*

если X — достижимое пространство (*Общая топология*, 1968, гл. I, § 8, упражнение 1), то общая точка может в нем быть только тогда, когда оно само состоит из одной точки.

б) Привести пример достижимого неприводимого пространства, являющегося бесконечным (ср. *Общая топология*, 1968, гл. I, § 8, упражнение 5).

в) Пусть X, Y — два неприводимых пространства, каждое из которых имеет общую точку; предположим, кроме того, что Y обладает лишь одной общей точкой y. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение; для того чтобы множество $f(X)$ было плотно в Y, необходимо и достаточно, чтобы для каждой общей точки x из X выполнялось равенство $f(x) = y$.

г) Пусть $(X_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — проективная система неприводимых пространств, множество индексов которой фильтрующееся. Допустим, что каждое пространство X_α обладает единственной общей точкой x_α. Показать, что если для $\alpha \leqslant \beta$ множество $f_{\alpha\beta}(X_\beta)$ плотно в X_α, то $X = \varprojlim X_\alpha$ является неприводимым пространством и обладает единственной общей точкой (устанавливается тем же методом, что и упражнение 1).

3) Пусть X — топологическое пространство, (Y_α) — фильтрующееся возрастающее семейство подпространств в X; показать что если каждое из подпространств Y_α неприводимо, а X является объединением семейства (Y_α), то и X неприводимо. Получить отсюда пример, в котором X — пространство Колмогорова, каждое Y_α обладает общей точкой, но X общей точки не имеет.

4) Пусть Y — неприводимое пространство, обладающее единственной общей точкой y, X — некоторое топологическое пространство и $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение.

а) Для всякой неприводимой компоненты Z пространства X, пересекающей $f^{-1}(y)$, множество $f(Z)$ плотно в Y.

б) Привести пример, в котором множество $f(X)$ плотно в Y и вместе с тем множество $f^{-1}(y)$ пусто (взять в качестве X подпространство в Y).

5) Пусть G — связная полутопологическая группа (*Общая топология*, 1969, гл. III, упражнение 2). Показать, что если G обладает лишь конечным числом неприводимых компонент, то она обязательно неприводима (обратить внимание на то, что все неприводимые компоненты получаются из той неприводимой компоненты, которая содержит нейтральный элемент, с помощью левых или правых сдвигов).

6) Пусть X — топологическое пространство.

а) Пусть x — точка из X и U — открытая окрестность точки x, содержащая лишь конечное число неприводимых компонент. Показать, что существует такая окрестность V точки x, что каждая открытая окрестность этой точки, содержащаяся в V, связна.

б) Предположим, что каждая точка пространства X обладает открытой окрестностью, имеющей лишь конечное число неприводимых компонент. Показать, что следующие свойства эквивалентны:

α) Неприводимые компоненты пространства X открыты.

β) Неприводимые компоненты пространства X совпадают со связными компонентами этого же пространства.

γ) Связные компоненты пространства X неприводимы.

δ) Любые две различные неприводимые компоненты пространства X не пересекаются.

7) Пусть X — метризуемое компактное пространство и R — такое открытое отношение эквивалентности в X, что факторпространство X/R неприводимо. Показать, что существует точка $x \in X$, класс которой $\mathrm{mod}\, R$ всюду плотен. (Сначала заметить, что всякое насыщенное относительно R открытое подмножество пространства X всюду плотно. После этого воспользоваться теоремой Бэра.)

8) Показать, что произведение двух нётеровых пространств является нётеровым пространством. (Показать, что если X и Y — нётеровы пространства и A — некоторое открытое подмножество в $X \times Y$, то для любой точки $x \in pr_1 A$

существует такая ее открытая окрестность V, что $V \times A(x) \subset A$, и получить отсюда, что A — квазикомпактное множество.)

9) а) Показать, что простой спектр коммутативного кольца является пространством Колмогорова (*Общая топология*, 1968, гл. I, § 1, упражнение 2), в котором всякая неприводимая компонента имеет (и притом только одну) общую точку.

б) Пусть A — целостное кольцо, $\xi = (0)$ — общая точка пространства $X = \mathrm{Spec}\,(A)$. Для того чтобы точка ξ была изолированной в X, необходимо и достаточно, чтобы пересечение простых идеалов кольца A, отличных от 0, было ненулевым идеалом. Привести пример локального кольца, обладающего этим свойством.

10) Пусть A — кольцо и $\mathfrak{N}$ — его нильрадикал. Для того чтобы спектр кольца A был дискретным, необходимо и достаточно, чтобы $A/\mathfrak{N}$ было прямым произведением конечного числа полей.

11) Пусть K — поле, A — кольцо многочленов $K[X, Y]$ и B — факторкольцо $A/(X, Y)$; показать, что $\mathrm{Spec}\,(B)$ является связным пространством, но с двумя различными неприводимыми компонентами.

12) Пусть Y — вполне регулярное пространство, $A = \mathscr{C}^\infty(Y; \mathbf{R})$, $B = \mathscr{C}(Y; R)$. Показать, что компактификация Стоуна — Чеха βY пространства Y канонически отождествляется с некоторым всюду плотным подпространством в $\mathrm{Spec}\,(A)$ и с некоторым всюду плотным подпространством в $\mathrm{Spec}\,(B)$.

13) Пусть A — некоторое кольцо и $X = \mathrm{Spec}\,(A)$ — его спектр.

а) Если подмножество F в X замкнуто, то оно обладает следующими свойствами: α) для любого идеала $\mathfrak{p} \in F$ $V(\mathfrak{p}) \subset F$; β) для любого идеала $\mathfrak{p} \notin F$ существует некоторое замкнутое подмножество в $V(\mathfrak{p})$, содержащее $F \cap V(\mathfrak{p})$ и не содержащее $\mathfrak{p}$.

б) Допустим, что пространство X нётерово. Показать, что *любое* подмножество F этого пространства, обладающее свойствами α) и β) из пункта а), замкнуто в X (рассмотреть неприводимые компоненты множества $\overline{F}$ и воспользоваться упражнением 9а)).

в) В обозначениях упражнения 12 возьмем в качестве Y интервал $(0, 1)$ прямой $\mathbf{R}$. Показать, что множество Y не замкнуто в $X = \mathrm{Spec}\,(A)$ (ср. § 2, упражнение 15), но вместе с тем оно удовлетворяет условиям α) и β) из а).

14) Пусть A — кольцо, $X = \mathrm{Spec}\,(A)$ — его спектр, P — множество минимальных простых идеалов из A.

а) Пусть $R\{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'\}$ — симметричное и рефлексивное отношение между элементами $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ из P: «существует простой идеал $\mathfrak{p}''$ кольца A, который содержит $\mathfrak{p} + \mathfrak{p}'$». Пусть S — наименьшее отношение эквивалентности, содержащее отношение R (*Теория множеств*, гл. II, § 6, упражнение 10). Показать, что если I — класс эквивалентности относительно S, то множество $V_I = \bigcup_{\mathfrak{p} \in I} V(\mathfrak{p})$ связно.

б) Показать, что если P — конечное множество (и, в частности, если A — нётерово кольцо), то множества V_I служат связными компонентами пространства X. Распространяется ли этот результат на случай бесконечного множества P (ср. упражнение 12)?

¶ 15) Пусть A — кольцо и $\mathfrak{a}$ — идеал конечного типа в A. Показать, что следующие свойства эквивалентны: α) $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$; β) идеал $\mathfrak{a}$ порождается идемпотентом; γ) множество $V(\mathfrak{a})$ одновременно открыто и замкнуто в $X = \mathrm{Spec}\,(A)$ и $\mathfrak{a}$ является минимальным среди идеалов $\mathfrak{b}$, для которых $r(\mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a})$ (воспользоваться следствием 3 из предложения 4 в § 2). Привести пример, когда $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$, но $\mathfrak{a}$ не является идеалом конечного типа и не содержит идемпотентов (ср. § 2, упражнение 15).

¶ 16) а) Пусть A — *абсолютно плоское* (коммутативное) кольцо (гл. I, § 2, упражнение 17). Показать, что $X = \mathrm{Spec}\,(A)$ является компактным вполне несвязным пространством, что каждый простой идеал $\mathfrak{p}$ кольца A максимален

н что $A_{\mathfrak{p}}$ канонически изоморфно полю $A/\mathfrak{p}$ (показать сначала, что для каждого $f \in A$ множество $V(f)$ одновременно открыто и замкнуто в X; с другой стороны, воспользоваться упражнением 9 § 3).

б) Показать, что отображение $\mathfrak{a} \to V(\mathfrak{a})$ является биективным отображением множества идеалов кольца A на множество замкнутых подмножеств пространства X. Кроме того, следующие условия эквивалентны: α) множество $V(\mathfrak{a})$ открыто; β) идеал $\mathfrak{a}$ имеет конечный тип; γ) идеал $\mathfrak{a}$ порождается идемпотентом; δ) факторкольцо $A/\mathfrak{a}$ является проективным A-модулем.

в) Пусть $\tilde{A}$ — структурный пучок колец на X. Показать, что всякий $\tilde{A}$-модуль $\mathscr{F}$ имеет вид $\tilde{E}$, где E — некоторый однозначно определенный с точностью до изоморфизма A-модуль (положить $E = \Gamma(X, \mathscr{F})$ и воспользоваться тем фактом, что каждая точка пространства X имеет фундаментальную систему открыто-замкнутых окрестностей. Для любого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A показать, что $\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{a}, E)$ можно отождествить с $\Gamma(X - V(\mathfrak{a}), \tilde{E})$ (заметить, что $X - V(\mathfrak{a})$ является объединением множеств X_e, где e пробегает множество идемпотентов $e \in \mathfrak{a}$). Вывести отсюда, что, для того чтобы E был инъективным A-модулем, необходимо и достаточно, чтобы пучок $\tilde{E}$ был вялым.

г) Пусть A — некоторое кольцо и $\mathfrak{N}$ — его нильрадикал. Следующие свойства эквивалентны:

α) $A/\mathfrak{N}$ — абсолютно плоское кольцо;

β) пространство $X = \mathrm{Spec}\,(A)$ отделимо;

γ) каждая точка пространства X замкнута (иначе говоря, каждый простой идеал кольца A максимален).

(Воспользоваться упражнением 9 из § 3).

¶ 17) *а) Пусть X — вполне несвязное компактное пространство, $\mathscr{O}$ — такой пучок колец на X, что для всякой точки $x \in X$ слой $\mathscr{O}_x$ является полем. Показать, что если $A = \Gamma(X, \mathscr{O})$, то кольцо A — абсолютно плоское и что спектр этого кольца (снабженный пучком колец $\tilde{A}$) канонически отождествляется с X (снабженным пучком колец $\mathscr{O}$). (Обратить внимание на то, что для любого $f \in A$ множество таких точек $x \in X$, что $f_x = 0$, одновременно открыто и замкнуто в X, и получить отсюда существование такого элемента $g \in A$, что $f = gf^2$.).*

б) Пусть X — вполне несвязное компактное пространство, K — поле и A — кольцо локально постоянных отображений из X в K. Показать, что A — абсолютно плоское кольцо (рассуждать непосредственно или применить пункт а)).

в) Пусть A — кольцо ступенчатых числовых функций, определенных на множестве $I = (0, 1)$, причем точки их разрывов имеют вид $k/2^n$ ($n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant k < 2^n$); пусть эти функции непрерывны справа. Пусть I — множество конечных объединений полуоткрытых интервалов $(x, y) \subset I$, края которых имеют вид $k/2^n$. Для каждой функции $f \in A$ множество $Z(f) = f^{-1}(0)$ принадлежит I. Если $\mathfrak{a}$ — идеал кольца A, то множество $\mathscr{B}$ множеств $Z(f)$, где f пробегает идеал $\mathfrak{a}$, характеризуется следующим образом: 1° пересечение двух множеств из $\mathscr{B}$ принадлежит $\mathscr{B}$; 2° каждое множество из I, содержащее некоторое множество из $\mathscr{B}$, принадлежит $\mathscr{B}$. Верно и обратное. Для того чтобы идеал $\mathfrak{a}$ был простым, необходимо и достаточно, чтобы множество $\mathscr{B}$ было базисом фильтра, который сходится к некоторой точке из $(0, 1)$. Показать, что A — абсолютно плоское редуцированное кольцо и что для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ из A кольцо $A_{\mathfrak{m}}$ изоморфно полю $\mathbf{R}$. Описать пространство $\mathrm{Spec}\,(A)$.

¶ 18) а) Пусть Y — вполне регулярное пространство. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) Всякий простой идеал в $\mathscr{C}(Y; \mathbf{R})$ максимален.

β) Любое счетное пересечение открытых подмножеств в Y является открытым множеством.

γ) Всякая непрерывная числовая функция на Y локально постоянна.

δ) Кольцо $\mathscr{C}(Y; \mathbf{R})$ абсолютно плоское.

(Упражнение 15е) из § 2 дает требуемое.)

Когда эти условия выполнены, пространство $X = \mathrm{Spec}\,(\mathscr{C}(Y; \mathbf{R}))$ канонически отождествляется с компактификацией Стоуна — Чеха βY пространства Y. Такое пространство Y называется *плоским*.

б) Всякое подпространство плоского пространства плоско. Всякое вполне регулярное факторпространство плоского пространства плоско. Любое конечное произведение плоских пространств есть плоское пространство. Любая сумма плоских пространств снова является плоским пространством.

в) В плоском пространстве любое счетное подпространство замкнуто и дискретно. В частности, всякое счетное плоское пространство дискретно.

г) Каждое вейерштрасово вполне регулярное пространство (*Topologie générale*, chap. IX, 2e éd., § 1, exercise 22) (и, *тем более*, любое компактное пространство), являющееся плоским, конечно.

д) Пространство, ассоциированное с нетривиальным ультрафильтром, экстремально несвязно (*Общая топология*, 1968, гл. I, § 11. упр. 21), но не является плоским.

е) Дискретное пространство $\mathbf{N}$ плоско, но его компактификация Стоуна—Чеха плоской не является и спектры колец $\mathscr{C}(\mathbf{N}; \mathbf{R})$ и $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{N}; \mathbf{R})$ по этой причине не изоморфны.

19) а) Пусть $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм колец. Показать, что для любого идеала $\mathfrak{b}$ кольца B имеет место равенство $\overline{{}^a\varphi(V(\mathfrak{b}))} = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$.

б) Получить из а), что, для того чтобы множество ${}^a\varphi(\mathrm{Spec}\,(B))$ было плотно в $\mathrm{Spec}\,(A)$, необходимо и достаточно, чтобы идеал $\mathrm{Ker}(\varphi)$ был нильпотентным в A.

в) Показать, что если всякий элемент $b \in B$ записывается в виде $b = h\varphi(a)$, где h — обратимый в B элемент и $a \in A$, то ${}^a\varphi$ является гомеоморфизмом пространства $\mathrm{Spec}\,(B)$ на подпространство в $\mathrm{Spec}\,(A)$.

20) Привести пример такого гомоморфизма колец $\varphi\colon A \to B$, при котором всякий максимальный идеал из A имеет вид $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$, где $\mathfrak{m}$ — некоторый максимальный идеал в B, но при котором существуют простые идеалы в A, не являющиеся прообразами относительно φ никаких идеалов кольца B (взять в качестве B поле).

21) Пусть $(A_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ — индуктивная система колец, множество индексов которой фильтрующееся, и пусть $A = \varinjlim A_\alpha$, а $\varphi_\alpha\colon A_\alpha \to A$ — канонический гомоморфизм. Если положить $X_\alpha = \mathrm{Spec}\,(A_\alpha)$, то $\left(X_\alpha, {}^a\varphi_{\beta\alpha}\right)$ станет проективной системой топологических пространств, и если $X = \mathrm{Spec}\,(A)$, то отображения ${}^a\varphi_\alpha\colon X \to X_\alpha$ образуют проективную систему непрерывных отображений. Показать, что $u = \varprojlim {}^a\varphi_\alpha$ является гомеоморфизмом из X на $\varprojlim X_\alpha$. (Сначала доказать, что если для любого α взят простой идеал $\mathfrak{p}_\alpha$ в A_α, причем $\mathfrak{p}_\alpha = \varphi_{\beta\alpha}^{-1}(\mathfrak{p}_\beta)$ при $\alpha \leqslant \beta$, то объединение $\mathfrak{p}$ идеалов $\varphi_\alpha(\mathfrak{p}_\alpha)$ является простым идеалом в A; обратно, всякий простой идеал $\mathfrak{p}$ кольца A представляет собой объединение идеалов $\varphi_\alpha(\mathfrak{p}_\alpha)$, где $\mathfrak{p}_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\mathfrak{p})$. Наконец, если $f_\alpha \in A_\alpha$ и $f = \varphi_\alpha(f_\alpha)$, то заметить, что включение $\mathfrak{p} \in X_f$ эквивалентно включению

$$u(\mathfrak{p}) \in \mathrm{pr}_\alpha^{-1}\left((X_\alpha)_{f_\alpha}\right).$$

22) а) Пусть M — некоторый A-модуль и (N_i) — конечное семейство подмодулей модуля M. Показать, что имеет место равенство $\mathrm{Supp}\left(M\Big/\bigcap_i N_i\right) = \bigcup_i \mathrm{Supp}\,(M/N_i)$ (заметить, что модуль $M\Big/\bigcap_i N_i$ изоморфен подмодулю прямой суммы модулей M/N_i).

б) Пусть p — простое число; носитель $\mathbf{Z}$-модуля $\mathbf{Z}$ отличен от замыкания объединения носителей $\mathbf{Z}$-модулей $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ $(k \in \mathbf{N})$.

в) Пусть M — прямая сумма $\mathbf{Z}$-модулей $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ $(k \in N)$; показать, что $\mathrm{Supp}\,(M)$ замкнут, но отличен от $V(\mathfrak{a})$, где $\mathfrak{a}$ — аннулятор модуля M.

г) Пусть N — прямая сумма $\mathbf{Z}$-модулей $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ $(n \geqslant 1)$; показать, что $\mathrm{Supp}\,(N)$ не замкнут в $\mathrm{Spec}\,(\mathbf{Z})$.

д) Вывести из в) и г) пример такого A-модуля M, что если $\mathfrak{a}$ — его аннулятор, то $\mathrm{Supp}\,(M)$ не замкнут и имеет замыкание, отличное от $V(\mathfrak{a})$.

е) Показать, что носитель $\mathbf{Z}$-модуля $\prod_{k=1}^{\infty}(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})$ отличается от замыкания объединения носителей модулей-слагаемых $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$.

23) Пусть p — простое число; привести пример $\mathbf{Z}$-модулей M, N, где N — модуль конечного типа, для которых $M_{(p)} \neq 0$ и $N_{(p)} \neq 0$, но $(M \otimes_{\mathbf{Z}} N)_{(p)} = 0$ (положить $M = \mathbf{Q}$).

24)* а) Пусть A — некоторое кольцо, M, N — два A-модуля, причем M — модуль конечного типа. Показать, что $\mathrm{Supp}\,(\mathrm{Hom}_A(M, N))$ содержится в пересечении $\mathrm{Supp}\,(M) \cap \mathrm{Supp}\,(N)$.

б) Привести пример, в котором модули M и N конечно представимы, и в котором $\mathrm{Supp}\,(\mathrm{Hom}_A(M, N))$ строго содержится в $\mathrm{Supp}\,(M) \cap \mathrm{Supp}\,(N)$ (положить $A = \mathbf{Z}_{(p)}$ и $N = A$).

в) Пусть задан $\mathbf{Z}$-модуль M, являющийся прямой суммой модулей $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ (p — простое число, $k \in N$). Показать, что $\mathrm{Supp}\,(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, M))$ не содержится в $\mathrm{Supp}\,(M)$.

25) Пусть A — нётерово кольцо, $X = \mathrm{Spec}\,(A)$ — его спектр, M — некоторый A-модуль конечного типа и $Y = \mathrm{Supp}\,(M)$. Пусть Y_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ — различные связные компоненты пространства Y.

а) Показать, что существует, и притом единственное, разложение модуля M в прямую сумму $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$, такое, что $\mathrm{Supp}\,(M_k) = Y_k$ для каждого k.

б) Если $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}\,(M)$ и $\mathfrak{a}_k = \mathrm{Ann}\,(M_k)$, то показать, что идеалы $\mathfrak{a}_k$ попарно взаимно просты и $\prod_{k=1}^{n}\mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}$.

(Используя предложение 17 n° 4, свести рассмотрения к случаю, когда $\mathfrak{a} = 0$, $Y = X$ и применить предложение 15 из n° 3.)

26) Пусть φ: $A \to B$ — такой гомоморфизм колец, что отображение ${}^a\varphi$: $\mathrm{Spec}\,(B) \to \mathrm{Spec}\,(A)$ сюръективно. Пусть N — некоторый A-модуль конечного типа; показать, что если u: $M \to N$ — такой гомоморфизм A-модулей, что гомоморфизм $u \otimes 1$: $M_{(B)} \to N_{(B)}$ сюръективен, то u — сюръективное отображение (применить предложение 19 из n° 4 к $\mathrm{Coker}\,(u)$).

27) Привести пример локального гомоморфизма ρ: $A \to B$ и такого A-модуля M (не имеющего конечного типа), что $\mathrm{Supp}\,(M_{(B)})$ не равен множеству ${}^a\rho^{-1}(\mathrm{Supp}\,(M))$ (положить $A = \mathbf{Z}_{(p)}$, $B = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ для некоторого простого числа p).

28) Привести пример такого $\mathbf{Z}$-модуля M, что для некоторого простого числа p, удовлетворяющего включению $(p) \in \mathrm{Supp}\,(M)$ не существует ни одного $\mathbf{Z}$-гомоморфизма из M в $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, отличного от нуля.

§ 5. Проективные модули конечного типа. Обратимые дробные идеалы

1. Локализация относительно элемента

Пусть A — кольцо и M — некоторый A-модуль. Для любого элемента $f \in A$ положим $A_f = A[f^{-1}]$, $M_f = M[f^{-1}] = M \otimes_A A[f^{-1}]$ (§ 2, n° n° 1 и 2). Если S_f — множество степеней f^n для $n \geqslant 0$,

то $A_f = S_f^{-1}A$, $M_f = S_f^{-1}M$. Если элемент f обратим в кольце A, то A_f (соответственно M_f) канонически отождествляется с A (соответственно с M). Если элемент f нильпотентен, то $A_f = 0$ и $M_f = 0$. Для любого гомоморфизма A-модулей $u\colon M \to N$ мы будем писать $u_f = u \otimes 1 : M_f \to N_f$.

Пусть теперь g — второй элемент из кольца A. Тогда A_{fg} (соответственно M_{fg}) каноническим образом отождествляется с $(A_f)_{g/1}$ (соответственно с $(M_f)_{g/1}$), где $g/1$ — образ элемента g в кольце частных A_f; гомоморфизм u_{fg} канонически отождествляется с $(u_f)_{g/1}$ (§ 2, n° 3, предложение 7).

Предложение 1. *Пусть f — некоторый элемент кольца A, и пусть $\varphi\colon A \to A_f$ — каноническое отображение. Тогда отображение ${}^a\varphi\colon \operatorname{Spec}(A_f) \to \operatorname{Spec}(A)$ является гомеоморфизмом пространства $\operatorname{Spec}(A_f)$ на открытое пространство X_f пространства $X = \operatorname{Spec}(A)$* (§ 4, n° 3).

Это частный случай следствия предложения 13 § 4, n° 3.

Предложение 2. *Пусть A — кольцо, $u\colon M \to N$ — гомоморфизм A-модулей и $\mathfrak{p} \to$ простой идеал кольца A.*

(i) *Предположим, что гомоморфизм $u_\mathfrak{p}\colon M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ сюръективен и что N — модуль конечного типа. Тогда существует такой элемент $f \in A - \mathfrak{p}$, что сюръективен и гомоморфизм $u_f\colon M_f \to N_f$.*

(ii) *Допустим, что гомоморфизм $u_\mathfrak{p}$ биективен, что M — модуль конечного типа и что N — конечно представимый модуль. Тогда существует такой элемент $f \in A - \mathfrak{p}$, что биективен и u_f.*

Пусть R и Q — ядро и коядро гомоморфизма u; если $g \in A$, то ядром и коядром гомоморфизма u_g (соответственно $u_\mathfrak{p}$) служат модули частных R_g и Q_g (соответственно $R_\mathfrak{p}$ и $Q_\mathfrak{p}$) (§ 2, n° 4, теорема 1). Следовательно, $Q_\mathfrak{p} = 0$. Поскольку N — модуль конечного типа, то таков же и модуль Q, так что существует элемент $g' \in A - \mathfrak{p}$, для которого $g'Q = 0$ (§ 2, n° 2, следствие 2 из предложения 4); по этой причине $Q_{g'} = 0$. При выполнении условий пункта (ii) последовательность $0 \to R_{g'} \to M_{g'} \to N_{g'} \to 0$ точна и, следовательно, $R_{g'}$ — модуль конечного типа (гл. I, § 2, n° 8, лемма 9). Однако $(R_{g'})_{\mathfrak{p}R_{g'}} = R_\mathfrak{p} = 0$, и поэтому существует $g_1 \in A_{g'} - \mathfrak{p}A_{g'}$, такой, что $g_1 R_{g'} = 0$ (§ 2, n° 2, следствие 2 из предложения 4). Имеем равенство $g_1 = g''/g'^h$, в котором $g'' \in A - \mathfrak{p}$; тем более выполняется равенство $(g''/1)R_{g'} = 0$, откуда $R_{g'g''} = (R_{g'})_{g''/1} = 0$. Если $f = g'g''$, то $f \in A - \mathfrak{p}$, $Q_f = 0$ и $R_f = 0$; таким образом, гомоморфизм u_f биективен.

Следствие. *Если N — конечно представимый модуль и если $N_\mathfrak{p}$ — свободный $A_\mathfrak{p}$-модуль ранга p, то существует такой элемент $f \in A - \mathfrak{p}$, что N_f является свободным A_f-модулем ранга p.*

По условию существуют такие p элементов $x_i \in N$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$, что $x_i/1$ образуют базис свободного $A_{\mathfrak{p}}$-модуля $N_{\mathfrak{p}}$. Рассмотрим гомоморфизм u: $A^p \to N$, для которого $u(e_i) = x_i$ при $1 \leqslant i \leqslant p$, где $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ — канонический базис модуля A^p. Так как гомоморфизм $u_{\mathfrak{p}}$ по условию биективен, то существует такой $f \in A - \mathfrak{p}$, что u_f — также биективный гомоморфизм в силу предложения 2.

Предложение 3. *Пусть $(f_i)_{i \in I}$ — некоторое конечное семейство элементов кольца A, порождающее идеал A кольца A. Тогда кольцо $B = \prod_{i \in I} A_{f_i}$ является строго плоским A-модулем.*

В силу теоремы 1 § 2, n° 4, каждое из колец A_{f_i} является плоским A-модулем, а потому таков же и модуль B (гл. I, § 2, n° 3, предложение 2). С другой стороны, если $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A, то существует такой индекс i, что $f_i \notin \mathfrak{p}$ и, таким образом, $\mathfrak{p}_{f_i} = \mathfrak{p}A_{f_i}$ — простой идеал кольца частных A_{f_i}. В этом случае $\mathfrak{p}B \subset \mathfrak{p}A_{f_i} \times \prod_{j \neq i} A_{f_j} \neq B$, ибо $\mathfrak{p}A_{f_i} \neq A_{f_i}$; этого достаточно, чтобы установить, что B — строго плоский A-модуль (гл. I, § 3, n° 1, предложение 1).

Следствие. *В условиях предложения 3, для того чтобы некоторый A-модуль M был конечного типа* (соответственно *конечно представим*), *необходимо и достаточно, чтобы A_{f_i}-модуль M_{f_i} был модулем конечного типа* (соответственно *конечно представим*) *для каждого индекса i.*

Очевидно, это условие необходимо (§ 2, n° 4). Обратно, если все M_{f_i}-модули конечного типа (соответственно конечно представимы), то $M' = \prod_{i \in I} M_{f_i}$ представляет собой B-модуль конечного типа (соответственно конечно представимый B-модуль), так как, очевидно, можно предположить, что для каждого i существует точная последовательность $A_{f_i}^m \to A_{f_i}^n \to M_{f_i} \to 0$, в которой m и n *не зависят от i*. Однако $M' = M \otimes_A B$. Данное следствие получается теперь из предложения 3 применением предложения 11 из гл. I, § 3, n° 6.

Следует отметить, что условия на f_i означают, что открытые множества X_{f_i} образуют *покрытие* пространства Spec (A) (§ 4, n° 3, следствие 3 предложения 11).

2. Локальное описание проективных модулей конечного типа

Теорема 1. *Пусть A — кольцо и P — некоторый A-модуль. Тогда следующие свойства эквивалентны*:

а) *P — проективный модуль конечного типа*;

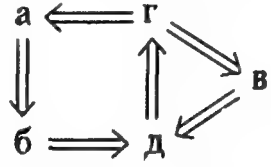
б) *P — конечно представимый модуль и для всякого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A модуль частных $P_{\mathfrak{m}}$ является свободным $A_{\mathfrak{m}}$-модулем*;

в) *P — модуль конечного типа, для всякого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ $A_{\mathfrak{p}}$-модуль $P_{\mathfrak{p}}$ свободен и, если через $r_{\mathfrak{p}}$ обозначить ранг модуля $P_{\mathfrak{p}}$, то функция $\mathfrak{p} \to r_{\mathfrak{p}}$ локально постоянна на топологическом пространстве* $\operatorname{Spec}(A)$ (т. е. любая точка спектра $\operatorname{Spec}(A)$ обладает окрестностью, в которой эта функция постоянна);

г) *существует конечное семейство $(f_i)_{i \in I}$ элементов кольца A, порождающее идеал A, для которого при любом $i \in I$ A_{f_i}-модуль P_{f_i} свободен и имеет конечный ранг*;

д) *для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A существует такой элемент $f \in A - \mathfrak{m}$, что P_f — свободный A_f-модуль конечного ранга.*

Мы докажем эту теорему по следующей логической схеме:



а)$\Rightarrow$ б). Уже известно, что любой проективный модуль конечного типа конечно представим (гл. I, § 2, n° 8, лемма 8 (iii)). Если P — проективный A-модуль, то $P_{\mathfrak{m}} = P \otimes_A A_{\mathfrak{m}}$ является проективным $A_{\mathfrak{m}}$-модулем (*Algèbre*, chap. II, 3^e éd., § 5, n° 1, corollaire de la proposition 4); наконец, так как $A_{\mathfrak{m}}$ — локальное кольцо, то всякий проективный $A_{\mathfrak{m}}$-модуль конечного типа свободен (§ 3, n° 2, следствие 2 предложения 5).

б) $\Rightarrow$ д). Это вытекает из следствия предложения 2 n° 1.

в) $\Rightarrow$ д). Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в A; положим $r_{\mathfrak{m}} = n$, и пусть $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — некоторый базис модуля $P_{\mathfrak{m}}$. С помощью домножения элементов x_i на некоторый обратимый элемент из $A_{\mathfrak{m}}$ можно добиться того, чтобы все x_i были каноническими образами элементов $p_i \in P$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Пусть $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — канонический базис свободного модуля A^n и u: $A^n \to P$ — такой гомоморфизм, что $u(e_i) = p_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n$. Поскольку P — модуль конечного типа, из предложения 2 n° 1 следует, что существует элемент $f \in A - \mathfrak{m}$, для которого гомоморфизм u_f сюръективен. Отсюда мы заключаем, что u_{fg} — также сюръективный гомоморфизм при любом $g \in A - \mathfrak{m}$; согласно же сделанным предположениям, существует такой элемент $g \in A - \mathfrak{m}$, что $r_{\mathfrak{p}} = n$ для $\mathfrak{p} \in X_g$. Таким образом, можно предположить, что для каждого $\mathfrak{p} \in X_f$ имеет место равенство $r_{\mathfrak{p}} = n$ — для этого достаточно заменить f на fg. В этом случае

гомоморфизм $u_\mathfrak{p}$: $A_\mathfrak{p}^n \to P_\mathfrak{p}$ сюръективен, а $P_\mathfrak{p}$ и $A_\mathfrak{p}$ являются свободными $A_\mathfrak{p}$-модулями одинакового ранга. Следовательно (§ 3, n° 2, следствие предложения 6), гомоморфизм $u_\mathfrak{p}$ биективен при любом $\mathfrak{p} \in X_f$. Пусть $\mathfrak{p}'$ — некоторый простой идеал кольца A_f, и пусть $\mathfrak{p}$ — его прообраз в A относительно канонического отображения; если отождествить (A_f^n) и $(P_f)_{\mathfrak{p}'}$ с $A_\mathfrak{p}^n$ и $P_\mathfrak{p}$ при помощи канонических гомоморфизмов, то $(u_f)_{\mathfrak{p}'}$ отождествляется с $u_\mathfrak{p}$, и, таким образом, этот гомоморфизм биективен. Отсюда следует биективность гомоморфизма u_f (§ 3, n° 3, теорема 1), и условие д) получено.

д) $\Rightarrow$ г). Пусть E — множество таких элементов $f \in A$, что P_f — свободный A_f-модуль конечного типа. По условию множество E не содержится ни в одном максимальном идеале кольца A, а потому E порождает идеал A и, следовательно, существует конечное семейство $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ элементов множества E и элементы $a_i \in A$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, такие, что $1 = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i$. Отсюда следует г).

г) $\Rightarrow$ в). Из следствия предложения 3 n° 1 вытекает, что P — модуль конечного типа. С другой стороны, для всякого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A существует такой индекс i, что $\mathfrak{p} \in X_{f_i}$. Если $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}_{f_i}$, то $P_\mathfrak{p} = \left(P_{f_i}\right)_{\mathfrak{p}'}$ (§ 2, n° 5, предложение 10); следовательно, по условию $P_\mathfrak{p}$ — свободный модуль того же ранга, что и модуль P_{f_i}, что и доказывает в).

г) $\Rightarrow$ а). Рассмотрим кольцо $B = \prod_{i \in I} A_{f_i}$ и B-модуль $M = \prod_{i \in I} P_{f_i} = P \otimes_A B$. Для каждого индекса i существует такой свободный A_{f_i}-модуль L_i, что P_{f_i} служит прямым слагаемым модуля L_i, и мы можем считать, что модули L_i все имеют один и тот же ранг. Поэтому $L = \prod_{i \in I} L_i$ является свободным B-модулем, в котором M — прямое слагаемое; иначе говоря, M представляет собой проективный B-модуль конечного типа. Поскольку B — строго плоский A-модуль (n° 1, предложение 3), P — проективный A-модуль конечного типа (гл. 1, § 3, n° 6, предложение 12).

Следствие 1. *Предположим, что имеют место эквивалентные условия, перечисленные в теореме* 1. *Пусть* m — *такое целое число* >0, *что для любого семейства* $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ *элементов модуля* P *существует семейство* $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ *элементов кольца* A, *которые*

не все являются делителями нуля и для которых $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = 0$. *Тогда для любого* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ *справедливо неравенство* $r_{\mathfrak{p}} < m$.

В самом деле, пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца A. Положим $r = r_{\mathfrak{p}}$, и пусть $(y_j)_{1 \leqslant j \leqslant r}$ — какой-нибудь базис свободного $A_{\mathfrak{p}}$-модуля $P_{\mathfrak{p}}$. Тогда существуют такие элементы x_j $(1 \leqslant j \leqslant r)$ модуля P и такой элемент $s \in A - \mathfrak{p}$, что $y_j = x_j/s$ для всех j. Для любого семейства $(a_j)_{1 \leqslant j \leqslant r}$ элементов кольца A, удовлетворяющего равенству $\sum_{j=1}^{r} a_j x_j = 0$, в этом случае имеет место соотношение $\sum_{j=1}^{r} (a_j/1)\, y_j = 0$, выполняющееся в модуле $P_{\mathfrak{p}}$. Отсюда следует, что $a_j/1 = 0$ при $1 \leqslant j \leqslant r$. Поскольку система $A - \mathfrak{p}$ не содержит 0, это показывает, что все элементы a_j являются делителями нуля в A (§ 2, n° 1, замечание 3), так что обязательно $r < m$.

Следствие 2. *Всякий конечно представимый плоский модуль является проективным.*

Действительно, если P — конечно представимый плоский A-модуль и $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в A, то $A_{\mathfrak{m}}$-модуль $P_{\mathfrak{m}}$ является плоским (§ 3, n° 4, предложение 13) и конечно представимым (§ 2, n° 4); следовательно, этот модуль свободен (§ 3, n° 2, следствие 2 предложения 5). Таким образом, условие б) теоремы 1 выполнено.

Замечания. 1) Существуют плоские модули конечного типа, не являющиеся проективными (упражнение 7).

2) Следствие 2 из теоремы 1 распространяется на модули над некоммутативными кольцами (гл. 1, § 2, упражнение 15).

3. Ранги проективных модулей

Определение 1. *Пусть P — проективный A-модуль конечного типа. Для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A ранг свободного $A_{\mathfrak{p}}$-модуля $P_{\mathfrak{p}}$ называется рангом модуля P в $\mathfrak{p}$; этот ранг обозначается через* $\mathrm{rg}_{\mathfrak{p}}(P)$.

В силу теоремы 1, функция $\mathfrak{p} \to \mathrm{rg}_{\mathfrak{p}}(P)$ с целочисленными значениями является *локально постоянной* на $X = \mathrm{Spec}(A)$; следовательно, она является константой, если X — связное пространство и, в частности, если кольцо A *целостное* (§ 4, n° 3, следствие 2 предложения 15).

Определение 2. *Пусть n — целое число $\geqslant 0$. Мы говорим, что некоторый проективный A-модуль P имеет ранг n, если он*

является модулем конечного типа и если $\mathrm{rg}_{\mathfrak{p}}(P) = n$ *для всякого простого идеала* $\mathfrak{p}$ *кольца* A.

Совершенно ясно, что любой *свободный* A-модуль L конечного типа имеет ранг n в смысле определения 2, если n — *размерность* (или *ранг*) модуля L в смысле *Algébre*, chap. II, 3e éd., § 7, n° 2.

Любой проективный модуль ранга 0 является нулевым (§ 3, n° 3, следствие 2 теоремы 1). Если A состоит не только из 0 и если проективный A-модуль P имеет ранг n, то целое число n определяется однозначно; оно обозначается через $\mathrm{rg}(P)$.

Теорема 2. *Пусть* P — *некоторый* A-*модуль и* n — *некоторое целое число* $\geqslant 0$. *В этом случае следующие свойства эквивалентны:*

а) P — *проективный модуль* ранга n;

б) P — *модуль конечного типа и* $A_{\mathfrak{m}}$-*модуль* $P_{\mathfrak{m}}$ *свободен и имеет ранг* n *для любого максимального идеала* $\mathfrak{m}$ *кольца* A;

в) P — *модуль конечного типа и* $A_{\mathfrak{p}}$-*модуль* $P_{\mathfrak{p}}$ *свободен и имеет ранг* n *для любого простого идеала* $\mathfrak{p}$ *кольца* A;

г) *для любого максимального идеала* $\mathfrak{m}$ *кольца* A *существует такой элемент* $f \in A - \mathfrak{m}$, *что* A_f-*модуль* P_f *свободен и имеет ранг* n.

В соответствии с определением 2 и в силу теоремы 1, условия а) и в) эквивалентны; из б) следует в), так как для всякого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A существует максимальный идеал $\mathfrak{m}$, содержащий $\mathfrak{p}$, и если положить $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}_{\mathfrak{m}}$, то $P_{\mathfrak{p}}$ изоморфен $(P_{\mathfrak{m}})_{\mathfrak{p}'}$ (§ 2, n° 5, предложение 11). Если $P_{\mathfrak{m}}$ — свободный модуль ранга n, то таков же, следовательно, и модуль $P_{\mathfrak{p}}$. Из в) следует г) в силу теоремы 1 и того факта, что если $f \in A - \mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}_f$, то модуль $P_{\mathfrak{m}}$ изоморфен $(P_f)_{\mathfrak{m}'}$, благодаря чему ранги модулей P_f и $P_{\mathfrak{m}}$ равны. Наконец, это последнее рассуждение и теорема 1 показывают, что из г) следует б).

Замечание. Если A — *целостное* кольцо, то любой проективный A-модуль обладает однозначно определенным рангом (в смысле определения 2), как было показано выше; кроме того, этот ранг совпадает с рангом, определенным в *Algébre*, chap. II, 3e éd., § 7, n° 2[1]). Чтобы в этом убедиться, достаточно применить теорему 2в) при $\mathfrak{p} = (0)$.

Пусть E и F — два проективных A-модуля конечного типа. Известно (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 2, 3), что модули $E \times F$, $E \otimes_A F$, $\mathrm{Hom}_A(E, F)$, а также сопряженный модуль E^* являются

[1]) Имеется в виду определение ранга модуля M над целостностным кольцом A как размерности над полем частных K кольца A векторного пространства $K \otimes_A M$. — *Прим. перев.*

проективными модулями конечного типа; то же самое верно и для внешней степени $\overset{k}{\wedge} E$ при любом $k > 0$ (*Algébre*, chap. III, 3e éd.). Кроме того, из определения 1, из предложений 18 и 19 § 2, n° 7, а также из n° 8 немедленно следует, что для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A выполняются следующие соотношения:

$$\mathrm{rg}_{\mathfrak{p}}(E \times F) = \mathrm{rg}_{\mathfrak{p}}(E) + \mathrm{rg}_{\mathfrak{p}}(F), \tag{1}$$

$$\mathrm{rg}_{\mathfrak{p}}(E \otimes_A F) = \mathrm{rg}_{\mathfrak{p}}(E) \cdot \mathrm{rg}_{\mathfrak{p}}(F), \tag{2}$$

$$\mathrm{rg}_{\mathfrak{p}}(\mathrm{Hom}_A(E, F)) = \mathrm{rg}_{\mathfrak{p}}(E) \cdot \mathrm{rg}_{\mathfrak{p}}(F), \tag{3}$$

$$\mathrm{rg}_{\mathfrak{p}}(E^*) = \mathrm{rg}_{\mathfrak{p}}(E), \tag{4}$$

$$\mathrm{rg}_{\mathfrak{p}}(\overset{k}{\wedge} E) = \binom{\mathrm{rg}_{\mathfrak{p}}(E)}{k}. \tag{5}$$

Когда определены ранги модулей E и F, то определены и ранги модулей $E \times F$, $E \otimes_A F$, $\mathrm{Hom}_A(E, F)$, E^*, $\overset{k}{\wedge} E$, и только что указанные формулы останутся верными, если опустить индекс $\mathfrak{p}$. Кроме того:

Следствие. *Для того чтобы проективный A-модуль P конечного типа имел ранг n, необходимо и достаточно, чтобы модуль* $\overset{n}{\wedge} P$ *имел ранг* 1.

Предложение 4. *Пусть B — коммутативная A-алгебра и P — проективный A-модуль ранга n. Тогда B-модуль $P_{(B)} = B \otimes_A P$ проективен и его ранг равен n.*

Известно, что $P_{(B)}$ — проективный модуль конечного типа (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 5, n° 1, corollaire de la proposition 4). Если $\mathfrak{q}$ — простой идеал в кольце B и $\mathfrak{p}$ — его прообраз в A, то $(P_{(B)})_{\mathfrak{q}} = (P \otimes_A B) \otimes_B B_{\mathfrak{q}} = P \otimes_A B_{\mathfrak{q}} = (P \otimes_A A_{\mathfrak{p}}) \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{q}}$, и так как по условию $P \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$ является свободным $A_{\mathfrak{p}}$-модулем ранга n, то $(P_{(B)})_{\mathfrak{q}}$ является свободным $B_{\mathfrak{q}}$-модулем ранга n.

Предложение 5. *Пусть A — полулокальное кольцо и P — проективный A-модуль конечного типа. Если ранг модуля P определен, то P — свободный A-модуль.*

Предположим сначала, что A изоморфно произведению полей K_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. В этом случае K_i можно отождествить с минимальными идеалами (*Алгебра*, гл. VIII, § 3, n° 1) кольца A и для всякого i сумма $\mathfrak{p}_i$ полей K_j по индексам $j \neq i$ является максимальным идеалом в A, причем идеалы $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — это единственно возможные простые идеалы кольца A. Любой A-модуль P конечного типа в этом случае является прямой суммой

своих изотипических компонент P_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, где каждый модуль P_i изоморфен прямой сумме конечного числа r_i A-модулей, изоморфных K_i (*Алгебра*, гл. VIII, § 5, n° 1, предложение 1, и n° 3, предложение 11); кольцо $A_{\mathfrak{p}_i}$ отождествляется с K_i и аннулирует компоненты P_j при $j \neq i$; следовательно, $r_i = \mathrm{rg}_{\mathfrak{p}_i}(P)$. Если все числа r_i равны некоторому r, то P отождествляется с A^r, откуда в рассматриваемом случае следует предложение. В общем же случае пусть $\mathfrak{R}$ — радикал кольца A и $B = A/\mathfrak{R}$. Поскольку B представляет собой произведение полей, проективный B-модуль $P_{(B)}$ свободен в силу предыдущих рассуждений и предложения 4. В то же время P — плоский A-модуль, и наше предложение вытекает из предложения 5 § 3, n° 2.

4. *Проективные модули ранга 1*

Теорема 3. *Пусть A — кольцо и M — некоторый A-модуль конечного типа.*

(i) *Если существует такой A-модуль N, что модуль $M \otimes_A N$ изоморфен модулю A, то M — проективный модуль ранга* 1.

(ii) *Обратно, если M — проективный модуль ранга* 1 *и если M^* — модуль, сопряженный к M, то канонический гомоморфизм u: $M \otimes_A M^* \to A$, соответствующий канонической билинейной форме $(x, x^*) \to (x, x^*)$ на $M \times M^*$ (Algébre*, chap. II, 3e éd., § 2, n° 3) [1]), *биективен.*

(i) Нам предстоит доказать, что для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A $A_{\mathfrak{m}}$-модуль $M_{\mathfrak{m}}$ свободен и имеет ранг 1 (теорема 2б)); заменив при необходимости A на $A_{\mathfrak{m}}$, мы можем предполагать, что A — *локальное кольцо* (§ 2, n° 7, предложение 18). Пусть $k = A/\mathfrak{m}$; изоморфизм v: $M \otimes_A N \to A$ определяет некоторый изоморфизм $v \otimes 1_k$: $(M/\mathfrak{m}M) \otimes_k (N/\mathfrak{m}N) \to k$. Поскольку ранг модуля $(M/\mathfrak{m}M) \otimes_k (N/\mathfrak{m}N)$ над полем k равен произведению рангов модулей $M/\mathfrak{m}M$ и $N/\mathfrak{m}N$, эти ранги обязаны быть равными 1, иначе говоря, $M/\mathfrak{m}M$ — моногенный модуль. Отсюда мы заключаем, что моногенен и сам модуль M (§ 3, n° 2, следствие 2 предложения 4). С другой стороны, аннулятор модуля M аннулирует и модуль $M \otimes_A N$, т. е. он равен нулю, что и доказывает изоморфизм модулей M и A.

(ii) Достаточно доказать, что при любом максимальном идеале $\mathfrak{m}$ кольца A гомоморфизм $u_{\mathfrak{m}}$ является изоморфизмом (§ 3, n° 3, теорема 1). Так как модуль M конечно представим (гл. I, § 3, n° 8, лемма 8), то модуль $(M^*)_{\mathfrak{m}}$ каноническим образом отождествляется с сопряженным модулем $(M_{\mathfrak{m}})^*$ (§ 2, n° 7, предложение 19); а так как $M_{\mathfrak{m}}$ и вместе с ним сопряженный к нему

[1]) См. также *Алгебра*, гл. II, § 4, n° 1. — *Прим. перев.*

модуль $(M_{\mathfrak{m}})^*$ имеют ранг 1, то ясно, что канонический гомоморфизм $u_{\mathfrak{m}}$: $(M_{\mathfrak{m}}) \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} (M_{\mathfrak{m}})^* \to A_{\mathfrak{m}}$ биективен. Доказательство закончено.

Замечание. 1) Если M — проективный модуль ранга 1, а N — такой модуль, что тензорное произведение $M \otimes_A N$ изоморфно модулю A, то N изоморфен модулю M^*: в самом деле, имеют место следующие изоморфизмы:

$$N \to N \otimes A \to N \otimes M \otimes M^* \to A \otimes M^* \to M^*.$$

Предложение 6. *Пусть M и N — проективные модули ранга 1. Тогда модули $M \otimes_A N$, $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ и сопряженный к M модуль M^* проективны и имеют ранг 1.*

Это немедленно следует из формул (2), (3) и (4).

Отметим теперь, что любой A-модуль конечного типа изоморфен фактормодулю модуля $L = A^{(\mathbf{N})}$; следовательно, можно говорить о *множестве $\boldsymbol{F}(A)$ классов A-модулей конечного типа* по отношению изоморфизма (*Theorie des ensembles*, chap. I, 2e éd., § 6, n° 9). Мы будем обозначать через $\boldsymbol{P}(A)$ подмножество в $\boldsymbol{F}(A)$, состоящее из классов проективных A-модулей ранга 1, и через $\mathrm{cl}(M)$ — образ в множестве $\boldsymbol{P}(A)$ проективного A-модуля M ранга 1. Очевидно, что для двух проективных A-модулей M, N ранга 1 класс $\mathrm{cl}(M \otimes_A N)$ зависит только от $\mathrm{cl}(M)$ и $\mathrm{cl}(N)$. Мы положим, по определению,

$$\mathrm{cl}(M) + \mathrm{cl}(N) = \mathrm{cl}(M \otimes_A N); \tag{6}$$

таким образом, мы определили внутренний закон композиций в множестве $\boldsymbol{P}(A)$.

Предложение 7. *Множество $\boldsymbol{P}(A)$ классов проективных A-модулей ранга 1, снабженное законом композиции (6), представляет собой коммутативную группу. Если M — любой проективный A-модуль ранга 1 и M^* — сопряженный к нему, то*

$$\mathrm{cl}(M^*) = -\mathrm{cl}(M) \quad и \quad \mathrm{cl}(A) = 0. \tag{7}$$

Ассоциативность и коммутативность тензорного произведения показывают, что закон композиции (6) ассоциативен и коммутативен. Изоморфизм модулей $A \otimes_A M$ и M говорит о том, что класс $\mathrm{cl}(A)$ является нейтральным элементом относительно рассматриваемого закона композиции и, наконец, в силу теоремы 3, $\mathrm{cl}(M) + \mathrm{cl}(M^*) = \mathrm{cl}(A)$, откуда и следует предложение.

Пусть B — коммутативная A-алгебра, M — проективный A-модуль ранга 1; тогда $M_{(B)} = B \otimes_A M$ является проективным B-модулем ранга 1 (n° 3, предложение 4). Следовательно,

существует такое отображение φ: $\boldsymbol{P}(A) \to \boldsymbol{P}(B)$, что

$$\varphi(\mathrm{cl}(M)) = \mathrm{cl}(M_{(B)}); \tag{8}$$

это отображение называется *каноническим.*

Формула $M_{(B)} \otimes_B N_{(B)} = (M \otimes_A N)_{(B)}$, справедливая для любых двух A-модулей M, N, доказывает, что отображение φ является *гомоморфизмом* коммутативных групп.

*Замечание. 2) Условие д) в теореме 1 (эквивалентное на самом деле тому, что P — проективный модуль конечного типа) может быть выражено и так: *пучок модулей $\tilde{P}$ над пространством $X = \mathrm{Spec}\, A$, ассоциированный с модулем P*[1]), *локально свободен и имеет конечный тип*; таким образом, этот пучок можно интерпретировать как пучок сечений некоторого векторного расслоения над X. Обратно, всякое векторное расслоение над X получается из некоторого проективного модуля конечного типа, определенного однозначно с точностью до изоморфизма; проективные модули ранга n соответствуют векторным расслоениям, все слои которых имеют размерность n. В частности, векторные расслоения ранга 1 соответствуют проективным модулям ранга 1. Если обозначить через $\mathcal{O}_X$ структурный пучок $\tilde{A}$, а через $\mathcal{O}_X^*$ — *пучок обратимых элементов* пучка Q_X (сечения которого над открытым множеством U являются обратимыми элементами кольца сечений пучка $\mathcal{O}_X$ над тем же U), то легко установить, что группа $\boldsymbol{P}(A)$ изоморфна первой группе когомологий $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$.

5. Невырожденные подмодули

В этом пункте и в двух последующих через A обозначается некоторое кольцо, через S — некоторая мультипликативная система в A, состоящая из элементов, не являющихся делителями нуля в A, и через B — кольцо частных $S^{-1}A$; кольцо A канонически отождествляется с некоторым подкольцом в B (§ 2, n° 1, замечание 3). *Таким образом, элементы из S обратимы в кольце B.*

Одним из наиболее важных для приложений частных случаев описанной ситуации является случай, когда кольцо A *целостное*, *а S* — множество всех элементов $\neq 0$ из кольца A. Тогда B представляет собой *поле частных* кольца A.

Определение 3. *Пусть M — некоторый A-подмодуль кольца B. Мы говорим, что M невырожден, если $B \cdot M = B$.*

[1]) См. Grothendieck A., Eléments de la géométrie algébrique, I (§ 1), Publ. Math. I. H. E. S., n° 4, 1960.

Когда B является полем, это условие означает просто, что модуль M состоит не только из 0.

Предложение 8. *Пусть M — некоторый A-подмодуль кольца B. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *модуль M невырожден;*

б) *модуль M пересекается с множеством S;*

в) *если $j\colon M \to B$ — каноническое вложение, то гомоморфизм $u = S^{-1}j\colon S^{-1}M \to B$ биективен.*

Из а) следует б), так как если $B \cdot M = B$, то существует такой элемент $a \in A$ и такие элементы $s \in S$, $x \in M$, что $(a/s)x = 1$; следовательно, $ax = s$ принадлежит $S \cap M$. Что касается того, как из б) следует в), то уже было замечено, что гомоморфизм u инъективен (§ 2, п° 4, теорема 1); кроме того, если $x \in M \cap S$, то образ элемента $x/x \in S^{-1}M$ при гомоморфизме u в кольце B равен 1 и, следовательно, u — сюръективный гомоморфизм. Наконец, очевидно, что из в) следует а).

Следствие. *Если M и N — два невырожденных A-подмодуля модуля B, то невырожденными являются и A-модули $M + N$, $M \cdot N$ и $M \cap N$.*

Для модуля $M + N$ утверждение тривиально. С другой стороны, если $s \in S \cap M$ и $t \in S \cap N$, то $st \in S \cap (M \cdot N)$ и $st \in S \cap (M \cap N)$.

Если заданы два A-подмодуля M и N кольца B, то через $N : M$ будем обозначать A-подмодуль в B, состоящий из таких элементов $b \in B$, что $bM \subset N$ (гл. 1, § 2, п° 10, замечание). Если сопоставить каждому элементу $b \in N : M$ гомоморфизм $h_b\colon x \to bx$ модуля M в модуль N, то получится *канонический гомоморфизм $b \to h_b$ из $N : M$* в $\mathrm{Hom}_A(M, N)$.

Предложение 9. *Пусть M, N — два A-подмодуля кольца B. Если M невырожден, то канонический гомоморфизм из $N : M$ в $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ биективен.*

Пусть $s \in S \cap M$. Если $b \in N : M$ — такой элемент, что $bx = 0$ для всякого $x \in M$, то $bs = 0$, откуда $b = 0$, так как s не является делителем нуля в B. С другой стороны, пусть $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ и положим $b = f(s)/s$; для любого элемента $x \in M$ существует такой элемент $t \in S$, что $tx \in A$. Следовательно,

$$f(x) = s^{-1}t^{-1}f(stx) = s^{-1}t^{-1}txf(s) = bx,$$

откуда $b \in N : M$ и $f = h_b$, чем и доказывается предложение.

Замечание. В частности, модуль $A : M$ канонически отождествляется с модулем M^*, сопряженным к M, а каноническая

билинейная форма на $M \times M^*$ отождествляется с ограничением на $M \times (A : M)$ обычного умножения $B \times B \to B$.

6. *Обратимые подмодули*

(*Сохраняются обозначения из* п° 5.)

Определение 4. *Говорят, что A-подмодуль M кольца B обратим, если существует такой A-подмодуль N в B, что* $M \cdot N = A$.

Пример. Если b — обратимый элемент кольца B, то A-модуль Ab является обратимым, так как обратным ему служит модуль $N = Ab^{-1}$.

Предложение 10. *Пусть M — обратимый A-подмодуль кольца B. Тогда*

(i) *существует такой элемент* $s \in S$, *что* $As \subset M \subset As^{-1}$ (*в частности, модуль M невырожден*);

(ii) *модуль* $A : M$ *является единственным A-подмодулем N кольца B, для которого* $M \cdot N = A$.

Если $M \cdot N = A$, то $B \cdot M = B \cdot (B \cdot M) \supset B \cdot (M \cdot N) = B \cdot A = B$; следовательно, модуль M невырожден. Невырожденным является также и модуль N. Если $t \in S \cap M$ и $u \in S \cap N$ (п° 5, предложение 8), то элемент $s = tu$ принадлежит $S \cap M \cap N$, в силу чего $Ms \subset M \cdot N = A$; следовательно, $As \subset M \subset As^{-1}$.

С другой стороны, очевидно, что $N \subset A : M$, откуда

$$A = M \cdot N \subset M \cdot (A : M) \subset A$$

и $M \cdot (A : M) = A$; умножая обе части этого равенства на N, получаем, что $A : M = N$, а это завершает доказательство.

Теорема 4. *Пусть M — невырожденный A-подмодуль кольца B. Тогда следующие свойства эквивалентны*:

а) *модуль M обратим*;

б) *модуль M проективен*;

в) *модуль M проективен ранга* 1;

г) *M является A-модулем конечного типа и* $A_{\mathfrak{m}}$*-модуль* $A_{\mathfrak{m}}$ *моногенен для всякого максимального идеала* $\mathfrak{m}$ *кольца A*.

Сначала докажем эквивалентность пунктов а), б) и в). Если выполнено а) и если N — такой A-подмодуль кольца B, что $M \cdot N = A$, то имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{p} m_i n_i = 1 \quad (m_i \in M,\ n_i \in N \text{ для любого } i). \tag{9}$$

Для любого элемента $x \in M$ положим $v_i(x) = n_i x$; функции v_i являются линейными формами на M и, в силу (9),

$x = \sum_{i=1}^{p} m_i v_i(x)$ для всякого элемента $x \in M$. Это доказывает (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 2, n° 6, proposition 12) [1]), что модуль M проективен и что он порождается элементами m_i. Следовательно, M — проективный модуль конечного типа.

Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в A; покажем, что целое число $r = \mathrm{rg}_{\mathfrak{m}}(M)$ равно 1. Для этого обозначим через S' образ системы S в кольце $A_{\mathfrak{m}}$; поскольку элементы из S не являются делителями нуля в A, то и элементы системы S' не будут делителями нуля в $A_{\mathfrak{m}}$; следовательно, $S'^{-1}A_{\mathfrak{m}} \neq 0$ и, так как $M_{\mathfrak{m}}$ является свободным $A_{\mathfrak{m}}$-модулем ранга r, модуль частных $S'^{-1}M_{\mathfrak{m}}$ свободен над кольцом $S'^{-1}A_{\mathfrak{m}}$ и имеет ранг r. Но если T' — образ системы $A - \mathfrak{m}$ в кольце $S^{-1}A$, то $S'^{-1}A_{\mathfrak{m}}$ (соответственно $S'^{-1}M_{\mathfrak{m}}$) каноническим образом отождествляется с $T'^{-1}(S^{-1}A)$ (соответственно с $T'^{-1}(S^{-1}M)$) (§ 2, n° 3, предложение 7). В силу равенства $S^{-1}M = B$ (предложение 8в), модуль $T'^{-1}(S^{-1}M)$ является свободным модулем ранга 1 над кольцом $T'^{-1}(S^{-1}A)$, а это означает, что $r = 1$, и доказывает импликацию а)$\Rightarrow$в).

Импликация в)$\Rightarrow$б) тривиальна. Покажем, что б)$\Rightarrow$а). Согласно предположению, существует некоторое (не обязательно конечное) семейство $(f\lambda)_{\lambda \in L}$ линейных форм на модуле M и некоторое семейство $(m_\lambda)_{\lambda \in L}$ элементов модуля M, для которых при любом $x \in M$ семейство $(f_\lambda(x))$ имеет конечный носитель и $x = \sum_\lambda m_\lambda f_\lambda(x)$ (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 2, n° 6, proposition 12) [1]). Поскольку модуль M невырожден, $f_\lambda(x) = n_\lambda x$ при некотором $n_\lambda \in A : M$ в соответствии с предложением 9 n° 5. Если взять в качестве x какой-нибудь элемент пересечения $M \cap S$ (n° 5, предложение 8), то станет видно, что обязательно $n_\lambda = 0$ для всех, кроме конечного числа, индексов, и $\sum_\lambda m_\lambda n_\lambda = 1$. Отсюда, очевидно, следует, что $M \cdot (A : M) = A$, и условие а) получено.

В силу определения 2 n° 3, из в) следует г). Докажем обратное. Так как модуль M невырожден, его аннулятор равен нулю (предложение 8б)) и, следовательно, таков же и аннулятор модуля $M_{\mathfrak{m}}$ (§ 2, n° 4, формула (9)). Поскольку предполагается, что $M_{\mathfrak{m}}$ — моногенный $A_{\mathfrak{m}}$-модуль, этот модуль свободен и имеет

---

[1]) Предыдущее, очевидно, равносильно вложению M на прямое слагаемое в A^p, т. е. равносильно тому, что M — проективный A-модуль конечного типа. — *Прим. ред.*

ранг 1; теперь из теоремы 2 n° 3 следует, что M — проективный модуль ранга 1.

Следствие. *Всякий обратимый A-подмодуль кольца B является плоским и конечно представимым.*

Это следует из теоремы 4в).

Предложение 11. *Пусть M, N — два A-подмодуля кольца B. Допустим, что модуль M обратим. Тогда*

(i) *канонический гомоморфизм $M \otimes_A N \to M \cdot N$ биективен;*

(ii) $N : M = N \cdot (A : M)$ и $N = (N : M) \cdot M$.

Пусть j — каноническое вложение $N \to B$. Так как M — плоский A-модуль (следствие теоремы 4), то $1 \otimes j$: $M \otimes_A N \to M \otimes_A B$ есть инъективный гомоморфизм. Но так как $B = S^{-1}A$, то B-модуль $M \otimes_A B$ равен $S^{-1}M$, следовательно, он отождествляется с B, ибо M — невырожденный модуль (n° 5, предложение 8). Если это отождествление осуществить, то образ гомоморфизма $1 \otimes j$ окажется равным $M \cdot N$, откуда и следует (i).

Положим $M' = A : M$. Очевидно, что $M' \cdot N \subset N : M$ и $M \cdot (N : M) \subset N$. С другой стороны, ввиду того, что $M \cdot M' = A$ (предложение 10), $N : M = M' \cdot M \cdot (N : M) \subset M' \cdot N$ и $N = M \cdot M' \cdot N \subset M \cdot (N : M)$, откуда следует (ii).

Замечание. Доказательство пункта (i) в предложении 11 использует только то, что M — плоский невырожденный модуль.

7. Группа классов обратимых модулей

(*Сохраняются обозначения из* n° 5 *и* 6.)

A-подмодули кольца B образуют относительно операции умножения коммутативный моноид $\mathfrak{M}$, в котором A служит нейтральным элементом. Таким образом, обратимые модули являются обратимыми элементами моноида $\mathfrak{M}$ и, следовательно, они образуют коммутативную группу $\mathfrak{I}$. Мы видели (n° 6, предложение 10), что обратным для элемента $M \in \mathfrak{I}$ служит модуль $A : M$.

Пусть A^* (соответственно B^*) — мультипликативная группа обратимых элементов кольца A (соответственно кольца B); обозначим через u каноническое вложение $A \to B$. Для любого элемента $b \in B^*$ множество $\theta(b) = bA$ прдставляет собой обратимый A-подмодуль. Отображение $\theta : B^* \to \mathfrak{I}$ является гомоморфизмом, ядро которого равно $u(A^*)$; мы будем обозначать его коядро через $\mathfrak{C}$ или через $\mathfrak{C}(A)$. Группа $\mathfrak{C}$ называется *группой классов обратимых A-подмодулей кольца B*. В соответствии со сделанным построением имеем точную последовательность

$$(1) \to A^* \xrightarrow{u} B^* \xrightarrow{\theta} \mathfrak{I} \xrightarrow{\rho} \mathfrak{C} \to (1), \qquad (10)$$

где (1) обозначает группу, состоящую из одного нейтрального элемента, и ρ — каноническое отображение $\mathfrak{I} \to \mathfrak{C} = \mathfrak{I}/\theta(B^*)$.

Поскольку всякий обратимый A-подмодуль M кольца B проективен и имеет ранг 1 (n° 6, теорема 4), то определен элемент $\mathrm{cl}(M) \in \boldsymbol{P}(A)$ (n° 4).

Предложение 12. *Отображение* cl: $\mathfrak{I} \to \boldsymbol{P}(A)$ *определяет посредством перехода к факторгруппам изоморфизм группы* $\mathfrak{C} = \mathfrak{I}/\theta(B^*)$ *на ядро канонического гомоморфизма* φ: $\boldsymbol{P}(A) \to \boldsymbol{P}(B)$ (n° 4).

Иными словами, точна такая последовательность:

$$(1) \to A^* \xrightarrow{u} B^* \xrightarrow{\theta} \mathfrak{I} \xrightarrow{\mathrm{cl}} \boldsymbol{P}(A) \xrightarrow{\varphi} \boldsymbol{P}(B). \qquad (11)$$

Из предложения 11 n° 6 и из определения сложения в $\boldsymbol{P}(A)$ следует, что $\mathrm{cl}(M \cdot N) = \mathrm{cl}(M) + \mathrm{cl}(N)$ для M, N из $\mathfrak{I}$; это показывает, что отображение cl есть гомоморфизм. Если модуль $M \in \mathfrak{I}$ изоморфен A, то существует такой элемент $b \in B$, что $M = Ab$ и, поскольку M — обратимый модуль, существует такой элемент $b' \in B$, что $b'b = 1$; иначе говоря, элемент b обратим в кольце B. Обратное получается непосредственно. Следовательно, ядро гомоморфизма cl в группе $\mathfrak{I}$ равно $\theta(B^*)$.

Найдем теперь образ отображения cl. Если $M \in \mathfrak{I}$, то $M \otimes_A B = S^{-1}M = B$ (n° 5, предложение 8в)), откуда $\mathrm{cl}(M) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Пусть, обратно, P — проективный A-модуль ранга 1, для которого модуль $P_{(B)} = P \otimes_A B$ B-изоморфен модулю B. Поскольку P — плоский A-модуль, вложение u: $A \to B$ определяет инъективный гомоморфизм $u \otimes 1$: $P \to P_{(B)} = B$ и, таким образом, P можно отождествить с некоторым A-подмодулем кольца B; в силу предложения 8в) n° 5, модуль P невырожден, и теорема 4 n° 6 показывает, что модуль P обратим. Следовательно, ядро отображения φ равно образу отображения cl: $\mathfrak{I} \to \boldsymbol{P}(A)$.

Следствие 1. *Для того чтобы два обратимых* A*-подмодуля кольца* B *имели один и тот же образ в группе* $\mathfrak{C}$, *необходимо и достаточно, чтобы они были изоморфны.*

Следствие 2. *Если* B *— полулокальное кольцо, то группа* $\mathfrak{C}$ *классов обратимых* A*-подмодулей кольца* B *канонически отождествляется с группой* $\boldsymbol{P}(A)$ *классов проективных* A*-модулей ранга* 1.

В самом деле, в этом случае $\boldsymbol{P}(B) = 0$ (n° 3, предложение 5).

Замечание. Предположения следствия 2 выполняются в следующих двух случаях:

1) A — целостное кольцо и S — множество элементов $\neq 0$ из A; тогда B является полем частных кольца A. Обратимые A-подмодули поля B называются в этом случае также

обратимыми дробными идеалами; те обратимые дробные идеалы, которые являются моногенными свободными A-модулями Ab ($b \neq 0$ в B), представляют собой не что иное, как *дробные главные идеалы*, введенные в *Алгебре*, гл. VI, § 1, n° 5.

2) A — нётерово кольцо и S — множество всех элементов из A, не являющихся делителями нуля, так что B — полное кольцо частных кольца A. Действительно, в этом случае $S = A - \bigcup_i \mathfrak{p}_i$, где $\mathfrak{p}_i$ — элементы (их конечное число) из $\mathrm{Ass}(A)$ (гл. IV, § 1) и, следовательно, B — полулокальное кольцо (§ 3, n° 5, предложение 17).

Упражнения

1) Построить такой эндоморфизм u $\mathbf{Z}$-модуля $M = \mathbf{Z}^{(\mathbf{N})}$, чтобы для простого идеала $\mathfrak{p} = (0)$ кольца $\mathbf{Z}$ отображение $u_\mathfrak{p}$ было автоморфизмом модуля $M_\mathfrak{p}$ и чтобы при этом не существовало такого элемента $f \neq 0$ из $\mathbf{Z}$, что u_f является сюръективным эндоморфизмом модуля M_f.

2) Пусть K — поле, B — кольцо многочленов с коэффициентами из K от бесконечного числа переменных X_i ($i \in \mathbf{N}$); пусть $\mathfrak{b}$ — идеал кольца B, порожденный произведениями X_iX_j ($i \neq j$), A — факторкольцо $B/\mathfrak{b}$, ξ_i — класс $\bmod \mathfrak{b}$ ($i \in \mathbf{N}$) элемента X_i, $\mathfrak{p}$ — идеал кольца A, порожденный элементами ξ_i с индексами $i \geqslant 1$, являющийся простым, и u — каноническое отображение $A \to A/\mathfrak{p}$. Показать, что отображение $u_\mathfrak{p}$: $A_\mathfrak{p} \to (A/\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ биективно, но не существует такого элемента $f \in A - \mathfrak{p}$, при котором было бы биективным отображение u_f.

3) Пусть A — кольцо и P — проективный A-модуль конечного типа. Показать, что A изоморфно произведению конечного числа колец $\prod_{i \in I} A_i$, P изоморфен произведению $\prod_{i \in I} P_i$, где P_i является проективным A_i-модулем ранга n_i, причем числа n_i попарно различны (использовать теорему 1 и тот факт, что $\mathrm{Spec}(A)$ является квазикомпактным пространством).

4) Пусть A — кольцо (коммутативное) и B — кольцо (не обязательно коммутативное), содержащее A. Предположим, что левый A-модуль B проективен и имеет конечный тип. Показать, что A является прямым слагаемым в B. (Свести к случаю, когда A — локальное кольцо и применить следствие 1 предложения 5 § 3, n° 2.)

5) Пусть A — редуцированное кольцо и M — некоторый A-модуль конечного типа. Предположим, что существует такое целое $n > 0$, что для всякого гомоморфизма φ из A в некоторое поле K_φ имеет место равенство $[M \otimes_A K_\varphi : K_\varphi] = n$. Показать, что M является проективным модулем ранга n. (Свести к случаю, когда A — локальное кольцо и воспользоваться предложением 7 § 3, n° 2.)

¶ 6) Пусть A — целостное кольцо, K — его поле частных и M — некоторый A-модуль. Показать, что следующие свойства эквивалентны:

α) M — такой проективный A-модуль, что число $[M \otimes_A K : K]$ конечно.

β) M — проективный A-модуль конечного типа.

γ) M — модуль конечного типа и для всякого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A модуль $M_\mathfrak{m}$ над кольцом $A_\mathfrak{m}$ свободен.

(Чтобы показать, что из α) следует β), применить *Algèbre*, chap II, 3e éd., § 5, n° 5, proposition 9. Чтобы показать, как из γ) следует α), надо сначала

заметить, что M — модуль без кручения, и заключить отсюда, что для каждого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A модуль $M_{\mathfrak{p}}$ над кольцом $A_{\mathfrak{p}}$ является свободным и ранг его не зависит от $\mathfrak{p}$.)

7) Пусть A — кольцо (коммутативное), являющееся абсолютно плоским (ср. упражнение 16 § 4), и пусть X — его спектр.

а) Пусть F — замкнутое подмножество в X и $\mathfrak{a}$ — идеал кольца A, соответствующий этому подмножеству (loc. cit.). Показать, что $M = A/\mathfrak{a}$ является моногенным плоским A-модулем, причем $M_{\mathfrak{m}}$ является свободным $A_{\mathfrak{m}}$-модулем для любого $\mathfrak{m} \in X$, однако M проективен лишь тогда, когда множество F открыто.

б) Пусть E — прямая сумма модулей $A/\mathfrak{m}$ для $\mathfrak{m} \in X$. Показать, что E является таким плоским A-модулем, что $E_{\mathfrak{m}}$ есть свободный $A_{\mathfrak{m}}$-модуль ранга 1 при любом $\mathfrak{m} \in X$; для того чтобы E был проективным A-модулем, необходимо и достаточно, чтобы X был конечным (заметить, что $\mathfrak{m}$ является модулем конечного типа, если $A/\mathfrak{m}$ — проективный A-модуль).

8) Пусть A — некоторое кольцо и M — проективный A-модуль ранга n. Показать, что существует такая A-алгебра B (коммутативная) конечного типа, что A-модуль B является строго плоским, а $M_{(B)} = M \otimes_A B$ представляет собой свободный B-модуль ранга n (воспользоваться теоремой 1г) и предложением 3). Верно и обратное.

¶ 9) а) Пусть A — некоторое кольцо, $(f_i)_{i \in I}$ — конечное семейство элементов этого кольца, порождающее идеал A, и M — некоторый A-модуль. Допустим, что в каждом A_{f_i}-модуле M_{f_i} задан элемент z_i таким образом, что при $i \neq j$ канонические образы элемента z_i и элемента z_j в модуле частных $M_{f_i f_j}$ совпадают. Показать, что существует, и притом единственный, элемент $z \in M$, такой, что для каждого индекса i канонический образ элемента z в M_{f_i} равен z_i. (Заметить, что для любого целого $k > 0$ существует семейство $(g_i)_{i \in I}$ таких элементов из A, что $\sum_i g_i f_i^k = 1$.)

б) Пусть A — некоторое кольцо и P — проективный A-модуль ранга 1. Показать, что кольцо $\mathrm{End}_A(P)$ канонически изоморфно кольцу A (воспользоваться теоремой 3).

в) Пусть A — некоторое кольцо и P — проективный A-модуль ранга n. Любому эндоморфизму u модуля P соответствует каноническим образом эндоморфизм $\bigwedge^n u$, а ему, в силу пункта б), соответствует некоторый элемент $\det(u) \in A$, называемый *детерминантом* эндоморфизма u и обладающий следующим свойством: $\det(u \circ v) = \det(u) \cdot \det(v)$ для любых двух эндоморфизмов u, v модуля A. *Характеристическим многочленом* эндоморфизма u называется элемент $\chi_u(T) = \det(T \cdot 1 - u)$ кольца $A[T]$ (ср. n° 3, предложение 4); показать, что многочлен χ_u является унитарным многочленом степени n и что $\chi_u(u) = 0$ (воспользоваться пунктом а) и теоремой 1 из § 3, n. 3). Вывести отсюда, что для биективности эндоморфизма u необходима и достаточна обратимость детерминанта $\det(u)$ в кольце A. Если кольцо A целостное и $\chi_u(T) = \prod_{i=1}^{n} (T - \alpha_i)$ — разложение на линейные множители многочлена χ_u в алгебраически замкнутом расширении поля частных кольца A, то $\chi_{q(u)}(T) = \prod_{i=1}^{n} (T - q(\alpha_i))$ для любого $q \in A[T]$. Обобщить аналогичным образом предложение 14 из *Алгебры*, гл. VII, § 5, n° 6.

10) Пусть A — кольцо и $\boldsymbol{E}(A)$ — множество классов проективных A-модулей конечного типа; пусть G есть $\mathbf{Z}$-модуль формальных линейных комбинаций элементов множества $\boldsymbol{E}(A)$, а N — подмодуль в G, порождеиный элементами

вида $\xi - \xi' - \xi''$, где ξ, ξ', ξ'' являются классами трех проективных A-модулей конечного типа M, M', M'', для которых существует точная последовательность

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

(то же самое можно выразить, сказав, что модуль M изоморфен прямой сумме $M' \bigoplus M''$: это следует из *Algèbre*, chap. II, 3e éd., § 2, n° 2). Пусть $K(A)$ — фактормодуль G/N над кольцом $\mathbf{Z}$, а для любого проективного A-модуля конечного типа M пусть $\varkappa(M)$ (или $\varkappa_A(M)$) обозначает его класс в $K(A)$.

а) Показать, что на модуле $K(A)$ существует, и притом единственная, структура коммутативного кольца, в которой сложение совпадает со сложением в $\mathbf{Z}$-модуле $K(A)$, а умножение таково, что $\varkappa(M)\varkappa(N) = \varkappa(M \otimes_A N)$ для любых двух проективных A-модулей M, N конечного типа; при этом $\varkappa(A)$ служит единичным элементом в $K(A)$.

б) Для любого проективного A-модуля M конечного типа и любого целого числа $p \geqslant 0$ обозначим через $\lambda^p(M)$ элемент $\varkappa(\overset{p}{\bigwedge} M)$ кольца $K(A)$. Показать, что $\lambda^p(M \bigoplus N) = \sum_{r+s=p} \lambda^r(M)\lambda^s(N)$. Обозначим через $\lambda_T(M)$ элемент $\sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p(M) T^p$ кольца $K(A)[[T]]$ формальных степенных рядов от одной переменной над кольцом $K(A)$; показать, что $\lambda_T(M \bigoplus N) = \lambda_T(M) \cdot \lambda_T(N)$. Получить отсюда гомоморфизм, по-прежнему обозначаемый через $x \to \lambda_T(x)$, кольца $K(A)$ в мультипликативную группу тех степенных рядов из $K(A)[[T]]$, свободный член которых равен 1. Будем обозначать через $\lambda^p(x)$ коэффициент при T^p ряда $\lambda_T(x)$; в этих обозначениях

$$\lambda^p(x+y) = \sum_{r+s=p} \lambda^r(x)\lambda^s(y)$$

для x, y из $K(A)$.

в) Если A — локальное кольцо, то кольцо $K(A)$ каноническим образом отождествляется с $\mathbf{Z}$ и $\lambda^p(n) = \binom{n}{p}$. Вывести отсюда, что если A представляет собой прямое произведение m локальных колец, то $K(A)$ изоморфно $\mathbf{Z}^m$.

г) Пусть $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм колец. Показать, что существует, и притом единственный, гомоморфизм $\varphi^!\colon K(A) \to K(B)$, при котором $\varphi^!(\varkappa_A(M)) = \varkappa_B(M_{(B)})$ для любого проективного A-модуля конечного типа M; кроме того, $\varphi^!(\lambda^p(x)) = \lambda^p(\varphi^!(x))$ для всякого $x \in K(A)$. Если $\psi\colon B \to C$ — второй гомоморфизм колец, то $(\psi \circ \varphi)^! = \psi^! \circ \varphi^!$.

д) Пусть $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм колец, при котором B превращается в проективный A-модуль конечного типа. Тогда для любого проективного B-модуля конечного типа N модуль $\varphi_*(N)$ является проективным A-модулем конечного типа. Вывести отсюда, что существует такой гомоморфизм $\mathbf{Z}$-модулей $\varphi_!\colon K(B) \to K(A)$, что $\varphi_!(\varkappa_B(N)) = \varkappa_A(\varphi_*(N))$. Показать, что для любых $x \in K(A)$ и $y \in K(B)$ имеет место равенство $\varphi_!(y \cdot \varphi^!(x)) = \varphi_!(y) \cdot x$. Если $\psi\colon B \to C$ — другой гомоморфизм колец, при котором C превращается в проективный B-модуль конечного типа, то $(\psi \circ \varphi)_! = \varphi_! \circ \psi_!$.

11) Пусть K — поле характеристики $\neq 2$; рассмотрим многочлен $g(X) \in K[X]$ степени $\geqslant 2$, все корни которого различны (в алгебраически замкнутом расширении поля K) и для которого $g(0) \neq 0$. Положим $B = K[X]$, $A = B[Y]/(Y^2 - f(x))$, где $f(X) = Xg(X)$.

а) Пусть y — класс элемента Y в кольце A. Показать, что всякий элемент $a \in A$ единственным образом записывается в виде $a = P + yQ$, где P и Q лежат в B. Пусть $\bar{a} = P - yQ$, $N(a) = a\bar{a} = P^2 - fQ^2$. Показать, что из

соотношения $N(a) = 0$ следует равенство $a = 0$; вывести отсюда, что A — целостное кольцо. Показать, что обратимыми элементами в A являются только отличные от 0 элементы из K.

б) Пусть $\mathfrak{m}$ — идеал $Ax + Ay$ кольца A; показать, что $\mathfrak{m}$ максимален и что идеал $\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}$ кольца частных $A_{\mathfrak{m}}$ порождается элементом y (заметить, что $X = y^2/g(X)$). Вывести отсюда, что $\mathfrak{m}$ является обратимым A-модулем (воспользоваться теоремой 1). Показать, что $\mathfrak{m}^2 = AX$; вывести отсюда, что $\mathfrak{m}$ не является главным идеалом в A и что группа классов обратимых A-модулей в поле частных кольца A не равна по этой причине нейтральному элементу. (Если бы $\mathfrak{m} = At$, то выполнялось бы равенство $X = \lambda t^2$, в котором $\lambda \in K$, откуда следовало бы, что $\lambda^{-1}X = P^2 + fQ^2$ при $P \in B$ и $Q \in B$; показать, что такое соотношение невозможно.)

¶ 12) Пусть A — некоторое кольцо, I — какой-либо A-модуль, а B — то однозначно определенное кольцо, аддитивная группа которого представляет собой прямую сумму аддитивных групп $A \bigoplus I$, в котором A является подкольцом, а I — идеалом с нулевым квадратом, на котором структура A-модуля, получаемая ограничением скаляров, совпадает с исходной (*Algèbre*, chap. II, 3e éd., § 1, exercice 7).

а) Предположим, что всякий необратимый элемент из A принадлежит аннулятору некоторого ненулевого элемента из I. Показать, что в кольце B любой элемент, не являющийся делителем нуля, обратим, или, иначе говоря, что B равно своему полному кольцу частных.

б) Пусть $(\mathfrak{m}_\lambda)_{\lambda \in L}$ — такое семейство максимальных идеалов кольца A, что всякий необратимый элемент из A принадлежит по крайней мере одному идеалу $\mathfrak{m}_\lambda$. Показать, что если в качестве модуля I взять прямую сумму A-модулей $A/\mathfrak{m}_\lambda$, то условие а) удовлетворяется.

в) Получить из пункта б), что если существует проективный A-модуль ранга 1, не являющийся свободным, то можно определить модуль I таким образом, чтобы B было равно своему полному кольцу частных и чтобы существовал проективный B-модуль ранга 1, не являющийся свободным (этот модуль не может быть изоморфен обратимому подмодулю в B, так как B является единственным своим невырожденным подмодулем).

г) Пусть в A существует такой максимальный идеал $\mathfrak{m}$, что для всякого $x \in \mathfrak{m}$ имеется максимальный идеал $\mathfrak{m}' \neq \mathfrak{m}$ в кольце A, содержащий x. Если в качестве модуля I взять прямую сумму модулей $A/\mathfrak{m}'$, где $\mathfrak{m}'$ пробегает множество максимальных идеалов кольца A, отличных от $\mathfrak{m}$, то кольцо $B = A \bigoplus I$ оказывается равным своему полному кольцу частных; положив $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \bigoplus I$ (это будет максимальный идеал в B), показать, что кольцо частных $B_{\mathfrak{n}}$ изоморфно кольцу частных $A_{\mathfrak{m}}$; если A — целостное кольцо (обязательно не поле), то $B_{\mathfrak{n}}$ представляет собой, следовательно, целостное кольцо, отличное от своего поля частных. Показать, что если, кроме того, $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ — главный идеал в $A_{\mathfrak{m}}$, то идеал $\mathfrak{m}B = \mathfrak{m} \otimes_A B$ кольца B является несвободным вырожденным проективным B-модулем ранга 1. (В гл. VII будет показано, что существуют дедекиндовы кольца, в которых имеются такие максимальные идеалы $\mathfrak{m}$, что любая их степень не является главным идеалом; для такого кольца все приведенные выше предположения выполняются.)

¶ 13) Пусть A — кольцо (коммутативное) и B — некоторая A-алгебра (не обязательно коммутативная). Предположим, что A-модуль B является точным и порождается конечным числом элементов b_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; напомним, что через B° обозначается алгебра, противоположная алгебре B, и что может быть определен канонический гомоморфизм из A-алгебры $B \otimes_A B^\circ$ в A-алгебру $\mathrm{End}_A(B)$, если элементу $b \otimes b'$ сопоставить эндоморфизм $z \to bzb'$.

а) Показать, что следующие два условия эквивалентны:

α) элементы b_i образуют базис A-модуля B и канонический гомоморфизм $B \otimes_A B^\circ \to \mathrm{End}_A(B)$ биективен;

β) матрица $U = (u_{ij})$, в которой $u_{ij} = b_j b_i$, обратима в $\mathbf{M}_n(B)$.

б) Предположим в добавление к сказанному, что A — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$; через β_i будем обозначать канонические образы элементов b_i в $B/\mathfrak{m}B$. Показать, что в этом случае условия α) и β) эквивалентны каждому из следующих условий:

γ) Элементы β_i образуют базис $A/\mathfrak{m}$-модуля $B/\mathfrak{m}B$ и $B/\mathfrak{m}B$ является простой центральной $A/\mathfrak{m}$-алгеброй (*Алгебра*, гл. VIII, § 5, n° 4).

δ) Матрица $(\beta_j\beta_i)$ обратима в кольце $\mathbf{M}_n(B/\mathfrak{m}B)$.

(Для доказательства того, что из б) следует β), надо воспользоваться тем фактом, что $\mathfrak{m}B$ содержится в радикале кольца B, а также упражнением 5 из *Алгебры*, гл. VIII, § 6.)

14) Пусть A — некоторое (коммутативное) кольцо и B — такая A-алгебра, что A-модуль B точен и конечно представим. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) Для всякого максимального идеала $\mathfrak{m}$ из A алгебра $B/\mathfrak{m}B$ над кольцом $A/\mathfrak{m}$ проста и центральна.

β) B представляет собой проективный A-модуль, и если через B° обозначена противоположная алгебра, то канонический гомоморфизм $B \otimes_A B^\circ \to \mathrm{End}_A(B)$ биективен.

(Свести к случаю, когда A — локальное кольцо и применить упражнение 13.)

В этом случае говорят, что B является *алгеброй Адзумайя* над кольцом A.

¶ 15) Пусть B — некоторая A-алгебра Адзумайя (упражнение 14).

а) Показать, что центр алгебры B совпадает с подкольцом A алгебры B и является прямым слагаемым A-модуля B (ср. гл. 1, § 2, упражнение 21, и гл. II, § 5, упражнение 4).

б) Показать, что для всякого двустороннего идеала $\mathfrak{b}$ кольца B справедливо равенство $\mathfrak{b} = (\mathfrak{b} \cap A)B$. (Сначала надо заметить, что идеал $\mathfrak{b}$ устойчив относительно любого эндоморфизма A-модуля B, и воспользоваться существованием проекции модуля B на A.)

16 а) Пусть A — некоторое (коммутативное) кольцо, A' — коммутативная A-алгебра, являющаяся плоским A-модулем, и B — любая A-алгебра. Показать, что если B является алгеброй Адзумайя, то таковой же является и A'-алгебра $B' = A' \otimes_A B$; обратное верно, если предположить, что A' является строго плоским A-модулем (ср. *Algebre*, chap. II, 3e éd., § 5, n° 1, corollaire de la proposition 4, и *Коммутативная алгебра*, гл. I, § 2, n° 9, предложение 10, и § 3, n° 6, предложение 12).

б) Показать, что тензорное произведение $B \otimes_A C$ двух алгебр Адзумайя над кольцом A снова является A-алгеброй Адзумайя (ср. *Алгебра*, гл. VIII, § 7, n° 4, следствие 2 теоремы 2).

¶ 17) Пусть A — некоторое кольцо, P — точный проективный A-модуль конечного типа.

а) Показать, что A-алгебра $B = \mathrm{End}_A(P)$ является A-алгеброй Адзумайя. (Заметить, сначала, что A-модуль B изоморфен $P \otimes_A P^*$; следовательно, он конечно представим; затем воспользоваться предложением 19 § 2, n° 7.)

б) Показать, что P — проективный левый B-модуль (воспользоваться теоремой 1г) и упражнением 8в) из § 3).

в) Пусть P' — другой точный проективный A-модуль конечного типа. Показать, что $P \otimes_A P'$ представляет собой точный проективный A-модуль конечного типа и что $\mathrm{End}_A(P \otimes_A P')$ можно канонически отождествить с $\mathrm{End}_A(P) \otimes_A \mathrm{End}_A(P')$ (воспользоваться теоремой 1д); кроме того, применить предложения 18 и 19 § 2, n° 7, и теорему 1 § 3). Рассмотреть специально случай, когда P' имеет ранг 1.

¶ 18) Пусть A — кольцо, P — точный проективный A-модуль конечного типа, B — A-алгебра $\mathrm{End}_A(P)$, E — некоторый левый B-модуль и F — A-мо-

дуль $\mathrm{Hom}_B(P, E)$. Показать, что канонический гомоморфизм

$$\beta: P \otimes_A F \to E,$$

определенный в *Алгебре,* гл. VIII, § 1, n° 4, биективен. (Свести к случаю, когда A — локальное кольцо, подобно тому, как это делалось в упражнении 17в); в этой ситуации применить упражнение 9 из *Алгебры,* гл. VIII, § 1, с учетом того, что A-модули F^n и $\mathrm{Hom}_B(P, E^n)$ канонически изоморфны.)

Показать, что существует биективное строго возрастающее отображение множества A-подмодулей модуля F на множество B-подмодулей модуля E (метод тот же).

¶ 19) Пусть A — кольцо, B и C — две A-алгебры и $\varphi: B \to C$ — гомоморфизм A-алгебр. Предположим, что B является алгеброй Адзумайя (упражнение 14). Пусть C' есть A-подалгебра в C, порожденная элементами, коммутирующими с элементами из $\varphi(B)$. Показать, что алгебра C изоморфна алгебре $B \otimes_A C'$. (Рассмотреть C как $B \otimes_A B^0$-модуль и применить упражнение 18, имея в виду, что $B \otimes_A B^0$ изоморфна $\mathrm{End}_A(B)$.)

¶ 20) Пусть A — некоторое кольцо и P, P' — два проективных A-модуля конечного типа. Показать, что если $\theta: \mathrm{End}_A(P) \to \mathrm{End}_A(P')$ является изоморфизмом A-алгебр, то существуют проективный A-модуль F ранга 1 и A-изоморфизм $\varphi: P' \to P \otimes_A F$, такие, что $\theta(u) = \varphi^{-1} \circ (u \times 1) \circ \varphi$ для всех $u \in \mathrm{End}_A(P)$. (Применить упражнение 18 к случаю $E = P'$, рассматривая его как $(\mathrm{End}_A(P))$-модуль относительно θ; для того чтобы доказать, что $\mathrm{Hom}_B(P, P')$ является проективным A-модулем ранга 1, надо воспользоваться теоремой 2 n° 3, а также упражнением 7в) из *Алгебры,* гл. VIII, § 5.)

¶ 21) Пусть A — кольцо и n — некоторое целое число $\geqslant 0$.

а) Показать, что A-модули F, для которых F^n изоморфно A^n, проективны и имеют ранг 1 и что их классы в $\boldsymbol{P}(A)$ образуют подгруппу $\boldsymbol{P}_n(A)$, каждый элемент которой аннулируется числом n. (Чтобы доказать первое утверждение, надо воспользоваться предложением 5 из § 2, n° 2; для доказательства второго надо обратить внимание на то, что $\bigwedge^n F^n$ и $\bigotimes^n F$ канонически изоморфны.)

б) Пусть $\mathrm{Aut}_n(A)$ — группа автоморфизмов A-алгебры матриц $\mathbf{M}_n(A)$, и пусть $\mathrm{Int}_n(A)$ — подгруппа внутренних автоморфизмов алгебры $\mathbf{M}_n(A)$. Показать, что факторгруппа $\mathrm{Aut}_n(A)/\mathrm{Int}_n(A)$ изоморфна группе $\boldsymbol{P}_n(A)$ (воспользоваться упражнением 20 для $P = P' = A^n$ или упражнением 9 из *Алгебры,* гл. VIII, § 1). Вывести отсюда, что если A — полулокальное кольцо или кольцо главных идеалов, то $\mathrm{Aut}_n(A) = \mathrm{Int}_n(A)$.

в) Показать, что если A — дедекиндово кольцо, то $\boldsymbol{P}_n(A)$ совпадает с подгруппой в $\boldsymbol{P}(A)$, образованной теми элементами, которые аннулируются числом n.

¶ 22) Пусть A — кольцо и M — проективный A-модуль конечного типа. Для того чтобы конечно представимый подмодуль M' модуля M был прямым слагаемым в M, необходимо и достаточно, чтобы он был чистым подмодулем в M (воспользоваться теоремой 1, а также упражнением 15 § 3).

23) Пусть A — некоторое кольцо и $(f_i)_{i \in I}$ — конечное семейство элементов в нем, которое порождает идеал A.

а) Пусть M — некоторый A-модуль. Показать, что если для каждого $i \in I$ модуль M_{f_i} является A_{f_i}-модулем конечного типа, то M является A-модулем конечного типа.

б) Пусть B — некоторая A-алгебра (коммутативная). Показать, что если для любого $i \in I$ модуль B_{f_i} является A_{f_i}-алгеброй конечного типа, то и B является A-алгеброй конечного типа.

24) Пусть A — такое кольцо, что пространство $\mathrm{Spec}(A)$ связно.

а) Если M — любой проективный A-модуль ранга n, то всякое прямое слагаемое N модуля M, отличное от нуля, имеет ранг $\leqslant n$.

б) Пусть u — такой гомоморфизм проективного A-модуля M конечного ранга в проективный A-модуль M' конечного ранга, что $u(M)$ является прямым слагаемым в M'. Показать, что $\mathrm{Ker}(u)$ в этом случае является прямым слагаемым модуля M (ср. упражнение 23) и что

$$\mathrm{rg}\,(\mathrm{Ker}\,(u)) + \mathrm{rg}\,(\mathrm{Im}\,(u)) = \mathrm{rg}\,(M).$$

Кроме того, транспонированный гомоморфизм ${}^t u$ таков, что ${}^t u(M'^*)$ является прямым слагаемым модуля M^* и $\mathrm{rg}({}^t u(M'^*)) = \mathrm{rg}(u(M))$ (ср. § 3, упражнение 14а)).

25) Пусть A — кольцо и S — некоторая мультипликативная система в нем. Говорят, что идеал $\mathfrak{a}$ кольца A является S-обратимым, если существуют элемент $s \in S$ и идеал $\mathfrak{b}$ из A, для которых $\mathfrak{ab} = As$; говорят, что два идеала $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ кольца A S-эквивалентны, если существуют элементы s, t в S, для которых $s\mathfrak{a} = t\mathfrak{b}$. Показать, что классы S-эквивалентности S-обратимых идеалов кольца A образуют группу по умножению $\mathfrak{C}_S$. Если система S насыщена (§ 2, упражнение 2) и если всякий элемент из S не является делителем нуля в A, то доказать, что группа $\mathfrak{C}_S$ изоморфна группе классов обратимых $S^{-1}A$-подмодулей полного кольца частных B кольца A (и кольца $S^{-1}A$).

ГЛАВА III[1])

ГРАДУИРОВКИ, ФИЛЬТРАЦИИ И ТОПОЛОГИИ

Предполагается, что все кольца, рассматриваемые в этой главе, обладают единицей, что при гомоморфизмах колец единица переходит в единицу. Под подкольцом кольца A подразумевается лишь такое подкольцо, которое содержит единицу кольца A. Если не оговорено противное, то рассматриваемые модули предполагаются левыми.

§ 1. Градуированные алгебры конечного типа

1. Системы образующих коммутативной алгебры

Пусть A — коммутативное кольцо и B — коммутативная алгебра над ним. Напомним (*Алгебра*, гл. IV, § 2, n° 1), что если $x=(x_\iota)_{\iota\in I}$ — некоторое семейство элементов из B, то отображение $f\to f(x)$ алгебры многочленов $A[X_\iota]_{\iota\in I}$ в алгебру B является гомоморфизмом алгебры $A[X_\iota]_{\iota\in I}$ на подалгебру алгебры B, порожденную элементами x_ι; ядро $\mathfrak{a}$ этого гомоморфизма состоит из таких многочленов f, что $f(x)=0$; оно называется *идеалом алгебраических соотношений (с коэффициентами в кольце A) между элементами x_ι*.

Определение 1. *Говорят, что семейство элементов $(x_\iota)_{\iota\in I}$ коммутативной алгебры B над коммутативным кольцом A алгебраически свободно над A (или что элементы x_ι алгебраически независимы над A), если идеал алгебраических соотношений с коэффициентами в A между элементами x_ι равен нулю. Семейство (x_ι), не являющееся алгебраически свободным над A, называют алгебраически связанным над A (или говорят также, что его элементы алгебраически зависимы над A).*

Это определение является обобщением определения 1 из *Алгебры*, гл. V, § 5, в котором речь шла об элементах поля.

Высказывание о том, что некоторое семейство $(x_\iota)_{\iota\in I}$ алгебраически свободно над кольцом A, равносильно утверждению

[1]) За исключением § 5, в котором используются результаты из гл. I, § 4, и по этой причине результаты гомологической алгебры, материал настоящей главы не опирается ни на какую другую книгу второй части.

о линейной независимости над A одночленов $\prod_\iota x_\iota^{n_\iota}$ от элементов x_ι; в частности, при этих обстоятельствах сами элементы x_ι линейно независимы над A.

Определение 2. *Коммутативная алгебра B над коммутативным кольцом A называется алгеброй конечного типа, если она порождается конечным семейством элементов.*

Это эквивалентно утверждению о том, что алгебра B изоморфна некоторой A-алгебре вида $A[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$ (где X_i — переменные и $\mathfrak{a}$ — некоторый идеал кольца многочленов $A[x_1, \ldots, X_n]$).

Если A-алгебра B является *A-модулем конечного типа*, то, очевидно, она представляет собой и A-алгебру конечного типа. Обратное неверно, в чем можно убедиться на примере алгебр многочленов (ср. гл. V).

Если B — некоторая A-алгебра конечного типа и A' — произвольная коммутативная A-алгебра, то тензорное произведение $B_{(A')} = B \otimes_A A'$ представляет собой A'-алгебру конечного типа, так как если семейство $(x_\iota)_{\iota \in I}$ служит системой образующих A-алгебры B, то совершенно ясно, что элементы $x_\iota \otimes 1$ составляют систему образующих A'-алгебры $B_{(A')}$.

Если B — некоторая A-алгебра конечного типа и C — некоторая B-алгебра конечного типа, то конечный тип имеет и A-алгебра C; в самом деле, из определений немедленно следует, что если $(b_\lambda)_{\lambda \in L}$ — система образующих A-алгебры B, а $(c_\mu)_{\mu \in M}$ — система образующих B-алгебры C, то каждый элемент из C равен некоторому многочлену с коэффициентами из A от элементов b_λ и c_μ.

2. Критерии конечности для градуированных колец

В этом и последующих n° *предполагается, что все рассматриваемые градуировки* (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 11) [1]) *являются градуировками типа* $\mathbf{Z}$. *Если A* (соответственно M) — *градуированное кольцо* (соответственно *градуированный модуль*), *то через A_i* (соответственно M_i) *обозначается множество однородных элементов степени i из A* (соответственно из M).

Если $A_i = \{0\}$ (соответственно $M_i = \{0\}$) при $i < 0$, то кратности ради говорят, что A (соответственно M) является *коль-*

[1]) См. также *Алгебра*, гл. IV, § 1, n° 3 (петит в конце). — *Прим. перев.*

цом (соответственно *модулем*), *градуированным по положительным степеням.*

Предложение 1. *Пусть* $A = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} A_i$ — *коммутативное кольцо, градуированное по положительным степеням,* $\mathfrak{m}$ — *градуированный идеал* $\bigoplus_{i \geqslant 1} A_i$, $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ — *некоторое семейство однородных элементов из* A, *имеющих степени* $\geqslant 1$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *идеал кольца* A, *порожденный элементами* (x_λ), *равен* $\mathfrak{m}$;

б) *семейство* (x_λ) *является системой образующих* A_0*-алгебры* A;

в) *для любого* $i \geqslant 0$ *модуль* A_i *над кольцом* A_0 *порождается элементами вида* $\prod_\lambda x_\lambda^{n_\lambda}$, *имеющими степень* i *в* A.

Очевидно, что условия б) и в) эквивалентны. Если они выполнены, то каждый элемент идеала $\mathfrak{m}$ имеет вид $f((x_\lambda))$, где f — некоторый многочлен из $A_0[X_\lambda]_{\lambda \in L}$, не имеющий свободного члена. Следовательно, $\mathfrak{m} = \sum_{\lambda \in L} A x_\lambda$, тем самым доказано, что из в) следует а). Обратно, предположим, что выполнено условие а). Пусть $A' = A_0[x_\lambda]_{\lambda \in L}$ — подалгебра A, порожденная элементами (x_λ); покажем, что $A' = A$. Для этого достаточно показать, что для любого $i \geqslant 0$ имеет место включение $A_i \subset A'$. Проведем индукцию по i. Для $i = 0$ требуемое свойство очевидно. Пусть, таким образом, $y \in A_i$ при $i \geqslant 1$. Так как $y \in \mathfrak{m}$, то существует такое семейство $(a_\lambda)_{\lambda \in L}$ элементов из A, носитель которого конечен и для которого $y = \sum_\lambda a_\lambda x_\lambda$. Каждый из элементов a_λ можно считать однородным степени $i - \deg(x_\lambda)$ (при необходимости его надо заменить однородной компонентой этой степени); поскольку $\deg(x_\lambda) > 0$, то предположение индукции показывает, что $a_\lambda \in A'$ для всех $\lambda \in L$, откуда $y \in A'$ и $A_i \subset A'$. Этим доказано, что из а) следует б).

Следствие. *Пусть* $A = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} A_i$ — *коммутативное кольцо, градуированное по положительным степеням и* $\mathfrak{m}$ — *его градуированный идеал* $\bigoplus_{i \geqslant 1} A_i$.

(i) *Следующие условия эквивалентны:*

а) *идеал* $\mathfrak{m}$ *является* A*-модулем конечного типа;*

б) *кольцо* A *является* A_0*-алгеброй конечного типа.*

(ii) *Предположим, что выполнены условия* (i), *и пусть* $M = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} M_i$ — *некоторый градуированный* A*-модуль конечного типа. Тогда для любого индекса* $i \in \mathbf{Z}$ *группа* M_i *является*

A_0-модулем конечного типа и существует такой индекс i_0, что $M_i = \{0\}$ для $i < i_0$.

(i) Если некоторое семейство (y_μ) элементов кольца A служит системой образующих A-модуля $\mathfrak{m}$ (соответственно A_0-алгебры A), то тем же свойством обладает и семейство, образованное однородными компонентами элементов y_μ; эквивалентность условий а) и б) следует, таким образом, из предложения 1.

(ii) Можно предположить, что кольцо A порождено (как A_0-алгебра) однородными элементами a_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ степеней $\geqslant 1$, а M порожден (как A-модуль) однородными элементами x_j $(1 \leqslant j \leqslant s)$. Пусть $h_i = \deg(a_i)$ и $k_j = \deg(x_j)$. Ясно, что группа M_n образована линейными комбинациями с коэффициентами в A_0 элементов $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_r^{\alpha_r} x_j$, в которых α_i — целые числа $\geqslant 0$, удовлетворяющие соотношению $k_j + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i h_i = n$; для каждого числа n существует только конечное число семейств $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$, удовлетворяющих этим условиям, так как $h_i \geqslant 1$ для любого i. Отсюда мы заключаем, что группа M_n является A_0-модулем конечного типа, и, кроме того, теперь становится очевидным тот факт, что $M_n = \{0\}$, когда $n < \inf_j (k_j)$.

3. Свойства кольца $A^{(d)}$

Пусть $A = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} A_i$ — градуированное кольцо и $M = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} M_i$ — некоторый градуированный A-модуль. Для любой пары целых чисел (d, k), удовлетворяющих условиям $d \geqslant 1$ и $0 \leqslant k \leqslant d-1$, положим

$$A^{(d)} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} A_{id}, \qquad M^{(d,\,k)} = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} M_{id+k}.$$

Совершенно очевидно, что $A^{(d)}$ является градуированным подкольцом кольца A, а $M^{(d,\,k)}$ — градуированным $A^{(d)}$-модулем. Кроме того, если N — градуированный подмодуль модуля M, то $N^{(d,\,k)}$ служит градуированным $A^{(d)}$-подмодулем модуля $M^{(d,\,k)}$. Мы будем писать $M^{(d)}$ вместо $M^{(d,\,0)}$; для любого целого числа $d \geqslant 1$ модуль M является прямой суммой $A^{(d)}$-модулей $M^{(d,\,k)}$ $(0 \leqslant k \leqslant d-1)$.

Предложение 2. *Пусть $A = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} A_i$ — коммутативное кольцо, градуированное по положительным степеням, и $M = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} M_i$ — градуированный A-модуль. Предположим, что кольцо A является*

A_0-алгеброй конечного типа, а M представляет собой A-модуль конечного типа. Тогда для любой пары целых чисел (d, k), удовлетворяющих условиям $d \geqslant 1$ и $0 \leqslant k \leqslant d-1$, имеем:

(i) *Кольцо $A^{(d)}$ является A_0-алгеброй конечного типа.*

(ii) *Модуль $M^{(d,\,k)}$ является $A^{(d)}$-модулем конечного типа.*

Покажем, что A является *$A^{(d)}$-модулем конечного типа*. Пусть $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant s}$ — некоторая система образующих A_0-алгебры A, составленная из однородных элементов. Элементы кольца A (которых конечное число), имеющие вид $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_s^{\alpha_s}$, где $0 \leqslant \alpha_i < d$ для $1 \leqslant i \leqslant s$, составляют систему образующих $A^{(d)}$-модуля A: в самом деле, для любой системы целых чисел $n_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ имеются такие положительные целые числа q_i, r_i, что $n_i = q_i d + r_i$, причем $r_i < d$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$; поэтому

$$a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_s^{n_s} = \left(a_1^{q_1} \dots a_s^{q_s}\right)^d \left(a_1^{r_1} \dots a_s^{r_s}\right),$$

что и доказывает наше утверждение, так как $x^d \in A^{(d)}$ для всякого однородного элемента $x \in A$. Следовательно, если A-модуль M имеет конечный тип, то он имеет конечный тип и как $A^{(d)}$-модуль. Поскольку M представляет собой *прямую* сумму модулей $M^{(d,\,k)}$ $(0 \leqslant k \leqslant d-1)$, каждый $M^{(d,\,k)}$ есть $A^{(d)}$-модуль конечного типа, что и доказывает (ii).

Применив сказанное к градуированному A-модулю $\mathfrak{m} = \bigoplus_{i \geqslant 1} A_i$, который является модулем конечного типа, в силу следствия предложения 1 n° 2, получим, что $\mathfrak{m}^{(d)}$ является $A^{(d)}$-модулем конечного типа. Значит (n° 2, следствие предложения 1), кольцо $A^{(d)}$ является A_0-алгеброй конечного типа.

Лемма 1. *Пусть A — такое градуированное коммутативное кольцо, что $A = A_0[A_1]$, пусть M — градуированный A-модуль и $(y_\lambda)_{\lambda \in L}$ — система однородных образующих в M, для которых $\deg(y_\lambda) \leqslant n_0$ при любом $\lambda \in L$. Тогда для любых $n \geqslant n_0$ и $k \geqslant 0$ имеет место равенство $M_{n+k} = A_k M_n$.*

Пусть $n \geqslant n_0$, и пусть $x \in M_{n+1}$. Так как элементы y_λ порождают модуль M, то существует некоторое семейство $(a_\lambda)_{\lambda \in L}$ элементов кольца A, имеющее конечный носитель и удовлетворяющее равенству $x = \sum_\lambda a_\lambda y_\lambda$. Можно считать, что каждый из коэффициентов a_λ однороден и имеет степень $n + 1 - \deg(y_\lambda)$ (при необходимости можно элемент a_λ заменить его однородной компонентой этой степени). Поскольку $A = A_0[A_1]$ и $\deg(a_\lambda) > 0$, каждый из элементов a_λ является суммой элементов вида bb', где $b \in A_1$ и $b' \in A$, откуда следует, что $x \in A_1 M_n$. Значит, $M_{n+1} = A_1 M_n$, а потому и $M_{n+k} = A_k M_n$, что устанавливается индукцией по k.

Лемма 2. *Пусть A — градуированное коммутативное кольцо, удовлетворяющее условию $A = A_0[A_1]$, и пусть $S = \bigoplus_{i \geqslant 0} S_i$ — некоторая градуированная по положительным степеням коммутативная A-алгебра, являющаяся A-модулем конечного типа. Тогда существует такое целое число $n_0 \geqslant 0$, что*

(i) *для $n \geqslant n_0$ и $k \geqslant 0$ справедливо равенство $S_{n+k} = S_k \cdot S_n$;*

(ii) *для $d \geqslant n_0$ имеет место равенство $S^{(d)} = S_0[S_d]$.*

В силу леммы 1, существует такое целое число $n_0 \geqslant 0$, что для $n \geqslant n_0$ и $k \geqslant 0$ справедливо равенство $S_{n+k} = A_k S_n$, откуда следует, что *тем более* $S_{n+k} = S_k S_n$. Этим доказывается (i). Для $d \geqslant n_0$ и $m > 0$ в таком случае имеем $S_{md} = (S_d)^m$, в чем можно убедиться индукцией по m с помощью утверждения (i). Этим установлено утверждение (ii).

Предложение 3. *Пусть $R = \bigoplus_{i \geqslant 0} R_i$ — коммутативное кольцо, градуированное по положительным степеням и являющееся R_0-алгеброй конечного типа. Тогда существует такое целое число $e \geqslant 1$, что $R^{(me)} = R_0[R_{me}]$ для любого $m \geqslant 1$.*

Пусть $(x_j)_{1 \leqslant j \leqslant s}$ — система однородных образующих R_0-алгебры R, степени которых не меньше единицы. Пусть $h_j = \deg(x_j)$, пусть q — общее кратное чисел h_j, и пусть $q_j = q/h_j$ для $1 \leqslant j \leqslant s$. Таким образом, элементы $x_j^{q_j}$ имеют степень q. Пусть B есть R_0-подалгебра кольца R, порожденная элементами $x_j^{q_j}$; она представляет собой градуированную подалгебру в R и $B_i = 0$, если число i не кратно q. Пусть A (соответственно S) — градуированное кольцо, которое как обычное кольцо совпадает с B (соответственно с $R^{(q)}$) и в котором градуировка задается равенствами $A_i = B_{iq}$ (соответственно $S_i = R_{iq}$). Согласно определению кольца B, имеет место равенство $A = A_0[A_1]$. Рассмотрим элементы из R (их конечное число) вида $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_s^{\alpha_s}$, где $0 \leqslant \alpha_j < q_j$ и $\alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_s h_s \equiv 0 \pmod{q}$; мы покажем, что они порождают B-модуль $R^{(q)}$. Достаточно доказать, что любой элемент из $R^{(q)}$, имеющий вид $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_s^{n_s}$, представляет собой B-линейную комбинацию вышеупомянутых элементов. Действительно, существуют положительные целые числа k_j, r_j, удовлетворяющие равенствам $n_j = k_j q_j + r_j$, причем $r_j < q_j$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$; следовательно,

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_s^{n_s} = \left(x_1^{q_1}\right)^{k_1} \left(x_2^{q_2}\right)^{k_2} \dots \left(x_s^{q_s}\right)^{k_s} \cdot \left(x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_s^{r_s}\right),$$

и, согласно предположению, $\sum_{j=1} n_j h_j \equiv 0 \pmod{q}$, так что $\sum_{j=1} r_j h_j \equiv 0 \pmod{q}$; поскольку элементы $x_j^{q_j}$ принадлежат кольцу

B по своему определению, наше утверждение доказано. Далее, так как S представляет собой A-модуль конечного типа, то можно применить лемму 2: существует такое n_0, что для $d \geqslant n_0$ имеет место равенство $S^{(d)} = S_0[S_d]$ и, следовательно, $R^{(qd)} = R_0[R_{qd}]$ для $d \geqslant n_0$. Предложение получается теперь, если положить $e = qn_0$.

4. *Градуированные простые идеалы*

Пусть $A = \bigoplus_{i \geqslant 0} A_i$ — коммутативное кольцо, градуированное по *положительным степеням*, и $\mathfrak{m}$ — градуированный идеал $\bigoplus_{i \geqslant 1} A_i$; мы будем говорить, что два градуированных идеала $\mathfrak{a} = \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathfrak{a}_i$ и $\mathfrak{b} = \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathfrak{b}_i$ кольца A *эквивалентны*, если существует такое целое число n_0, что $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{b}_n$ при $n \geqslant n_0$ (очевидно, что это и в самом деле отношение эквивалентности). О градуированном идеале, не эквивалентном идеалу $\mathfrak{m}$, принято говорить, что он является *существенным*.

Предложение 4. *Пусть* $\mathfrak{p} = \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathfrak{p}_i$ — *градуированный идеал кольца* A; *для того чтобы он был простым, необходимо и достаточно, чтобы* $xy \notin \mathfrak{p}$ *для любых двух элементов* $x \in A_m$, $y \in A_n$, *не принадлежащих* $\mathfrak{p}$.

Очевидно, это условие необходимо. Наоборот, если оно выполнено, то в градуированном кольце $A/\mathfrak{p} = \bigoplus_{i \geqslant 0} A_i/\mathfrak{p}_i$ произведение двух однородных элементов, отличных от нуля, само отлично от нуля, так что факторкольцо $A/\mathfrak{p}$ является целостным (*Algébre*, chap. II, 3e ed., § 11, n° 4, proposition 7).

Предложение 5. *Пусть* $\mathfrak{a} = \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathfrak{a}_i$ — *некоторый градуированный идеал кольца* A *и* n_0 — *некоторое целое число* > 0. *Для того чтобы существовал такой градуированный простой идеал* $\mathfrak{p} = \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathfrak{p}_i$, *что* $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{a}_n$ *при* $n \geqslant n_0$, *необходимо и достаточно, чтобы для любой пары однородных элементов* x, y *степеней* $\geqslant n_0$ *из включения* $xy \in \mathfrak{a}$ *следовало либо включение* $x \in \mathfrak{a}$, *либо включение* $y \in \mathfrak{a}$. *Если существует такое целое* $n \geqslant n_0$, *что* $\mathfrak{a}_n \neq A_n$, *то градуированный простой идеал, удовлетворяющий перечисленным выше условиям, единствен.*

Сформулированное условие, очевидно, необходимо. Если $\mathfrak{a}_n = A_n$ для любого $n \geqslant n_0$, то ясно, что всякий простой идеал, содержащий идеал $\mathfrak{m}$, является градуированным и отвечает поставленным условиям. Таким образом, может быть несколько градуированных простых идеалов, обладающих требуемыми

свойствами. Однако любые два такие идеала, очевидно, эквивалентны, поэтому предположим, что существует некоторый однородный элемент $a \in A_d$ (при $d \geqslant n_0$), не принадлежащий $\mathfrak{a}_d$. Пусть $\mathfrak{p}$ — множество таких элементов $x \in A$, для которых $ax \in \mathfrak{a}$. Очевидно, $\mathfrak{p}$ — идеал в кольце A; поскольку однородные компоненты элемента ax представляют собой произведение элемента a и однородных компонент элемента x, а идеал $\mathfrak{a}$ однороден, то $\mathfrak{p}$ — однородный идеал. Кроме того, $1 \notin \mathfrak{p}$, так что $\mathfrak{p} \neq A$. Чтобы доказать простоту идеала $\mathfrak{p}$, достаточно показать, что если элементы $x \in A_m$, $y \in A_n$ не принадлежат идеалу $\mathfrak{p}$, то и $xy \notin \mathfrak{p}$ (предложение 4). Но $ax \notin \mathfrak{a}_{m+d}$, $ay \notin \mathfrak{a}_{n+d}$, так что по предположению $a^2xy \notin \mathfrak{a}_{m+n+2d}$. Отсюда мы заключаем, что $axy \notin \mathfrak{a}_{m+n+d}$, а тогда и $xy \notin \mathfrak{p}$. Наконец, если $n \geqslant n_0$ и $x \in A_n$, то условия $x \in \mathfrak{a}_n$ и $ax \in \mathfrak{a}_{n+d}$ эквивалентны, благодаря чему $\mathfrak{p} \cap A_n = \mathfrak{a}_n$, и доказательство существования градуированного простого идеала $\mathfrak{p}$ с нужными свойствами закончено. Если же, кроме того, $\mathfrak{p}'$ — второй градуированный простой идеал кольца A, для которого $\mathfrak{p}' \cap A_n = \mathfrak{a}_n$ при $n \geqslant n_0$, то $a \notin \mathfrak{p}'$ и $ax \in \mathfrak{p}'$ для любого $x \in \mathfrak{p}$, откуда $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$, поскольку $\mathfrak{p}'$ — простой идеал. С другой стороны, если x — однородный элемент степени $n \geqslant 0$ из идеала $\mathfrak{p}'$, то ax имеет степень $n + d \geqslant n_0$ и, следовательно, лежит в $\mathfrak{p}' \cap A_{n+d} = \mathfrak{a}_{n+d}$, откуда по определению вытекает, что $x \in \mathfrak{p}$. Это показывает, что $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$ и, окончательно, $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть d — целое число $\geqslant 1$.*

(i) *Для любого существенного градуированного простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A пересечение $\mathfrak{p} \cap A^{(d)}$ является существенным градуированным простым идеалом в кольце $A^{(d)}$.*

(ii) *Обратно, для любого существенного градуированного простого идеала $\mathfrak{p}'$ кольца $A^{(d)}$ существует, и притом единственный, градуированный простой (обязательно существенный) идеал $\mathfrak{p}$ кольца A, для которого $\mathfrak{p} \cap A^{(d)} = \mathfrak{p}'$.*

(i) Если $a \in A_k$ не принадлежит $\mathfrak{p}_k$, то a^{kd} не принадлежит $\mathfrak{p}_{kd}$, так что $\mathfrak{p} \cap A^{(d)}$ — существенный идеал.

(ii) Для любого $n \geqslant 0$ множество $\mathfrak{p} \cap A_n$ должно быть равно множеству $\mathfrak{a}_n$ тех элементов $x \in A_n$, для которых $x^d \in \mathfrak{p}'$. Покажем, что $\mathfrak{a} = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathfrak{a}_n$ представляет собой градуированный простой идеал: так как $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{p}'_n$ при n, кратном d (ибо $\mathfrak{p}'$ — простой идеал), то этим будет доказано существование и установлена единственность идеала $\mathfrak{p}$. Если $x \in \mathfrak{a}_n$, $y \in \mathfrak{a}_n$, то $(x-y)^{2d}$ является суммой слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение x^d или y^d на некоторый однородный элемент степени nd; следовательно, $(x-y)^{2d} \in \mathfrak{p}'$, и так как идеал $\mathfrak{p}'$ простой, то $(x-y)^d \in \mathfrak{p}'$ и множество $\mathfrak{a}_n$ — подгруппа в A. Так как $\mathfrak{p}'$ — идеал в $A^{(d)}$, то $\mathfrak{a}$ — градуированный идеал в A; нако-

нец, соотношение $(xy)^d \in \mathfrak{p}'$ влечет за собой или включение $x^d \in \mathfrak{p}'$, или включение $y^d \in \mathfrak{p}'$, что и завершает доказательство, в силу предложения 4.

Пусть A — коммутативное кольцо, градуированное по положительным степеням и $\mathfrak{p}$ — существенный градуированный простой идеал в A. Множество S *однородных* элементов кольца A, не принадлежащих идеалу $\mathfrak{p}$, является мультипликативным и, следовательно, кольцо частных $S^{-1}A$ градуируется каноническим образом (гл. II, § 2, n° 9) (следует отметить, что, вообще говоря, в этой градуировке будут отличные от нуля однородные элементы отрицательной степени). Мы будем обозначать через $A_{(\mathfrak{p})}$ подкольцо кольца $S^{-1}A$, образованное элементами степени 0, или, иначе говоря, множество дробей x/s, в которых x и s — однородные элементы одинаковой степени в кольце A и $s \notin \mathfrak{p}$. Аналогичным образом, для любого градуированного A-модуля M модуль частных $S^{-1}M$ канонически градуируется (loc. cit), и мы будем обозначать через $M_{(\mathfrak{p})}$ подгруппу однородных элементов степени 0, которая, очевидно, является $A_{(\mathfrak{p})}$-модулем.

Предложение 7. *Пусть $\mathfrak{p}$ — градуированный простой идеал A, d — некоторое целое число $\geqslant 1$ и $\mathfrak{p}'$ — градуированный простой идеал $\mathfrak{p} \cap A^{(d)}$ в $A^{(d)}$; тогда для любого градуированного A-модуля M гомоморфизм $(M^{(d)})_{(\mathfrak{p}')} \to M_{(\mathfrak{p})}$, полученный из канонического вложения $M^{(d)} \to M$, биективен.*

Если S — множество однородных элементов из A, не принадлежащих идеалу $\mathfrak{p}$, и $S' = S \cap A^{(d)}$, то канонический гомоморфизм φ: $S'^{-1}M^{(d)} \to S^{(-1)}M$ является однородным гомоморфизмом степени 0; он инъективен, так как если $x \in M_{nd}$ — элемент, удовлетворяющий равенству $sx = 0$ для $s \in A_m$, $s \notin \mathfrak{p}$, то и $s^d x = 0$ и $s^d \in A_{md}$, $s^d \notin \mathfrak{p}'$. Остается заметить, что образ относительно φ группы $(M^{(d)})_{(\mathfrak{p}')}$ равен $M_{(\mathfrak{p})}$; но если $x \in M_n$, $s \in A_n$ и $s \notin \mathfrak{p}$, то $x/s = (xs^{d-1})/s^d$, причем $xs^{d-1} \in M_{nd}$, $s^d \in A_{nd}$ и $s^d \notin \mathfrak{p}'$, откуда следует наше утверждение.

Предложение 8. *Пусть $\mathfrak{m} = \bigoplus_{i \geqslant 1} A_i$, пусть $(\mathfrak{p}^{(k)})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ — некоторое конечное семейство градуированных простых идеалов кольца A и $\mathfrak{a}$ — такой градуированный идеал из A, что $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{p}^{(k)}$ при любом k; тогда существует однородный элемент $z \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}$, не принадлежащий ни одному из идеалов $\mathfrak{p}^{(k)}$.*

Проведем индукцию по n, учитывая, что предложение тривиально при $n = 1$. Если существует такой индекс j, что идеал $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{p}^{(j)}$ содержится в одном из идеалов $\mathfrak{p}^{(k)}$ с индексом $k \neq j$,

то из предположения индукции вытекает, что существует некоторый однородный элемент $z' \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}$, не принадлежащий ни одному из идеалов $\mathfrak{p}^{(k)}$ при $k \neq j$, а следовательно, и идеалу $\mathfrak{p}^{(j)}$; этот элемент удовлетворяет требуемым условиям. Таким образом, предположим, что при любом индексе j пересечение $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{m} \cap \bigcap \mathfrak{p}^{(j)}$ не содержится ни в одном из идеалов $\mathfrak{p}^{(k)}$ с индексами $k \neq j$. Из предположения индукции следует существование однородного элемента $y_j \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{p}^{(j)}$, не принадлежащего ни одному из идеалов $\mathfrak{p}^{(k)}$ при $k \neq j$. Поскольку элементы y_j все имеют степень $\geqslant 1$, то можно, заменяя их соответствующими степенями (ведь $\mathfrak{p}^{(k)}$ простые), предположить, что y_1 и $\prod_{j=2}^{n} y_j$ имеют одинаковые степени. Тогда элемент $z = y_1 + \prod_{j=2}^{n} y_j$ однороден, имеет степень $\geqslant 1$, и то же рассуждение, которое использовалось в предложении 2 гл. II, § 1, n° 1, показывает, что элемент z обладает нужными свойствами.

Упражнения

1) Пусть A — градуированное коммутативное кольцо типа $\mathbf{Z}$, (A_n) — его градуировка; положим $A^{\geqslant} = \bigoplus_{n \geqslant 0} A_n$, $A^{\leqslant} = \bigoplus_{n \leqslant 0} A_n$; эти суммы представляют собой градуированные подкольца в A.

а) Для любого однородного элемента f кольца A степени d кольцо частных A_f (соответствующее мультипликативной системе, образованной степенями f^n, где $n \geqslant 0$) каноническим образом наделяется структурой градуированного кольца (*Algèbre*, chap. II, 3e éd., § 11); обозначим через $A_{(f)}$ подкольцо кольца A_f, образованное элементами степени 0. Показать, что если $d > 0$, то $(A^{\geqslant})_f = A_f$, кольцо $A_{(f)}$ изоморфно $A^{(d)}/(f-1)A^{(d)}$ и $((A_f)^{\geqslant})_{f/1}$ представляет собой градуированное кольцо, изоморфное кольцу A_f.

б) Наделим кольцо многочленов $B = A[X] = A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[X]$ градуировкой тензорного произведения градуировок на A и на $\mathbf{Z}[X]$; эта градуировка согласована со структурой кольца на B. Показать, что если $d > 0$, то $B_{(f)}$ изоморфно $(A_f)^{\leqslant}$ и $(A^{(d)})_f$ представляет собой градуированное кольцо, изоморфное кольцу $A_{(f)} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[X, X^{-1}]$.

в) Пусть g — другой однородный элемент из кольца A, имеющий степень e. Показать, что если $d > 0$ и $e > 0$, то кольцо $A_{(fg)}$ изоморфно кольцу $(A_{(f)})_{g^d/f^e}$.

г) Предположим, что $d > 0$ и что $A_n = \{0\}$ для $n < 0$. Показать, что если A — нётерово кольцо, то нётеровым является и $A_{(f)}$ (воспользоваться следствием 4 теоремы 2 § 2, n° 10).

2) Пусть A — коммутативное кольцо, являющееся градуированным типа $\mathbf{Z}$ и таким, что $A_n = 0$ при $n < 0$. Для любого $n \geqslant 0$ обозначим через $A_{[n]}$ градуированный идеал $\bigoplus_{m \geqslant n} A_m$ кольца A; A-алгебра $A^{\natural} = \bigoplus_{n \geqslant 0} A_{[n]}$ представляет собой кольцо, градуированное подгруппами $A_{[n]} = A_n^{\natural}$; для любого $f \in A_d$ $(d > 0)$ обозначим через $f^{\natural}$ элемент из $A^{\natural}$, компоненты которого равны нулю, за исключением компоненты степени d, которая полагается равной f.

а) Показать, что если $f \in A_d$ при $d > 0$, то кольцо $A^{h}_{(fh)}$ изоморфно кольцу $(A_f)^{\geqslant}$ (обозначения из упражнения 1).

б) Для того чтобы A^h была A-алгеброй конечного типа, необходимо и достаточно, чтобы A было A_0-алгеброй конечного типа.

в) Для выполнения равенства $A^h_{n+1} = A^h_1 A^h_n$ (соответственно $A^h_n = (A^h_1)^n$) при любом $n \geqslant n_0$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство $A_{n+1} = A_1 A_n$ (соответственно $A_n = (A_1)^n$) при любом $n \geqslant n_0$.

3) Пусть K — поле, B — кольцо многочленов $K[X, Y]$, снабженное градуировкой по полной степени, C — градуированное подкольцо кольца B, порожденное элементами X и Y^2, $\mathfrak{a}$ — градуированный идеал кольца C, порожденный элементом Y^4. Показать, что в градуированном кольце $A = C/\mathfrak{a}$ имеет место равенство $A_{n+1} = A_1 A_n$ при $n \geqslant 2$, однако $A_n \neq (A_1)^n$ при $n > 1$.

§ 2. Общие сведения о фильтрованных кольцах и модулях

1. Фильтрованные кольца и модули

Определение 1. *Возрастающей* (соответственно *убывающей*) *фильтрацией на группе G называется возрастающая* (соответственно *убывающая*) *последовательность* $(G_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ *подгрупп группы G.*

Фильтрованной группой называется группа, наделенная фильтрацией.

Если $(G_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ — возрастающая (соответственно убывающая) фильтрация на группе G и если положить $G'_n = G_{-n}$, то очевидно, что $(G'_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ есть *убывающая* (соответственно *возрастающая*) фильтрация на G. Следовательно, можно ограничиться изучением *убывающих* фильтраций, и когда в дальнейшем мы будем говорить о какой-либо фильтрации, то подразумеваться будет фильтрация убывающая, если только не оговорено противное.

Если задана некоторая убывающая фильтрация $(G_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ на группе G, то очевидно, что множества $\bigcap_{n \in \mathbf{Z}} G_n$ и $\bigcup_{n \in \mathbf{Z}} G_n$ представляют собой подгруппы в G: фильтрация называется *отделимой*, если группа $\bigcap_{n \in \mathbf{Z}} G_n$ равна нейтральному элементу; при выполнении равенства $\bigcup_{n \in \mathbf{Z}} G_n = G$ фильтрация называется *исчерпывающей.*

Определение 2. *Пусть задано кольцо A; фильтрация $(A_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ на его аддитивной группе называется согласованной со структурой кольца на A, если выполнены два условия:*

$$A_m A_n \subset A_{m+n} \quad \text{для} \quad m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{Z}; \tag{1}$$

$$1 \in A_0. \tag{2}$$

Кольцо A, снабженное такой фильтрацией, называется фильтрованным.

Условия (1) и (2) показывают, что A_0 представляет собой *подкольцо* кольца A, а A_n являются A_0-модулями (левыми и правыми). Множество $B = \bigcup_{n\in\mathbf{Z}} A_n$ является *подкольцом* в A, а множество $\mathfrak{n} = \bigcap_{n\in\mathbf{Z}} A_n$ — *двусторонним идеалом* в B. В самом деле, если $x\in\mathfrak{n}$ и $a\in A_p$, то для любого $k\in\mathbf{Z}$ имеем включение $x\in A_{k-p}$, откуда $ax\in A_k$ и $xa\in A_k$ в силу (1): следовательно, $ax\in\mathfrak{n}$ и $xa\in\mathfrak{n}$.

Весьма важным является тот важный случай, когда $A_0 = A$, в этой ситуации $A_n = A$ для $n\leqslant 0$ и все подгруппы A_n служат *двусторонними идеалами* в A.

Определение 3. *Пусть A — фильтрованное кольцо, $(A_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ — его фильтрация и E — некоторый A-модуль. Фильтрация $(E_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ на модуле E называется согласованной со структурой модуля над фильтрованным кольцом A, если выполнено условие*

$$A_m E_n \subset E_{m+n} \text{ для } m\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{Z}. \tag{3}$$

A-модуль E, снабженный такой фильтрацией, называется фильтрованным.

Все группы E_n являются A_0-модулями; если $B = \bigcup_{n\in\mathbf{Z}} A_n$, то, очевидно, $\bigcup_{n\in\mathbf{Z}} E_n$ является B-модулем и множество $\bigcap_{n\in\mathbf{Z}} E_n$ тоже: убедиться в этом можно с помощью рассуждения, проведенного для $\bigcap_{n\in\mathbf{Z}} A_n$. Когда $A_0 = A$, *все* группы E_n являются *подмодулями* в E.

Примеры. 1) Пусть A — градуированное кольцо типа $\mathbf{Z}$; для любого $i\in\mathbf{Z}$ пусть $A_{(i)}$ обозначает подгруппу однородных элементов степени i в кольце A. Положим $A_n = \sum_{i\geqslant n} A_{(i)}$; тогда немедленно получается, что (A_n) представляет собой убывающую фильтрацию, *исчерпывающую* и *отделимую*, согласованную со структурой кольца A. Говорят, что такая фильтрация *ассоциирована* с градуировкой $(A_{(i)})_{i\in\mathbf{Z}}$; фильтрованное кольцо A называют в этом случае *ассоциированным* с заданным градуированным кольцом A.

Пусть теперь E — градуированный модуль типа $\mathbf{Z}$ над градуированным кольцом A, и для всякого $i\in\mathbf{Z}$ пусть $E_{(i)}$ обозначает подгруппу однородных элементов степени i в модуле E.

Положим $E_n = \sum_{i \geqslant n} E_{(i)}$; тогда (E_n) представляет собой убывающую фильтрацию, *исчерпывающую* и *отделимую*, а также согласованную со структурой модуля на E над фильтрованным кольцом A; принято говорить, что эта фультрация *ассоциирована* с градуировкой $(E_{(i)})_{i \in \mathbf{Z}}$ и что фильтрованный модуль E *ассоциирован* с заданным градуированным модулем E.

2) Пусть A — фильтрованное кольцо; $(A_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ — его фильтрация и E — некоторый A-модуль. Положим $E_n = A_n E$; из формулы (1) следует, что

$$A_m E_n = A_m A_n E \subset A_{m+n} E = E_{m+n},$$

а из условия (2) вытекает, что $E_0 = E$; следовательно, (E_n) — *исчерпывающая* фильтрация, согласованная со структурой A-модуля E. Говорят, что эта фильтрация на модуле E *порождена* фильтрацией (A_n), заданной на кольце A: следует отметить, что эта фильтрация не обязана быть отделимой, даже если отделима фильтрация (A_n), а E и A_n являются A-модулями конечного типа (ср. § 3, упражнение 2; см., однако, § 3, n° 3, предложение 5, и n° 2, следствие предложения 4).

3) Пусть A — некоторое кольцо и $\mathfrak{m}$ — двусторонний идеал в нем. Положим $A_n = \mathfrak{m}^n$ для $n \geqslant 0$ и $A_n = A$ для $n < 0$; ясно, что (A_n) есть исчерпывающая фильтрация на кольце A; она называется $\mathfrak{m}$-*адической*. Пусть E — некоторый A-модуль: $\mathfrak{m}$-адической *фильтрацией* на E называется фильтрация (E_n), порожденная $\mathfrak{m}$-адической фильтрацией кольца A, т. е. фильтрация, для которой $E_n = \mathfrak{m}^n E$ при $n \geqslant 0$ и $E_n = E$ при $n < 0$.

Если A — коммутативное кольцо и B — некоторая A-*алгебра*, то $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}B$ представляет собой двусторонний идеал в B и для любого B-модуля F справедливы равенства $\mathfrak{n}^k F = \mathfrak{m}^k F$, так что $\mathfrak{n}$-адическая фильтрация на F *совпадает* с $\mathfrak{m}$-адической фильтрацией (когда F рассматривается как модуль над кольцом A).

4) Если A — фильтрованное кольцо и (A_n) — его фильтрация, то левый A-модуль A_s является фильтрованным A-модулем с фильтрацией (A_n). С другой стороны, ясно, что (A_n) представляет собой фильтрацию, согласованную со структурой кольца на противоположном кольце A° и A_d является (левым) фильтрованным A°-модулем относительно фильтрации (A_n).

5) Над любым кольцом A множества A_n, для которых $A_n = 0$ при $n > 0$ и $A_n = A$ при $n \leqslant 0$, образуют фильтрацию, называемую *тривиальной*, ассоциированную (пример 1) с тривиальной градуировкой на кольце A; на любом A-модуле E всякая фильтрация (E_n), образованная A-подмодулями, является в этом случае согласованной со структурой модуля на E над фильтрованным кольцом A. Следовательно, можно сказать,

что любая фильтрованная коммутативная группа G является фильтрованным $\mathbf{Z}$-модулем, если $\mathbf{Z}$ снабжено тривиальной фильтрацией.

Пусть G — фильтрованная группа, $(G_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ — ее фильтрация. Совершенно ясно, что для любой подгруппы H в G набор множеств $(H \cap G_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ представляет собой фильтрацию, о которой говорят, что она *индуцирована* фильтрацией на G; она будет *исчерпывающей* (соответственно *отделимой*), если таким свойством обладает фильтрация группы G. Аналогичным образом, если H — нормальная подгруппа в G, то семейство множеств $((H \cdot G_n)/H)_{n\in\mathbf{Z}}$ образует фильтрацию на группе G/H, которая называется *факторфильтрацией* относительно H заданной фильтрации на группе G; эта фильтрация исчерпывающая, если исчерпывающей была фильтрация (G_n). Если G' — другая фильтрованная группа и $(G'_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ — ее фильтрация, то $(G_n \times G'_n)$ служит фильтрацией на группе $G \times G'$; она называется *произведением* фильтраций на G и G'. Произведение фильтраций является исчерпывающим (соответственно отделимым), если этим свойством обладают фильтрации на сомножителях.

Пусть теперь A — фильтрованное кольцо и (A_n) — его фильтрация; совершенно ясно, что если B — любое подкольцо в A, то фильтрация, индуцированная фильтрацией на A, согласована со структурой кольца на B. Если $\mathfrak{b}$ — двусторонний идеал кольца A, то факторфильтрация на $A/\mathfrak{b}$ фильтрации на A согласована со структурой этого кольца, так как $(A_n + \mathfrak{b})(A_m + \mathfrak{b}) \subset \subset A_{n+m} + \mathfrak{b}$. Если A' — второе фильтрованное кольцо, то произведение фильтраций на $A \times A'$ согласовано со структурой этого кольца.

Наконец, пусть E — фильтрованный A-модуль, (E_n) — его фильтрация; для всякого подмодуля F в E фильтрация, индуцированная фильтрацией на E, согласована со структурой A-модуля на F и факторфильтрация на E/F фильтрации на E согласована со структурой A-модуля, так как

$$A_n(F + E_m) \subset F + A_nE_m \subset F + E_{m+n}.$$

Следует отметить, что если фильтрация модуля E *порождена* фильтрацией кольца A (пример 2), то то же самое можно сказать о факторфильтрации на E/F, *но, вообще говоря, это не так для фильтрации, индуцированной на подмодуле* F (упражнение 1; см., однако, § 3, n° 2, теорема 2).

Если E' — второй фильтрованный A-модуль, то произведение фильтраций на $E \times E'$ согласовано со структурой A-модуля. Если фильтрации на E и E' порождены фильтрацией кольца A

(пример 2), то же самое верно и для произведения этих фильтраций.

2. *Функция порядка*

Пусть A — фильтрованное кольцо, E — фильтрованный A-модуль и (E_n) — фильтрация на E. Для всякого $x \in E$ обозначим через $v(x)$ *верхнюю границу* в расширенном множестве вещественных чисел $\overline{\mathbf{R}}$ множества тех целых чисел $n \in \mathbf{Z}$, для которых $x \in E_n$. Таким образом, имеют место следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned} v(x) = -\infty &\Leftrightarrow x \notin \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} E_n, \\ v(x) = p \quad &\Leftrightarrow x \in E_p \text{ и } x \notin E_{p+1}, \\ v(x) = +\infty &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} E_n. \end{aligned} \tag{4}$$

Отображение $v\colon E \to \overline{\mathbf{R}}$ называется *функцией порядка* на фильтрованном модуле E. Если задана функция v, то известны и группы E_n, ибо E_n представляет собой множество тех элементов $x \in E$, для которых $v(x) \geqslant n$: тот факт, что E_n являются аддитивными подгруппами в E, следует из соотношения

$$v(x-y) \geqslant \inf(v(x),\ v(y)). \tag{5}$$

Предыдущее определение применимо, в частности, к фильтрованному A-модулю A_s; пусть w — функция порядка в этом случае. Тогда из формулы (3) в n° 1 вытекает, что для $a \in A$ и $x \in E$ имеет место соотношение

$$v(ax) \geqslant w(a) + v(x), \tag{6}$$

если только второй член этого неравенства определен; в частности, для $a \in A$ и $b \in A$ имеем

$$w(ab) \geqslant w(a) + w(b), \tag{7}$$

опять-таки если второй член соотношения определен.

Тем же способом можно определить *функцию порядка* на фильтрованной группе G, не предполагая ее коммутативной; соотношение, соответствующее формуле (5), в этом случае записывается так:

$$v(yx^{-1}) = v(xy^{-1}) \geqslant \inf(v(x),\ v(y)). \tag{5'}$$

3. Градуированный модуль, ассоциированный с фильтрованным модулем

Пусть G — коммутативная (записываемая аддитивно) группа и (G_n) — некоторая фильтрация на G. Положим

$$\begin{gathered}\mathrm{gr}_n(G) = G_n/G_{n+1} \quad \text{для} \quad n \in \mathbf{Z}, \\ \mathrm{gr}(G) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathrm{gr}_n(G).\end{gathered} \tag{8}$$

Коммутативная группа $\mathrm{gr}(G)$ представляет собой, очевидно, градуированную группу типа $\mathbf{Z}$; она называется *градуированной группой, ассоциированной* с фильтрованной группой G, а однородными элементами степени n в $\mathrm{gr}(G)$ являются элементы из $\mathrm{gr}_n(G)$.

Пусть теперь A — фильтрованное кольцо, (A_n) — его фильтрация, E — фильтрованный A-модуль и (E_n) — его фильтрация. Для любых индексов $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{Z}$ можно определить отображение

$$\mathrm{gr}_p(A) \times \mathrm{gr}_q(E) \to \mathrm{gr}_{p+q}(E) \tag{9}$$

следующим образом: пусть заданы элементы $\alpha \in \mathrm{gr}_p(A)$, $\xi \in \mathrm{gr}_q(E)$, два представителя a, a' элемента α и два представителя x, x' элемента ξ; тогда $ax \in E_{p+q}$, $a'x' \in E_{p+q}$ и, сверх этого, $ax \equiv a'x' \pmod{E_{p+q+1}}$, так как

$$ax - a'x' = (a - a')x + a'(x - x')$$

и $a - a' \in A_{p+1}$, $x - x' \in E_{q+1}$; следовательно, утверждение о существовании отображения (9) вытекает из формулы (3) в n° 1. Таким образом, можно обозначить через $\alpha\xi$ класс в

$$E_{p+q}/E_{p+q+1} = \mathrm{gr}_{p+q}(E)$$

произведения ax произвольного представителя $a \in \alpha$ и произвольного представителя $x \in \xi$. Немедленно проверяется, что отображение (9) $\mathbf{Z}$-*билинейно*; по линейности отсюда определяется $\mathbf{Z}$-билинейное отображение

$$\mathrm{gr}(A) \times \mathrm{gr}(E) \to \mathrm{gr}(E). \tag{10}$$

Если это определение применить сначала к случаю $E = A_s$, то отображение (10) дает закон внутренней композиции на $\mathrm{gr}(A)$, который, как легко проверяется, *ассоциативен* и обладает нейтральным элементом; последним служит канонический образ в группе $\mathrm{gr}_0(A)$ единичного элемента кольца A. Следовательно, указанный внутренний закон определяет на $\mathrm{gr}(A)$ структуру кольца и градуировка $(\mathrm{gr}_n(A))_{n \in \mathbf{Z}}$ по самому определению согласована с этой структурой. Говорят, что градуированное кольцо $\mathrm{gr}(A)$ (типа $\mathbf{Z}$), определенное таким образом, есть *градуированное кольцо, ассоциированное* с фильтрованным

кольцом A; оно, очевидно, коммутативно, если коммутативно кольцо A; множество $\mathrm{gr}_0(A)$ представляет собой подкольцо в $\mathrm{gr}(A)$. С другой стороны, отображение (10) является внешним законом $\mathrm{gr}(A)$-модуля на $\mathrm{gr}(E)$, так как аксиомы модулей выполнены тривиальным образом, а градуировка $(\mathrm{gr}_n(E))_{n\in\mathbf{Z}}$ на $\mathrm{gr}(E)$ согласована, очевидно, с этой структурой модуля. Градуированный $\mathrm{gr}(A)$-модуль $\mathrm{gr}(E)$ (типа $\mathbf{Z}$), таким образом определенный, называется *градуированным модулем, ассоциированным* с фильтрованным A-модулем E.

Примеры. 1) Пусть A — коммутативное кольцо и t — элемент из A, не являющийся делителем нуля. Снабдим кольцо A *(t)-адической фильтрацией* (n° 1, пример 3). Тогда ассоциированное градуированное кольцо $\mathrm{gr}(A)$ канонически изоморфно *кольцу многочленов* $(A/(t))[X]$. Действительно, $\mathrm{gr}_n(A) = 0$ для $n<0$ и по определению кольцо $\mathrm{gr}_0(A)$ есть кольцо $A/(t)$. Теперь заметим, что, в силу предположения об элементе t, соотношение $at^n \equiv 0 \pmod{t^{n+1}}$ эквивалентно соотношению $a \equiv 0 \pmod{t}$; если τ — канонический образ элемента t в группе $\mathrm{gr}_1(A)$, то любой элемент из $\mathrm{gr}_n(A)$ записывается, и притом единственным образом, в виде $\alpha\tau^n$, где $\alpha \in \mathrm{gr}_0(A)$; отсюда следует наше утверждение.

2) Пусть K — коммутативное кольцо и A — кольцо формальных степенных рядов $K[[X_1, \ldots, X_r]]$ (*Алгебра*, гл. IV, § 5); пусть $\mathfrak{m}$ — идеал в A, элементы которого являются формальными степенными рядами без свободного члена. Снабдим кольцо A *$\mathfrak{m}$-адической фильтрацией* (n° 1, пример 3); если $M_1, \ldots, M_s$ — различные одночлены от переменных $X_1, \ldots, X_r$ полной степени $n-1$, то очевидно, что всякий формальный степенной ряд u полного порядка $\omega(u) \geqslant n$ (loc. cit., n° 2) записывается в виде $\sum_{k=1}^{s} u_k M_k$, где u_k принадлежат идеалу $\mathfrak{m}$; таким образом, видно, что $\mathfrak{m}^n$ представляет собой множество формальных степенных рядов u, таких, что $\omega(u) \geqslant n$; это показывает нам, что ω является *функцией порядка* для $\mathfrak{m}$-адической фильтрации. Следовательно, ясно, что для любого формального степенного ряда $u \in \mathfrak{m}^n$ существует, и притом единственный, однородный *многочлен* степени n от X_i, который сравним с $u \bmod \mathfrak{m}^{n+1}$: этот многочлен представляет собой сумму членов степени n из ряда u; отсюда вытекает, что кольцо $\mathrm{gr}(A)$ канонически изоморфно *кольцу многочленов* $K[X_1, \ldots, X_r]$.

3) Более общо, пусть A — коммутативное кольцо, а $\mathfrak{b}$ — некоторый идеал в A; кольцо A снабдим $\mathfrak{b}$-адической фильтрацией. Если положить $B = \mathrm{gr}_0(A)$, $F = \mathrm{gr}_1(A) = \mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2$, то, как известно (*Algébre*, chap. III, 3e éd.), тождественное отображение B-модуля F на себя единственным образом продолжается до

гомоморфизма *и симметрической алгебры* $\mathbf{S}(F)$ модуля F в B-алгебру $\mathrm{gr}(A)$; из определения алгебры $\mathrm{gr}(A)$ следует, что гомоморфизм u представляет собой *сюръективный гомоморфизм градуированных алгебр*. В самом деле, для $n \geqslant 1$ любой элемент из $\mathrm{gr}_n(A)$ является суммой классов $\bmod \mathfrak{b}^{n+1}$ элементов вида $y = x_1 x_2 \ldots x_n$, где $x_i \in \mathfrak{b}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; если ξ_i — класс $\bmod \mathfrak{b}^2$ элемента x_i, то очевидно, что класс $\bmod \mathfrak{b}^{n+1}$ элемента y совпадает с элементом $u(\xi_1) \ldots u(\xi_n)$, откуда и следует наше утверждение. В частности, любая система образующих B-модуля F является системой образующих B-алгебры $\mathrm{gr}(A)$.

Если теперь E — некоторый A-модуль и мы снабдим его $\mathfrak{b}$-адической фильтрацией, то аналогичным способом можно заметить, что градуированный $\mathrm{gr}(A)$-модуль $\mathrm{gr}(E)$ *порождается* подгруппой $\mathrm{gr}_0(E) = E/\mathfrak{b}E$. Говоря точнее, ограничение φ на $\mathrm{gr}(A) \times \mathrm{gr}_0(E)$ внешнего закона $\mathrm{gr}(A)$-модуля $\mathrm{gr}(E)$ представляет собой $\mathbf{Z}$-билинейное отображение из $\mathrm{gr}(A) \times \mathrm{gr}_0(E)$ в модуль $\mathrm{gr}(E)$; кроме того, кольцо $\mathrm{gr}(A)$ представляет собой $(\mathrm{gr}_0(A), \mathrm{rg}_0(A))$-бимодуль, а группа $\mathrm{gr}_0(E)$ будет $\mathrm{gr}_0(A)$-модулем. Немедленно проверяется, что для $\alpha \in \mathrm{gr}(A)$, $\alpha_0 \in \mathrm{gr}_0(A)$, $\xi \in \mathrm{gr}_0(E)$ имеет место равенство $\varphi(\alpha\alpha_0, \xi) \in \varphi(\alpha, \alpha_0\xi)$, так что φ определяет *сюръективное* $\mathrm{gr}_0(A)$*-линейное отображение*

$$\gamma_E\colon \mathrm{gr}(A) \otimes_{\mathrm{gr}_0(A)} \mathrm{gr}_0(E) \to \mathrm{gr}(E), \tag{11}$$

называемое *каноническим*.

* 4) Пусть K — коммутативное кольцо, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K и U — обертывающая алгебра алгебры $\mathfrak{g}$. На алгебре U определяется *возрастающая* фильтрация $(U_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ следующим образом: полагают $U_n = \{0\}$ для $n < 0$, а для $n \geqslant 0$ через U_n обозначают множество тех элементов из U, которые могут быть представлены как сумма произведений не более чем n элементов из $\mathfrak{g}$; тогда $U_0 = K$ и $\mathrm{gr}(U)$ представляет собой *коммутативную* K-алгебру (*Groupes et algèbre de Lie*, chap. I, § 2, n° 6)[1]). Каноническое отображение из $\mathfrak{g}$ в группу $\mathrm{gr}_1(U) = U_1/U_0$ единственным образом продолжается до гомоморфизма h из симметрической алгебры $\mathbf{S}(\mathfrak{g})$ K-модуля $\mathfrak{g}$ в K-алгебру $\mathrm{gr}(U)$; гомоморфизм h сюръективен, а когда K-модуль $\mathfrak{g}$ свободен, гомоморфизм h биективен (loc. cit., n° 7, théorème 1). *

5) Пусть A — градуированное кольцо типа $\mathbf{Z}$ и E — некоторый градуированный A-модуль также типа $\mathbf{Z}$; пусть $A_{(i)}$ (соответственно $E_{(i)}$) — подгруппа однородных элементов степени i в A (соответственно E). Снабдим кольцо A и модуль E фильтрациями, ассоциированными с их градуировками (n° 1, пример 1),

[1]) Готовится к печати русский перевод в издательстве «Мир». — *Прим. ред.*

и обозначим через A' и E' фильтрованное кольцо и фильтрованный A'-модуль, полученные таким образом. Тогда немедленно проверяется, что $\mathbf{Z}$-линейное отображение $A \to \mathrm{gr}(A')$, переводящее элемент из $A_{(n)}$ в его канонический образ в группе

$$\mathrm{gr}_n(A) = \Big(\bigoplus_{i \geqslant n} A_{(i)}\Big) \Big/ \Big(\bigoplus_{i \geqslant n+1} A_{(i)}\Big),$$

является изоморфизмом градуированных колец. Аналогичным образом определяется и канонический изоморфизм $E \to \mathrm{gr}(E')$ градуированных A-модулей.

Предложение 1. *Пусть A — фильтрованное кольцо, $(A_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ — его фильтрация и v — ее функция порядка. Предположим, что $\mathrm{gr}(A)$ является кольцом без делителей нуля. Тогда для любой пары элементов a, b кольца $B = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} A_n$ имеет место равенство* $v(ab) = v(a) + v(b)$.

Так как $\mathfrak{n} = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} A_n$ — двусторонний идеал кольца B, то формула верна, если $v(a)$ или $v(b)$ равно $+\infty$. В противном случае $v(a) = r$ и $v(b) = s$ — целые числа; класс α элемента a $\bmod A_{r+1}$ и класс β элемента b $\bmod A_{s+1}$ отличны от нуля по определению, откуда, согласно предположению, $\alpha\beta \neq 0$ в $\mathrm{gr}(A)$ и, следовательно, $ab \notin A_{r+s+1}$; так как $ab \in A_{r+s}$, то $v(ab) = v(a) + v(b)$.

Следствие. *Пусть A — фильтрованное кольцо, $(A_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ — его фильтрация. Положим $B = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} A_n$, $\mathfrak{n} = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} A_n$. Если кольцо $\mathrm{gr}(A)$ не содержит делителей нуля, то не содержит их и кольцо $B/\mathfrak{n}$.*

Действительно, если a и b — элементы из B, не принадлежащие идеалу $\mathfrak{n}$, то $v(a) \neq +\infty$, $v(b) \neq +\infty$, откуда $v(ab) \neq \infty$ и, следовательно, $ab \notin \mathfrak{n}$.

Отметим, что кольцо A может быть целостным, его фильтрация — исчерпывающей и отделимой, но кольцо $\mathrm{gr}(A)$ при этом не будет целостным (упражнение 2).

Замечание. Пусть G — некоторая (не обязательно коммутативная) группа, снабженная такой фильтрацией $(G_n)_{n \in \mathbf{Z}}$, что подгруппа G_{n+1} нормальна в G_n для всякого $n \in \mathbf{Z}$; положим снова $\mathrm{gr}_n(G) = G_n/G_{n+1}$. Мы назовем, как и прежде, *градуированной группой, ассоциированной с G*, и обозначим через $\mathrm{gr}(G)$ *слабое произведение* семейства групп $(\mathrm{gr}_n(G))_{n \in \mathbf{Z}}$, т. е. подгруппу произведения $\prod_{n \in \mathbf{Z}} \mathrm{gr}_n(G)$, образованную теми элементами

(ξ_n), все компоненты которых, за исключением не более чем конечного числа, равны нейтральному элементу.

4. *Гомоморфизмы, согласованные с фильтрациями*

Пусть G, G' — две коммутативные группы (записываемые аддитивно), (G_n) — некоторая фильтрация на G, а (G'_n) — некоторая фильтрация на G'; говорят, что гомоморфизм $h\colon G \to G'$ *согласован с фильтрациями* на G и на G', если $h(G_n) \subset G'_n$ для всякого $n \in \mathbf{Z}$. В этом случае композиция гомоморфизмов $G_n \xrightarrow{h|G_n} G'_n \to G'_n/G'_{n+1}$ равна нулю на G_{n+1}, так что при переходе к факторобъектам определен гомоморфизм $h_n\colon G_n/G_{n+1} \to G'_n/G'_{n+1}$; следовательно, получается некоторый гомоморфизм аддитивных групп $\mathrm{gr}(h)\colon \mathrm{gr}(G) \to \mathrm{gr}(G')$, который единствен в том смысле, что для любого $n \in \mathbf{Z}$ гомоморфизм $\mathrm{gr}(h)$ совпадает с h_n на $\mathrm{gr}_n(G) = G_n/G_{n+1}$. Говорят, что $\mathrm{gr}(h)$ есть *гомоморфизм градуированных групп, ассоциированный с гомоморфизмом* h. Если G'' — третья фильтрованная группа и $h'\colon G' \to G''$ — гомоморфизм, согласованный с фильтрациями, то $h \circ h'$ представляет собой гомоморфизм, согласованный с фильтрациями, и

$$\mathrm{gr}(h' \circ h) = \mathrm{gr}(h') \circ \mathrm{gr}(h). \tag{12}$$

Предложение 2. *Пусть G — фильтрованная коммутативная группа и H — некоторая подгруппа в G; снабдим группу H индуцированной фильтрацией, а факторгруппу G/H — факторфильтрацией. Если $j\colon H \to G$ — каноническое вложение и $p\colon G \to G/H$ — каноническое сюръективное отображение, то j и p согласованы с фильтрациями и последовательность*

$$0 \to \mathrm{gr}(H) \xrightarrow{\mathrm{gr}(j)} \mathrm{gr}(G) \xrightarrow{\mathrm{gr}(p)} \mathrm{gr}(G/H) \to 0 \tag{13}$$

точна.

Первое утверждение очевидно. Если (G_n) — фильтрация на группе G, то $(H \cap G_n) \cap G_{n+1} = H \cap G_{n+1}$, так что гомоморфизм $\mathrm{gr}(j)$ инъективен; кроме того, каноническое отображение $G_n \to (H + G_n)/H$ сюръективно, так что сюръективно и отображение $\mathrm{gr}(p)$, и $\mathrm{gr}(p) \circ \mathrm{rg}(j) = 0$ согласно равенству (12). Пусть, наконец, элемент $\xi \in G_n/G_{n+1}$ принадлежит ядру гомоморфизма $\mathrm{gr}(p)$; следовательно, существует такой элемент $x \in \xi$, что $x \in H + G_{n+1}$; но ввиду того что $G_{n+1} \subset G_n$, имеет место равенство

$$G_n \cap (H + G_{n+1}) = (H \cap G_n) + G_{n+1};$$

следовательно, $x = y + z$, где $y \in H \cap G_n$ и $z \in G_{n+1}$; это доказывает, что ξ есть класс $\bmod G_{n+1}$ элемента $j(y)$, т. е. элемент ξ принадлежит образу группы $\mathrm{gr}(H)$ при гомоморфизме $\mathrm{gr}(i)$.

Следует заметить, что если задана точная последовательность $0 \to G' \xrightarrow{u} G \xrightarrow{v} G'' \to 0$ фильтрованных коммутативных групп, где u и v согласованы с фильтрациями, то последовательность

$$0 \to \mathrm{gr}\,(G') \xrightarrow{\mathrm{gr}\,(u)} \mathrm{gr}\,(G) \xrightarrow{\mathrm{gr}\,(v)} \mathrm{gr}\,(G'') \to 0$$

не обязана быть точной (упражнение 4).

Если теперь A и B — два фильтрованных кольца и $h\colon A \to B$ — гомоморфизм колец, согласованный с фильтрациями, то немедленно проверяется, что гомоморфизм градуированных групп $\mathrm{gr}(h)\colon \mathrm{gr}(A) \to \mathrm{gr}(B)$ на самом деле является гомоморфизмом колец. В частности, если A' — подкольцо в A, снабженное индуцированной фильтрацией, то кольцо $\mathrm{gr}(A')$ канонически отождествляется с градуированным подкольцом в $\mathrm{gr}(A)$ (предложение 2); если $\mathfrak{b}$ — двусторонний идеал в A и если $A/\mathfrak{b}$ снабжено факторфильтрацией, то кольцо $\mathrm{gr}(A/\mathfrak{b})$ канонически отождествляется с градуированным факторкольцом $\mathrm{gr}(A)/\mathrm{gr}(\mathfrak{b})$ (предложение 2).

Пусть, наконец, A — фильтрованное кольцо, E, F — два фильтрованных A-модуля и $u\colon E \to F$ — некоторый A-гомоморфизм, согласованный с фильтрациями. Тогда немедленно устанавливается, что $\mathrm{gr}(u)\colon \mathrm{gr}(E) \to \mathrm{gr}(F)$ есть $\mathrm{gr}(A)$-*линейное* отображение и, следовательно, однородный гомоморфизм степени 0 градуированных $\mathrm{gr}(A)$-модулей. Кроме того, если $u'\colon E \to F$ — второй A-гомоморфизм, согласованный с фильтрациями, то таким же будет и гомоморфизм $u + u'$ и имеет место равенство

$$\mathrm{gr}\,(u + u') = \mathrm{gr}\,(u) + \mathrm{gr}\,(u'). \tag{14}$$

Замечания. 1) Совершенно очевидно, что гомоморфизмы фильтрованных колец (соответственно фильтрованных модулей над заданным фильтрованным кольцом A), согласованные с фильтрациями, могут рассматриваться как *морфизмы* относительно структуры фильтрованного кольца (соответственно фильтрованного A-модуля) (*Теория множеств*, гл. IV, § 2, п° 1).

2) Пусть E и F — два модуля над фильтрованным кольцом A; снабдим их фильтрациями, *порожденными* фильтрацией (A_n) кольца A (п° 1, пример 2). Тогда *всякое* A-линейное отображение $u\colon E \to F$ согласовано с фильтрациями, ибо $u(A_nE) = A_nu(E) \subset A_nF$.

3) Отметим, что согласованный с фильтрациями ненулевой гомоморфизм $u\colon E \to F$ фильтрованных A-модулей может быть таков, что $\mathrm{gr}(u) = 0$; в качестве примера можно взять эндоморфизм $x \to nx$ аддитивной группы $\mathbf{Z}$, снабженной (n)-адической фильтрацией (для произвольного целого $n > 1$). Соотношение $\mathrm{gr}(u) = \mathrm{gr}(v)$ для двух гомоморфизмов u, v модуля E в F, согласованных с фильтрациями, не обязано, таким образом, иметь своим следствием равенство $u = v$.

4) Определения начала этого n° немедленно переносятся на случай не обязательно коммутативных групп G, G', фильтрованных такими подгруппами G_n, G'_n, что G_{n+1} (соответственно G'_{n+1}) нормальна в G_n (соответственно в G'_n). Предложение 2 выполняется и в этом случае, если сделать те же предположения относительно групп G_n и считать подгруппу H нормальной в G; доказательство остается неизменным с точностью до обозначений.

5. *Топология, определенная фильтрацией*

Пусть G — некоторая группа, фильтрованная семейством $(G_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ своих нормальных подгрупп. Существует, и притом единственная, топология на группе G, согласованная с групповой структурой и в которой подгруппы G_n составляют фундаментальную систему окрестностей нейтрального элемента e из G (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 1, n° 2, пример); эта топология называется *топологией группы G, определенной фильтрацией* (G_n). Впредь, когда будут использоваться те или иные топологические понятия применительно к фильтрованной группе, то, если не оговорено противное, будет подразумеваться топология, определенная фильтрацией. Следует заметить, что множества G_n, являясь подгруппами в G, *одновременно открыты и замкнуты* (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 2, n° 1, следствие предложения 4).

Так как всякая подгруппа G_n нормальна в группе G, то окружения для правой и левой равномерных структур на G совпадают; отсюда следует, что группа G обладает *отделимым пополнением $\hat{G}$, являющимся группой* (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 3, n° 4, теорема 1, и n° 1, предложение 2).

Для всякого подмножества M группы G *замыкание* множества M в G равно пересечению $\bigcap_{n\in\mathbf{Z}}(M\cdot G_n)=\bigcap_{n\in\mathbf{Z}}(G_n\cdot M)$ (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 3, формула (1)); в частности, пересечение $\bigcap_{n\in\mathbf{Z}} G_n$ представляет собой замыкание одноточечного множества $\{e\}$. Таким образом, видно, что для *отделимости* топологии на группе G необходимо и достаточно, чтобы была отделимой фильтрация (G_n). Для того чтобы топология на G была *дискретной*, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое целое число $n\in\mathbf{Z}$, что $G_n=\{e\}$ (в этом случае $G_m=\{e\}$ при $m\geqslant n$); тогда говорят, что фильтрация (G_n) *дискретна*.

Поскольку отделимая группа, ассоциированная с группой G, есть факторгруппа $H=G\Big/\Big(\bigcap_{n\in\mathbf{Z}} G_n\Big)$, то ассоциированные градуи-

рованные группы $\mathrm{gr}(G)$ и $\mathrm{gr}(H)$ (группа H считается наделенной факторфильтрацией) канонически отождествляются.

Пусть теперь G' — вторая фильтрованная группа и u: $G \to G'$ — гомоморфизм, согласованный с фильтрациями; определение топологий на G-и G' немедленно показывает, что гомоморфизм u *непрерывен*[1]). Если H — какая-нибудь подгруппа (соответственно нормальная подгруппа) в G, то топология, индуцированная на H топологией группы G (соответственно фактортопология относительно H топологии группы G), представляет собой топологию на H (соответственно на G/H), определяемую фильтрацией, индуцированной фильтрацией группы G (соответственно факторфильтрацией фильтрации на G). Произведение топологий групп G и G' есть топология, определенная произведением фильтраций на G и на G'.

Пусть v — функция порядка (n° 2) на фильтрованной группе G. Из предположений о подгруппах G_n получаем равенство $v(xyx^{-1}) = v(y)$; поэтому $v(xy^{-1}) = v(yx^{-1}) = v(x^{-1}y) = v(y^{-1}x)$, где элементы x, y взяты из G. Пусть ρ — такое действительное число, что $0 < \rho < 1$ (можно, например, взять $\rho = 1/e$); положим $d(x, y) = \rho^{v(xy^{-1})}$ для любых x, y из G. Тогда $d(x, x) = 0$, $d(x, y) = d(y, x)$, а неравенство (5) в n° 2 дает

$$d(x, y) \leqslant \sup(d(x, z), d(y, z)) \qquad (15)$$

для любых x, y, z из G, благодаря чему получается неравенство треугольника

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z).$$

Следовательно, функция d представляет собой *псевдорасстояние* на группе G, инвариантное относительно правых и левых сдвигов, а подгруппы G_n представляют собой множества тех $x \in G$, для которых $d(e, x) \leqslant \rho^n$; равномерная структура, определяемая функцией d, является, таким образом, равномерной структурой топологической группы G. Если группа G отделима, то она представляет собой *вполне несвязное* метризуемое топологическое пространство (*Topologie générale*, chap. IX, 2e éd., § 6, n° 4); функция d задает *расстояние* на группе G, если, кроме того, фильтрация (G_n) исчерпывающая.

Напомним, что если задано топологическое кольцо A, то *левым топологическим A-модулем* называется A-модуль E, наделенный топологией, согласованной со структурой его аддитивной

[1]) В этой главе мы используем слова «непрерывный гомоморфизм» в том же смысле, в каком употребляются слова «непрерывное представление» в *Общей топологии*, 1969, гл. III, § 2, n° 8; слово «гомоморфизм» *ни в коем случае* не будет употребляться в смысле определения 1 из *Общей топологии*, 1969, гл. III, § 2, n° 8; чтобы избежать путаницы, мы будем всегда для обозначения этого понятия применять термин «строгий морфизм».

группы, и такой, что отображение $(a, x) \to ax$ из $A \times E$ в E непрерывно (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 6, n° 6).

Предложение 3. *Пусть A — фильтрованное кольцо, (A_n) — его фильтрация и B — подкольцо $\bigcup_{n \in \mathbf{Z}} A_n$ в A; пусть E — фильтрованный B — модуль, (E_n) — его фильтрация и F — B-подмодуль $\bigcup_{n \in \mathbf{Z}} E_n$ в E. Тогда отображение $(a, x) \to ax$ из $B \times F$ в F непрерывно.*

Пусть, в самом деле, $a_0 \in B$, $x_0 \in F$; по условию существуют такие целые числа r, s, что $a_0 \in A_r$ и $x_0 \in E_s$. Соотношение

$$ax - a_0x_0 = (a - a_0)\,x_0 + a_0(x - x_0) + (a - a_0)(x - x_0)$$

показывает, что если $a - a_0 \in A_i$ и $x - x_0 \in E_j$, то элемент $ax - a_0x_0$ принадлежит подгруппе $E_{i+s} + E_{j+r} + E_{i+j}$. Следовательно, если задано целое число n, то включение $ax - a_0x_0 \in E_n$ будет иметь место, если $i \geqslant n - s$, $j \geqslant n - r$ и $i + j \geqslant n$, т. е. если i и j достаточно велики.

Следствие. *Кольцо B является топологическим кольцом, а B-модуль F — топологическим B-модулем.*

Первое утверждение получается применением предложения 3 к $F = B_s$.

Отсюда, в частности, видно, что фильтрованное кольцо A с *исчерпывающей* фильтрацией является топологическим кольцом; когда это так, любой фильтрованный A-модуль с *исчерпывающей* фильтрацией является топологическим A-модулем.

Предложение 4. *Пусть A — фильтрованное коммутативное кольцо, фильтрация (A_n) которого является исчерпывающей, и пусть $\mathfrak{p}$ — некоторый идеал в A. Предположим, что идеал $\operatorname{gr}(\mathfrak{p}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} (\mathfrak{p} \cap A_n)/(\mathfrak{p} \cap A_{n+1})$ кольца $\operatorname{gr}(A)$ прост. Тогда замыкание $\mathfrak{p}$ в A является простым идеалом.*

Уже известно, что кольцо $\operatorname{gr}(A/\mathfrak{p})$ изоморфно факторкольцу $\operatorname{gr}(A)/\operatorname{gr}(\mathfrak{p})$ (n° 4, предложение 2), так что оно целостное. Следовательно, целостным является и факторкольцо $A \Big/ \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} (\mathfrak{p} + A_n)$ (n° 3, следствие предложения 1). Следовательно, замыкание $\bigcap_{n \in \mathbf{Z}} (\mathfrak{p} + A_n)$ идеала $\mathfrak{p}$ представляет собой простой идеал.

Пусть A — некоторое кольцо и $\mathfrak{m}$ — двусторонний идеал в нем. Топология, определенная на кольце A $\mathfrak{m}$-адической фильтрацией (пример 3), называется *$\mathfrak{m}$-адической*. Поскольку $\mathfrak{m}$-адическая фильтрация исчерпывающая, A является топологическим коль-

цом относительно этой топологии (следствие предложения 3). Аналогичным образом, для любого A-модуля E мы называем $\mathfrak{m}$-*адической топологией* на E топологию, определяемую $\mathfrak{m}$-адической фильтрацией; в этой топологии E представляет собой топологический A-модуль.

Пусть $\mathfrak{m}'$ — второй двусторонний идеал в A; для того чтобы $\mathfrak{m}'$-адическая топология на A была *более тонкой*, чем $\mathfrak{m}$-адическая, необходимо и достаточно существование такого целого $n > 0$, что $\mathfrak{m}'^n \subset \mathfrak{m}$; действительно это условие необходимо, а если оно выполнено, то $\mathfrak{m}'^{hn} \subset \mathfrak{m}^h$ для всякого $h > 0$, так что оно и достаточно. В том случае, когда A — *нётерово коммутативное кольцо*, высказанное условие эквивалентно включению $V(\mathfrak{m}) \subset V(\mathfrak{m}')$ в простом спектре кольца A (гл. II, § 4, n° 3, следствие 2 предложения 11, и § 2, n° 6, предложение 15).

6. *Полные фильтрованные модули*

Предложение 5. *Пусть G — фильтрованная группа, фильтрация (G_n) которой образована нормальными подгруппами в G. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *G — полная топологическая группа;*

б) *ассоциированная отделимая группа* $G' = G\Big/\Big(\bigcap_{n\in\mathbf{Z}} G_n\Big)$ *полна;*

в) *всякая последовательность Коши в группе G сходится.*

Когда группа G коммутативна и записана аддитивным образом, эти условия эквивалентны следующему:

г) *всякое семейство $(x_\lambda)_{\lambda\in L}$ элементов из G', сходящееся к 0 по фильтру $\mathfrak{F}$ дополнений к конечным подмножествам в L, суммируемо в G'.*

Для того чтобы некоторый фильтр на G был фильтром Коши (соответственно сходящимся фильтром), необходимо и достаточно, чтобы его образ при каноническом отображении $G \to G'$ тоже был фильтром Коши (соответственно сходящимся фильтром) (*Общая топология*, 1968, гл. II, § 3, n° 1, предложение 4). Отсюда прежде всего следует эквивалентность условий а) и б). С другой стороны, в силу того что группа G' метризуема, эквивалентность б) и в) следует из предложения 9 в *Topologie générale*, chap. IX, 2e ed., § 2, n° 6.

Предположим теперь, что группа G коммутативна. Допустим, что группа G' полна, и пусть $(x_\lambda)_{\lambda\in L}$ — семейство элементов из G', сходящееся к 0 по фильтру $\mathfrak{F}$. Для любой окрестности V' нуля группы G', представляющей собой подгруппу в G', существует такое конечное множество J в L, что из условия $\lambda \in L - J$

следует включение $x_\lambda \in V'$; следовательно, $\sum_{\lambda \in H} x_\lambda \in V'$ для любого конечного подмножества H множества L, не пересекающегося с J, а это и показывает, что семейство $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ суммируемо (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 5, n° 2, теорема 1).

Обратно, предположим, что выполнено условие г), и пусть (x_n) — последовательность Коши в группе G'; в этом случае семейство разностей $x_{n+1} - x_n$ суммируемо и, в частности, ряд с общим членом $x_{n+1} - x_n$ сходится, значит, последовательность (x_n) сходящаяся.

Пусть G — какая-нибудь фильтрованная группа, фильтрация (G_n) которой образована нормальными подгруппами в G; тогда факторгруппы G/G_n *дискретны*, а потому они полны, ибо подгруппы G_n открыты в G. Пусть f_n — каноническое отображение $G \to G/G_n$ и для $m \leqslant n$ обозначим через f_{mn} каноническое отображение $G/G_n \to G/G_m$; тогда пары $(G/G_n, f_{mn})$ составляют проективную систему дискретных групп, множество индексов которой есть $\mathbf{Z}$ (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 7, n° 3). Пусть $\tilde{G}$ — топологическая группа, являющаяся проективным пределом этой проективной системы, а для каждого n пусть g_n: $\tilde{G} \to G/G_n$ обозначает каноническое отображение. Далее, пусть f: $G \to \tilde{G}$ — проективный предел проективной системы отображений (f_n), для которого $f_n = g_n \circ f$ при любом n; наконец, пусть j — каноническое отображение группы G в свое отделимое пополнение $\hat{G}$; так как группы G/G_n полны, то существует, и притом единственный, изоморфизм i: $\hat{G} \to \tilde{G}$ топологических групп, для которого $f = i \circ j$ (loc. cit., следствие 1 предложения 2). Мы будем говорить, что это — *канонический* изоморфизм группы $\hat{G}$ на $\tilde{G}$.

Пусть H — вторая фильтрованная группа, фильтрация (H_n) которой образована нормальными подгруппами в H, и пусть u: $G \to H$ — некоторый гомоморфизм, согласованный с фильтрациями (n° 4). Положим $\tilde{H} = \varprojlim H/H_n$; для любого индекса n гомоморфизм u определяет при переходе к факторгруппам гомоморфизм u_n: $G/G_n \to H/H_n$ и, очевидно, гомоморфизмы u_n образуют проективную систему отображений; положим $\tilde{u} = \varprojlim u_n$. Пусть, кроме того, $\hat{H}$ — отделимое пополнение группы H и $\hat{u}$: $\hat{G} \to \hat{H}$ — гомоморфизм, определенный гомоморфизмом u при переходе к отделимым пополнениям (*Общая топология*, 1968, гл. II, § 3, n° 7, предложение 15). Из определений немедленно следует, что когда отождествляются $\hat{G}$ с $\tilde{G}$, а $\hat{H}$ с $\tilde{H}$ при помощи канонических изоморфизмов, то гомоморфизм $\hat{u}$ отождествляется с $\tilde{u}$. Отсюда, в частности, следует, что если для лю-

бого n гомоморфизм u_n является изоморфизмом, то $\hat{u}$ — изоморфизм топологических групп.

Примеры полных фильтрованных групп и колец. 1) Пусть G — некоторая полная фильтрованная группа. Тогда любая замкнутая подгруппа в G, снабженная индуцированной фильтрацией, полна (*Общая топология*, 1968, гл. II, § 3, n° 4, предложение 8). Любая факторгруппа группы G, снабженная факторфильтрацией, полна (*Topologie générale*, chap. IX, 2e éd., § 3, n° 1, remarque 1).

2) Пусть A — фильтрованное коммутативное кольцо, фильтрацию которого обозначим через $(\mathfrak{a}_n)_{n\in\mathbf{Z}}$; пусть A' — кольцо формальных степенных рядов $A[[X_1, \ldots, X_s]]$. Для любого набора $e=(e_1, \ldots, e_s)\in\mathbf{N}^s$ мы положим $|e|=\sum_{i=1}^{s} e_i$, $X^e=\prod_{i=1}^{s} X_i^{e_i}$, так что любой элемент $P\in A'$ может быть единственным образом записан в виде $P=\sum_{e\in\mathbf{N}^s} a_{e,P}X^e$, где $a_{e,P}\in A$. Обозначим для любого $n\in\mathbf{Z}$ через $\mathfrak{a}'_n$ множество тех рядов $P\in A'$, для которых $a_{e,P}\in\mathfrak{a}_{n-|e|}$ при всех $e\in\mathbf{N}^s$; покажем, что $\mathfrak{a}'_n$ представляет собой *идеал* в A'. Очевидно, что $\mathfrak{a}'_n$ — аддитивная подгруппа в A'; с другой стороны, если $P\in\mathfrak{a}'_n$ и $Q\in A'$, то для любого $e\in\mathbf{N}^s$ имеет место равенство $a_{e,PQ}=\sum_{e'+e''=e} a_{e',Q}\cdot a_{e'',P}$; поскольку из соотношения $e'+e''=e$ следует, что $|e''|<|e|$, то $PQ\in\mathfrak{a}'_n$. Кроме того, если $Q\in\mathfrak{a}'_m$, то для $e'+e''=e$ справедливы включения $a_{e',Q}\cdot a_{e'',P}\in\mathfrak{a}_{m-|e'|}\mathfrak{a}_{n-|e''|}\subset\mathfrak{a}_{m+n-|e|}$, а это доказывает, что $(\mathfrak{a}'_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ есть *фильтрация*, согласованная со структурой кольца A' (так как очевидно, что $1\in\mathfrak{a}'_0$). Когда в дальнейшем мы будем говорить о кольце A' как о фильтрованном кольце, мы будем, если не оговорено противное, подразумевать эту фильтрацию $(\mathfrak{a}'_n)$. Очевидно, что $\bigcap_{n\in\mathbf{Z}}\mathfrak{a}'_n$ представляет собой множество тех формальных степенных рядов, все коэффициенты которых принадлежат пересечению $\bigcap_{n\in\mathbf{Z}}\mathfrak{a}_n$; следовательно, если A — отделимое кольцо, то отделимо и A'. Если $\mathfrak{a}_0=A$, то $\mathfrak{a}'_0=A'$.

Предложение 6. *Сохраняя только что введенные обозначения, предположим, что* $\mathfrak{a}_0=A$, *и обозначим через* h *отображение* $P\to(a_{e,P})_{e\in\mathbf{N}^s}$. *Тогда* h *является изоморфизмом топологической аддитивной группы* A' *на топологическую аддитивную группу* $A^{\mathbf{N}^s}$. *Кольцо многочленов* $A[X, \ldots, X_s]$ *плотно в кольце* A'; *если* A — *полное кольцо, то полно и* A'.

Очевидно, что отображение h биективно. Пусть $V_n = h(\mathfrak{a}'_n)$ — множество тех $(a_e) \in A^{\mathbf{N}^s}$, для которых $a_e \in \mathfrak{a}_{n-|e|}$ при любом $e \in \mathbf{N}^s$, удовлетворяющем неравенству $|e| \leqslant n$; поскольку таких элементов всего лишь конечное число, множество V_n представляет собой окрестность нуля в группе $A^{\mathbf{N}^s}$. Обратно, если V — окрестность нуля в группе $A^{\mathbf{N}^s}$, то существует конечное подмножество E в $\mathbf{N}^s$ и такое целое число ν, что условие $a_e \in \mathfrak{a}_\nu$ при любом $e \in E$ означает, что $(a_e) \in V$. Следовательно, если n — наибольшее целое среди чисел $\nu + |e|$ при $e \in E$, то $h(\mathfrak{a}'_n) \subset V$, что и доказывает первую часть предложения 6. Кроме того, если n и E — определенные выше число и подмножество, то $h\left(P - \sum_{e \in E} a_{e,\,p} X^e\right) \in V$ для всякого ряда $P \in A'$, что доказывает плотность кольца $A[X_1, \ldots, X_s]$ в кольце A'. Последнее утверждение следует из первого и того факта, что произведение полных пространств полно.

Пусть $\mathfrak{m}$ — некоторый идеал кольца A, и предположим, что $(\mathfrak{a}_n)$ есть $\mathfrak{m}$-*адическая* фильтрация; тогда если $\mathfrak{n}$ — идеал в кольце формальных степенных рядов A', порожденный идеалом $\mathfrak{m}$ и переменными X_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$, то фильтрация $(\mathfrak{a}'_n)$ будет $\mathfrak{n}$-*адической*. В самом деле, очевидно, что для всякого $k \geqslant 0$ идеал $\mathfrak{n}^k$ порожден элементами aX^e, такими, что $a \in \mathfrak{m}^{k-|e|}$ при любом $e \in \mathbf{N}^s$, удовлетворяющем неравенству $|e| \leqslant k$, откуда $\mathfrak{n}^k \subset \mathfrak{a}'_k$. Докажем, что и, обратно, $\mathfrak{a}'_k \subset \mathfrak{n}^k$. Для любого ряда $P \in \mathfrak{a}'_k$ имеем $P = P' + P''$, где $P' = \sum_{|e| < k} a_{e,\,p} X^e$ и $P'' = \sum_{|e| \geqslant k} a_{e,\,p} X^e$. Совершенно ясно, что можно записать $P'' = \sum_{|e| = k} X^e Q_e$, где Q_e — элементы из A', так что $P'' \in \mathfrak{n}^k$. Кроме того, очевидно, что $a_{e,\,p} X^e \in \mathfrak{n}^k$ для всякого $e \in \mathbf{N}^s$, откуда $P' \in \mathfrak{n}^k$. Следовательно, $\mathfrak{n}^k = \mathfrak{a}'_k$.

Следствие. *Пусть* A — *коммутативное кольцо,*

$$A' = A[[X_1, \ldots, X_s]]$$

— *кольцо формальных степенных рядов от* s *переменных над* A *и* $\mathfrak{n}$ — *идеал кольца* A', *образованный формальными степенными рядами без свободного члена. Тогда кольцо* A' *отделимо и полно в* $\mathfrak{n}$-*адической топологии, а кольцо многочленов* $A[X_1, \ldots, X_s]$ *всюду плотно в кольце* A'.

Достаточно применить изложенное выше к случаю $\mathfrak{m} = \{0\}$.

7. Свойства линейной компактности полных фильтрованных модулей

Напомним, что если E — некоторый A-модуль, то *аффинным подмножеством* (или *аффинным линейным многообразием*) в E

называется любое подмножество F, которое либо пусто, либо имеет вид $a + M$, где $a \in E$, а M — некоторый подмодуль модуля E, называемый *направляющей* многообразия F (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 9, n° 1 et n° 3) [1]).

Предложение 7. *Пусть A — фильтрованное кольцо, E — некоторый A-модуль, (E_n) — фильтрация на E. Предположим, что $E_0 = E$ и что подгруппы E_n являются подмодулями в E; кроме того, будем считать, что A-модули E/E_n артиновы, а топологическая группа E полна и отделима. Тогда пересечение убывающей последовательности непустых замкнутых аффинных подмножеств модуля E непусто.*

Уже было показано в n° 6, что модуль E, будучи отделимым и полным, отождествляется с проективным пределом $\tilde{E} = \varprojlim E/E_n$. Пусть (W_p) — какая-нибудь убывающая последовательность непустых замкнутых аффинных подмножеств в E, и пусть для каждого $n \geqslant 0$ через $W_{p,n}$ обозначен канонический образ многообразия W_p в фактормодуле E/E_n. Мы сейчас построим такую последовательность $x = (x_n) \in \tilde{E}$, что $x_n \in W_{p,n}$ при любом p и каждом n; тогда будут иметь место включения $x \in W_p + E_n$ при всех p и n, и, поскольку множества W_p замкнуты, мы получим, что $x \in X_p$ при любом p (n° 5), и предложение этим будет доказано.

Так как $E/E_0 = 0$, то возьмем в качестве x_0 просто 0. Допустим, что уже определены x_i для $0 \leqslant i \leqslant n-1$, и пусть $W'_{p,n}$ — множество элементов из $W_{p,n}$, канонический образ которых в E/E_{n-1} равен x_{n-1}. Так как $x_{n-1} \in W_{p,n-1}$ и $W_{p,n-1}$ представляет собой канонический образ множества $W_{p,n}$, то множество $W'_{p,n}$ непусто и является, очевидно, аффинным подмножеством в E/E_n; кроме того, последовательность $(W'_{p,n})_{p \in \mathbf{N}}$ убывающая. Так как модуль E/E_n артинов, то эта последовательность стационарна (в противном случае последовательность подмодулей модуля E/E_n, которые являются направляющими многообразий $W'_{p,n}$, была бы строго убывающей, что невозможно). Следовательно, достаточно взять в качестве элемента x_n некоторый элемент из пересечения $\bigcap_{p \in \mathbf{N}} W'_{p,n}$, и построение последовательности (x_n) может быть, таким образом, продолжено по индукции.

Предложение 8. *Предположим, что кольцо A и модуль E удовлетворяют условиям предложения 7. Пусть (F_p) — убывающая последовательность таких замкнутых подмодулей модуля E,*

[1]) См. также *Алгебра*, Приложение II к гл. II, n° 3. — *Прим. перев.*

что $\bigcap_p F_p = 0$. *Тогда для любой окрестности* V *нуля модуля* E *существует такое число* p, *что* $F_p \subset V$ (иначе говоря, базис фильтра (F_p) сходится к 0).

Можно считать, что окрестность V совпадает с одним из подмодулей E_n, так что фактормодуль E/V артинов. Положим $F'_p = (F_p + V)/V$; так как множества F'_p образуют убывающую последовательность подмодулей в E/V, то существует такое целое число j, что $F'_p = F'_j$ для всех $p \geqslant j$. Мы сейчас увидим, что $F'_j = \{0\}$, и этим завершится доказательство. Пусть $x \in F'_j$, и пусть W_p — множество тех элементов модуля F_p, образ которых в E/V равен x $(p \geqslant j)$; по определению числа j множества W_p представляют собой *непустые* замкнутые аффинные подмножества модуля E и, очевидно, $W_{p+1} \subset W_p$; следовательно, из предложения 7 вытекает, что существует некоторый элемент y, принадлежащий всем многообразиям W_p. Поскольку $W_p \subset F_p$ и $\bigcap_{p \in \mathbf{N}} F_p = \{0\}$, то $y = 0$; так как элемент x является каноническим образом элемента y в фактормодуле E/V, то $x = 0$ (ср. упражнения 15—21).

8. Подъем гомоморфизмов ассоциированных градуированных модулей

Теорема 1. *Пусть* X, Y — *две фильтрованные группы, в которых фильтрации* (X_n), (Y_n) *образованы нормальными подгруппами, и пусть* u: $X \to Y$ — *гомоморфизм, согласованный с этими фильтрациями.*

(i) *Предположим, что фильтрация* (X_n) *исчерпывающая. Для того чтобы гомоморфизм* $\mathrm{gr}(u)$ *был инъективным, необходимо и достаточно, чтобы* $u^{-1}(Y_n) = X_n$ *для всякого* $n \in \mathbf{Z}$.

(ii) *Предположим, что выполнено одно из следующих условий:* α) *группа* X *полна и группа* Y *отделима;* β) *группа* Y *дискретна. Тогда, для того чтобы гомоморфизм* $\mathrm{gr}(u)$ *был сюръективным, необходимо и достаточно, чтобы* $Y_n = u(Y_n)$ *для любого* $n \in \mathbf{Z}$.

(i) Инъективность отображения $\mathrm{gr}_n(u)$ означает, что

$$X_n \cap u^{-1}(Y_{n+1}) \subset X_{n+1}.$$

Очевидно, это так, если $u^{-1}(Y_{n+1}) = X_{n+1}$. Обратно, если $X_n \cap u^{-1}(Y_{n+1}) \subset X_{n+1}$ для всякого n, то отсюда индукцией по k выводится, что $X_{n-k} \cap u^{-1}(Y_{n+1}) \subset X_{n+1}$ при всех $n \in \mathbf{Z}$ и любом $k \geqslant 0$. Так как фильтрация (X_n) является исчерпывающей, то видно, что для всякого n группа X представляет собой объединение подгрупп X_{n-k} $(k \geqslant 0)$, так что $u^{-1}(Y_{n+1}) \subset X_{n+1}$ для

любого n и по условию $X_{n+1} \subset u^{-1}(Y_{n+1})$. Это завершает доказательство.

(ii) Сюръективность отображения $\mathrm{gr}_n(u)$ означает, что

$$Y_n = u(X_n)\,Y_{n+1}.$$

Очевидно, что это так, если $Y_n = u(X_n)$. Обратно, предположим, что $Y_n = u(X_n)\,Y_{n+1}$ для всякого $n \in \mathbf{Z}$. Пусть n — некоторое целое число и y — некоторый элемент из Y_n. Определим последовательность $(x_k)_{k \geqslant 0}$ элементов из X_n, такую, что $x_k \in X_n$, $x_{k+1} \equiv x_k \pmod{X_{n+k}}$ и $u(x_k) \equiv y \pmod{Y_{n+k}}$ для любого $k \geqslant 0$. Мы положим x_0 равным нейтральному элементу группы X, благодаря чему будет выполняться сравнение $u(x_0) \equiv y \pmod{Y_n}$. Допустим, что уже построен элемент $x_k \in X_n$, такой, что $u(x_k) \equiv y \pmod{Y_{n+k}}$; тогда $(u(x_k))^{-1} y \in Y_{n+k}$. Из условия следует, что существует элемент $t \in X_{n+k}$, для которого $u(t) \equiv (u(x_k))^{-1} y \pmod{Y_{n+k+1}}$, так что $u(x_k t) \equiv y \pmod{Y_{n+k+1}}$; достаточно положить $x_{k+1} = x_k t$, для того чтобы продолжить индуктивное построение. Если это сделано и Y — дискретная группа, то существует такое $k \geqslant 0$, что $Y_{n+k} = \{e'\}$ (нейтральный элемент группы Y), откуда $u(x_k) = y$ и, следовательно, доказано, что в этом случае $u(X_n) = Y_n$ для всякого n. Теперь предположим, что группа X полна, а группа Y отделима. Так как $x_h^{-1} x_k \in X_{n+k}$ для $h \geqslant k \geqslant 0$, то последовательность (x_k) является последовательностью Коши в подгруппе X_n. Так как подгруппа X_n замкнута в X и, следовательно, полна, то эта последовательность обладает по крайней мере одним пределом x в группе X_n. В силу непрерывности отображения u, элемент $u(x)$ является единственным пределом последовательности $(u(x_k))$ в отделимой группе Y. Однако соотношения $u(x_k) \equiv Y \pmod{Y_{n+k+1}}$ показывают, что y также является пределом этой последовательности, откуда $u(x) = y$ и снова доказано, что $u(X_n) = Y_n$.

Следствие 1. *Предположим, что группа X отделима и ее фильтрация исчерпывающая. Тогда если $\mathrm{gr}(u)$ — инъективный гомоморфизм, то инъективен и гомоморфизм u.*

Пусть e, e' — нейтральные элементы групп X и Y соответственно. Тогда

$$u^{-1}(e') \subset \bigcap_n u^{-1}(Y_n) = \bigcap_n X_n = \{e\}$$

в силу условия, а отсюда и получается следствие.

Следствие 2. *Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*

α) группа X полна, а группа Y отделима и ее фильтрация является исчерпывающей;

β) *группа Y дискретна и ее фильтрация является исчерпывающей.*

Тогда если гомоморфизм $\mathrm{gr}(u)$ *сюръективен, то сюръективен и* u.

Действительно, в этом случае $Y = \bigcup_n Y_n = \bigcup_n u(X_n) \subset u(X)$.

Следствие 3. *Предположим, что группы X и Y отделимы, что их фильтрации являются исчерпывающими и что группа X полна. Тогда если гомоморфизм* $\mathrm{gr}(u)$ *биективен, то биективен и* u.

Пусть A — некоторое локальное кольцо, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал и M — некоторый A-модуль. Наделим кольцо A и модуль M $\mathfrak{m}$-*адическими* фильтрациями, и пусть $\mathrm{gr}(A)$ и $\mathrm{gr}(M)$ — градуированное кольцо и градуированный $\mathrm{gr}(A)$-модуль, ассоциированные с A и M. Было показано (n° 3, пример 3), что каноническое отображение (11) всегда *сюръективно*; мы сейчас рассмотрим следующее свойство модуля M:

(GR) *Каноническое отображение*

$$\gamma_M\colon \mathrm{gr}(A) \otimes_{\mathrm{gr}_0(A)} \mathrm{gr}_0(M) \to \mathrm{gr}(M)$$

биективно.

Предложение 9. *Пусть A — некоторое локальное кольцо, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал, M, N — два A-модуля и $u\colon N \to M$ — некоторый гомоморфизм. Снабдим модули M и N $\mathfrak{m}$-адическими фильтрациями и предположим, что:* 1° *модуль M обладает свойством* (GR); 2° *гомоморфизм* $\mathrm{gr}_0(u)\colon \mathrm{gr}_0(N) \to \mathrm{gr}_0(M)$ *инъективен. Тогда гомоморфизм* $\mathrm{gr}(u)\colon \mathrm{gr}(N) \to \mathrm{gr}(M)$ *инъективен, модули N и $P = \mathrm{Coker}(u)$ обладают свойством* (GR) *и для любого целого $n > 0$ имеет место равенство $\mathfrak{m}^n N = u^{-1}(\mathfrak{m}^n M)$.*

Непосредственно проверяется, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{gr}(A) \otimes_{\mathrm{gr}_0(A)} \mathrm{gr}_0(N) & \xrightarrow{1 \otimes \mathrm{gr}_0(u)} & \mathrm{gr}(A) \otimes_{\mathrm{gr}_0(A)} \mathrm{gr}_0(M) \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma_N} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_M} \\ \mathrm{gr}(N) & \xrightarrow[\mathrm{gr}(u)]{} & \mathrm{gr}(M) \end{array}$$

Поскольку факторкольцо $\mathrm{gr}_0(A) = A/\mathfrak{m}$ является полем, то из сделанных предположений вытекает, что гомоморфизм $1 \otimes \mathrm{gr}_0(u)$ инъективен. Так как по условию отображение γ_M инъективно, то инъективно и отображение $\gamma_M \circ (1 \otimes \mathrm{gr}_0(u))$. Это означает в первую очередь, что отображение γ_N инъективно, а потому и биективно, так что отсюда, далее, получается, что гомоморфизм $\mathrm{gr}(u)$ инъективен. Формула $u^{-1}(\mathfrak{m}^n M) = \mathfrak{m}^n N$ является теперь следствием теоремы 1 (i).

Кроме того, положим $N' = u(N)$, и пусть j: $N' \to M$ — каноническое вложение. Если p: $M \to P = M/N'$ — канонический гомоморфизм, то в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{gr}(A) \otimes \mathrm{gr}_0(N') & \xrightarrow{1 \otimes \mathrm{gr}_0(j)} & \mathrm{gr}(A) \otimes \mathrm{gr}_0(M) & \xrightarrow{1 \otimes \mathrm{gr}_0(p)} & \mathrm{gr}(A) \otimes \mathrm{gr}_0(P) & \to & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma_{N'}} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_M} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_P} & & \\ \mathrm{gr}(N') & \xrightarrow[\mathrm{gr}(j)]{} & \mathrm{gr}(M) & \xrightarrow[\mathrm{gr}(p)]{} & \mathrm{gr}(P) & \to & 0 \end{array}$$

нижняя строка точна (n° 4, предложение 2), и поскольку $\mathrm{gr}_0(A)$ есть поле, точной является и верхняя строка. При этом гомоморфизм $\mathrm{gr}(j)$ инъективен (n° 4, предложение 2), так что отображение $\mathrm{gr}_0(j)$ инъективно. Первая часть рассуждений, примененная к гомоморфизму j, показывает, что отображение $\gamma_{N'}$ биективно; так как по условию биективно и γ_M, то получается, что гомоморфизм γ_P биективен (гл. 1, § 1, n° 4, следствие 2 предложения 2).

Следствие. *Если в условиях предложения* 9 *дополнительно предположить, что модуль* N *отделим относительно* $\mathfrak{m}$*-адической фильтрации, то гомоморфизм* u *будет инъективным.*

В самом деле, это вытекает из того, что инъективен гомоморфизм $\mathrm{gr}(u)$ (следствие 1 теоремы 1).

* Замечание. Предположим, что выполнены условия предложения 9 и, кроме них, еще *одно* из следующих:

1° идеал $\mathfrak{m}$ нильпотентен;

2° кольцо A нётерово и модуль P идеально отделим (ср. § 5, n° 1);

тогда модуль P является *плоским* A-модулем. Действительно, это следует из того, что отображение γ_P биективно и из теоремы 1 (iv) § 5, n° 2, ибо $A/\mathfrak{m}$ — поле.*

9. Подъем семейств элементов ассоциированного градуированного модуля

Пусть A — фильтрованное коммутативное кольцо, $(A_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ — его фильтрация и C — такое подкольцо в A_0, что $C \cap A_1 = \{0\}$. Тогда ограничение на кольцо C канонического отображения $A_0 \to A_0/A_1 = \mathrm{gr}_0(A)$ инъективно, что позволяет отождествить C с некоторым подкольцом в $\mathrm{gr}_0(A)$; обычно мы будем в подобных случаях осуществлять это отождествление. Если $A_1 \neq A_0$ и если K — некоторое *подполе* в A_0, то $K \cap A_1 = \{0\}$, так как $K \cap A_1$ есть идеал в K, не содержащий 1; следовательно, можно отождествить K с некоторым подполем в $\mathrm{gr}_0(A)$.

Предложение 10. *Пусть* A *— фильтрованное коммутативное кольцо,* (A_n) *— его фильтрация; предположим, что существует*

такое подкольцо C в A_0, что $C \cap A_1 = \{0\}$, и отождествим C с соответствующим подкольцом в $\mathrm{gr}_0(A)$. Пусть $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ — конечное семейство элементов кольца A. Предположим, что $x_i \in A_{n_i}$ для $1 \leqslant i \leqslant q$, и пусть ξ_i — класс элемента x_i в $\mathrm{gr}_{n_i}(A)$ для $1 \leqslant i \leqslant q$.

(i) *Если семейство (ξ_i) элементов кольца $\mathrm{gr}(A)$ алгебраически свободно над кольцом C, то семейство (x_i) также алгебраически свободно над C.*

(ii) *Если фильтрация кольца A является исчерпывающей и дискретной и если (ξ_i) — система образующих C-алгебры $\mathrm{gr}(A)$, то семейство (x_i) представляет собой систему образующих C-алгебры A.*

Пусть A' — алгебра многочленов $C[X_1, \ldots, X_q]$ над C; снабдим алгебру A' градуировкой (A'_n) типа $\mathbf{Z}$, в которой A'_n является множеством C-линейных комбинаций одночленов $X_1^{s(1)} \ldots X_q^{s(q)}$, для которых $\sum_{i=1}^{q} n_i s(i) = n$. Пусть u — гомоморфизм $f \to f(x_1, \ldots, x_q)$ C-алгебры A' в C-алгебру A; по определению $u(A'_n) \subset A_n$ для любого $n \in \mathbf{Z}$, так что гомоморфизм u согласован с фильтрациями (кольцо A' предполагается снабженным структурой фильтрованного кольца, ассоциированной со структурой градуированного кольца, ср. n° 1, пример 1). Условие утверждения (i) означает, что гомоморфизм $\mathrm{gr}(u)$: $A' = \mathrm{gr}(A') \to \mathrm{gr}(A)$ инъективен; так как фильтрация кольца A' является исчерпывающей и отделимой, то можно, воспользовавшись следствием 1 теоремы 1 n° 8, увидеть, что отображение u инъективно; этим доказано (i). Аналогично, условие утверждения (ii) на элементы (ξ_i) означает, что отображение $\mathrm{gr}(u)$ сюръективно. Поскольку кольцо A дискретно и его фильтрация исчерпывающая, мы можем применить следствие 2 теоремы 1 n° 8 и убедиться, что гомоморфизм u сюръективен. Это доказывает (ii).

Предложение 11. *Пусть A — фильтрованное коммутативное кольцо, отделимое и полное, а C — такое подкольцо в A_0, что $C \cap A_1 = \{0\}$; пусть $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$ — такое конечное семейство элементов кольца A, что $x_i \in A_{n_i}$ при $n_i > 0$ для $1 \leqslant i \leqslant q$; пусть ξ_i — класс элемента x_i в группе $\mathrm{gr}_{n_i}(A)$ для $1 \leqslant i \leqslant q$.*

(i) *Существует, и притом единственный, C-гомоморфизм v алгебры формальных степенных рядов $A'' = C[[X_1, \ldots, X_q]]$ в кольцо A, при котором $v(X_i) = x_i$ для $1 \leqslant i \leqslant q$.*

(ii) *Если семейство (ξ_i) алгебраически свободно над кольцом C, то гомоморфизм v инъективен.*

(iii) *Если фильтрация кольца A является исчерпывающей и если семейство (ξ_i) представляет собой систему образующих C-алгебры $\mathrm{gr}(A)$, то гомоморфизм v сюръективен.*

Так как $n_i \geqslant 1$ для всякого i, то $\sum_{i=1}^{q} n_i s(i) \geqslant \sum_{i=1}^{q} s(i)$ для всякого одночлена $X_1^{s(1)} \dots X_q^{s(q)}$ и, с другой стороны, $\sum_{i=1}^{q} n_i s(i) \leqslant r \cdot \sum_{i=1}^{q} s(i)$, если r — наибольшее среди чисел n_i. Если обозначить через A_n'' множество формальных степенных рядов, ненулевые члены $a_s X_1^{s(1)} \dots X_q^{s(q)}$ которых таковы, что $\sum_{i=1}^{q} n_i s(i) \geqslant n$, то из следствия предложения 6 n° 6 вытекает, что кольцо A'' отделимо и полно относительно исчерпывающей фильтрации (A_n'') и, кроме того, оттуда же вытекает, что кольцо $A' = C[X_1, \dots, X_q]$ плотно в A''; с другой стороны, гомоморфизм u, определенный в доказательстве предложения 10, *непрерывен* на A', и, следовательно, он продолжается единственным образом до непрерывного гомоморфизма $v\colon A'' \to A$, так как A отделимо и полно (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 3, n° 3, предложение 5); этим доказано (i). Кроме того, имеют место равенства $\mathrm{gr}(A'') = \mathrm{gr}(A')$ и $\mathrm{gr}(v) = \mathrm{gr}(u)$; следовательно, (ii) и (iii) вытекают соответственно из следствий 1 и 2 теоремы 1 n° 8 с учетом условий, налагаемых на A.

Иногда утверждение (ii) (соответственно (iii)) выражают, говоря, что семейство (x_i) *формально свободно* над кольцом C (соответственно представляет собой *формальную систему образующих* кольца A).

Предложение 12. *Пусть A — фильтрованное кольцо, E — некоторый фильтрованный A-модуль, (A_n) и (E_n) — фильтрации кольца A и модуля E соответственно. Предположим, что A полно, а фильтрация (E_n) исчерпывающая и отделимая. Пусть $(x_i)_{i \in I}$ — какое-нибудь конечное семейство элементов модуля E, и для каждого $i \in I$ пусть $n(i)$ обозначает такое целое число, что $x_i \in E_{n(i)}$; пусть, наконец, ξ_i — класс элемента x_i в $\mathrm{gr}_{n(i)}(E)$. Тогда если (ξ_i) — система образующих $\mathrm{gr}(A)$-модуля $\mathrm{gr}(E)$, то (x_i) — система образующих A-модуля E.*

В A-модуле $L = A_s^I$ обозначим через L_n множество таких (a_i), что $a_i \in A_{n-n(i)}$ для $i \in I$; если p и q — наименьшее и наибольшее среди чисел $n(i)$, то $A_{n-q}^I \supset L_n \supset A_{n-p}^I$, и топология, определенная на L фильтрацией (L_n), совпадает с топологией

произведения. Следовательно, L является *полным* фильтрованным A-модулем. Так как L — свободный модуль, то существует некоторое A-линейное отображение $u\colon L \to E$, такое, что $u((a_i)) = \sum_{i \in I} a_i x_i$, и, очевидно, оно согласовано с фильтрациями; мы должны доказать, что u — сюръективное отображение, а для этого достаточно, в силу следствия 2 теоремы 1 n° 8, доказать, что гомоморфизм $\mathrm{gr}(u)\colon \mathrm{gr}(L) \to \mathrm{gr}(E)$ сюръективен, т. е. что для всякого $x \in E_n$ существует такое семейство (a_i), что $a_i \in A_{n-n(i)}$ при всех $i \in I$ и $x \equiv \sum_{i \in I} a_i x_i \pmod{E_{n+1}}$. Пусть ξ — класс элемента x в $\mathrm{gr}_n(E)$; так как элементы ξ_i порождают $\mathrm{gr}(A)$-модуль $\mathrm{gr}(E)$, то существуют такие $\alpha_i \in \mathrm{gr}(A)$, что $\xi = \sum_{i \in I} \alpha_i \xi_i$, и можно предполагать, что $\alpha_i \in \mathrm{gr}_{n-n(i)}(A)$ (при необходимости надо заменить элементы α_i их однородными компонентами степени $n - n(i)$). Тогда α_i есть образ элемента $a_i \in A_{n-n(i)}$ и семейство (a_i) обладает требуемым свойством.

Следствие 1. *Пусть A — полное фильтрованное кольцо и E — фильтрованный A-модуль, фильтрация которого исчерпывающая и отделимая. Если $\mathrm{gr}(E)$ является $\mathrm{gr}(A)$-модулем конечного типа* (соответственно *нётеровым*), *то и E является A-модулем конечного типа* (соответственно *нётеровым*).

Если модуль $\mathrm{gr}(E)$ имеет конечный тип, то он обладает конечной системой однородных образующих, и предложение 12 показывает, что E — модуль конечного типа. Теперь предположим, что модуль $\mathrm{gr}(E)$ нётеров, и пусть F — какой-нибудь подмодуль в E. Фильтрация, индуцированная на F фильтрацией модуля E, является исчерпывающей и отделимой, так что $\mathrm{gr}(F)$ отождествляется с некоторым $\mathrm{gr}(A)$-подмодулем в $\mathrm{gr}(E)$ (n° 4, предложение 2); следовательно, этот последний, согласно условию, имеет конечный тип. Отсюда получается, что F есть A-модуль конечного типа; следовательно, модуль E нётеров.

Следствие 2. *Пусть A — полное и отделимое фильтрованное кольцо с исчерпывающей фильтрацией. Если кольцо $\mathrm{gr}(A)$ нётерово слева, то нётеровым слева будет и кольцо A.*

Достаточно применить следствие 1 к случаю $E = A_1$.

Следствие 3. *Пусть A — полное фильтрованное кольцо, (A_n) — его фильтрация, E — отделимый фильтрованный A-модуль, (E_n) — его фильтрация и F — некоторый подмодуль конечного типа в E; предположим, что $A_0 = A$ и $E_0 = E$.*

(i) *Если для всякого $k \geqslant 0$ имеет место равенство $E_k = E_{k+1} + A_k F$, то $F = E$.*

(ii) *Если дополнительно предположить, что фильтрация модуля E порождена фильтрацией на A* (n° 1, пример 2), *то из соотношения $E = E_1 + F$ следует равенство $F = E$.*

Пусть ξ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — классы $\bmod E_1$ некоторой конечной системы образующих подмодуля F. Из сделанного предположения следует, что для всякого $k \geqslant 0$ любой элемент из $\mathrm{gr}_k(E)$ представляется в виде $\sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i$, где $a_i \in \mathrm{gr}(A)$; следовательно, классы ξ_i порождают $\mathrm{gr}(A)$-модуль $\mathrm{gr}(E)$, что и доказывает утверждение (i), в силу предложения 12. Если фильтрация модуля E порождена фильтрацией кольца A, то из соотношения $E = E_1 + F$ следуют равенства $E_k = A_k E = A_k E_1 + A_k F = A_k A_1 E + A_k F \subset A_{k+1} E + A_k F = E_{k+1} + A_k F \subset E_k$, откуда получается (ii).

Предложение 13. *Пусть A — некоторое кольцо, $\mathfrak{m}$ — двусторонний идеал в нем, содержащийся в радикале кольца A, и E — некоторый A-модуль. Наделим кольцо A и модуль E $\mathfrak{m}$-адическими фильтрациями* (n° 1, пример 3). *Предположим, что выполнено одно из следующих условий*:

а) *E является A-модулем конечного типа и кольцо A отделимо*;

б) *идеал $\mathfrak{m}$ нильпотентен.*

Для того чтобы модуль E был свободен над кольцом A, необходимо и достаточно, чтобы $E/\mathfrak{m}E$ был свободным $(A/\mathfrak{m})$-модулем, а модуль E удовлетворял условию (GR) (n° 8).

Если E — свободный A-модуль и (e_λ) — базис модуля E, то $\mathfrak{m}^k E$ представляет собой прямую сумму подмодулей $\mathfrak{m}^k e_\lambda$ модуля E при $k \geqslant 0$ (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 3, n° 7, remarque); следовательно, $\mathfrak{m}^k E/\mathfrak{m}^{k+1} E$ отождествляется с прямой суммой модулей $\mathfrak{m}^k e_\lambda/\mathfrak{m}^{k+1} e_\lambda$ (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 1, n° 6, proposition 7). Отсюда прежде всего выводится (для $k = 0$), что классы $1 \otimes e_\lambda$ элементов e_λ в фактормодуле $E/\mathfrak{m}E = (A/\mathfrak{m}) \otimes_A E$ образуют базис $(A/\mathfrak{m})$-модуля $E/\mathfrak{m}E$, а также что каноническое отображение

$$(\mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}) \otimes_A (E/\mathfrak{m}E) \to \mathfrak{m}^k E/\mathfrak{m}^{k+1} E$$

биективно для $k \geqslant 0$; следовательно, биективно и отображение γ_E. Следует обратить внимание на то, что в этой части доказательства не использовались ни условие а), ни условие б).

Обратно, предположим, что выполнены условия, указанные в формулировке, и пусть $(x_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство элементов модуля E, классы которых $\bmod \mathfrak{m}E$ образуют базис $(A/\mathfrak{m})$-модуля $E/\mathfrak{m}E$; пусть L — свободный A-модуль $A_s^{(I)}$, $(f_\iota)_{\iota \in I}$ — его канонический базис и u: $L \to E$ — такое A-линейное отображение,

что $u(f_\iota) = x_\iota$ для каждого $\iota \in I$. Из сделанных предположений следует, что отображение u сюръективно (гл. II, § 3, n° 2, следствие 1 предложения 4), так что остается доказать, что u инъективно. Но каждое из условий а), б) влечет за собой отделимость кольца A; следовательно, отделим и модуль L, снабженный $\mathfrak{m}$-адической фильтрацией, так как $\mathfrak{m}^k L = (\mathfrak{m}^k)^I$ (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 3, n° 7, Remarque); кроме того, модуль $\mathrm{gr}(L)$ отождествляется с $\mathrm{gr}(A) \otimes_{A/\mathfrak{m}} (L/\mathfrak{m}L)$ в силу первой части доказательства. Гомоморфизм u согласован с фильтрациями и можно записать, что $\mathrm{gr}(u) = \gamma_E \circ v$, где v — биективное отображение из $\mathrm{gr}(L)$ на $\mathrm{gr}(A) \otimes_{A/\mathfrak{m}} (E/\mathfrak{m}E)$, переводящее класс $f_\iota \bmod \mathfrak{m}M$ в элемент $1 \otimes \bar{x}_\iota$, где $\bar{x}_\iota$ — класс $\bmod \mathfrak{m}E$ элемента x_ι. Следовательно, из предположения получается, что гомоморфизм $\mathrm{gr}(u)$ инъективен и доказательство завершается с помощью следствия 1 теоремы 1 n° 8.

10. *Приложение: примеры нётеровых колец*

Лемма 1. *Пусть A — градуированное кольцо типа* **Z**, *градуировка (A_n) которого обладает тем свойством, что $A_n = 0$ для любого $n < 0$ или $A_n = 0$ для любого $n > 0$. Пусть M — градуированный A-модуль типа* **Z**. *Для того чтобы M был нётеровым A-модулем, необходимо и достаточно, чтобы всякий градуированный подмодуль в M был конечного типа.*

Поскольку отображение $n \to -n$ является автоморфизмом группы **Z**, то можно ограничиться случаем $A_n = 0$ для $n > 0$. Обозначим через A' и M' соответственно кольцо A и модуль M, наделенные фильтрациями, ассоциированными с их градуировками (n° 1, пример 1); эти фильтрации являются исчерпывающими и отделимыми. Предположение, сделанное относительно кольца A, означает, что кольцо A' *дискретно*, а потому полно. Если E — некоторый A-подмодуль в M, то фильтрованный A'-модуль E', который получается, если снабдить E индуцированной фильтрацией, отделим и его фильтрация является исчерпывающей; с другой стороны, $\mathrm{gr}(E')$ отождествляется с некоторым градуированным A-подмодулем модуля $M = \mathrm{gr}(M')$, так что этот модуль имеет конечный тип по условию. Остальное вытекает, таким образом, из следствия 1 предложения 12 n° 3.

Теорема 2. *Пусть A — градуированное кольцо типа* **N**, *M — некоторый градуированный A-модуль типа* **N** *и (A_n), (M_n) — соответствующие их градуировки. Предположим, что существует такой элемент $a \in A_1$, что $A_n = A_0 a^n$ и $M_n = a^n M_0$ для всякого $n > 0$. Тогда если M_0 — нётеров A_0-модуль, то M — нётеров A-модуль.*

В силу леммы 1, достаточно доказать, что любой *градуированный* подмодуль N модуля M имеет конечный тип. Для всякого $r \geqslant 0$ пусть $N_r = N \cap M_r$, и пусть L_r — множество тех элементов $m \in M_0$, для которых $a^r m \in N_r$. Так как $a^r A_0 \subset A_r = A_0 a^r$, то $a^r A_0 L_r \subset A_0 a^r L_r \subset A_0 N_r \subset N_r$; следовательно, множества L_r представляют собой A_0-подмодули модуля M_0; кроме того,

$$aN_r \subset N \cap aM_r = N \cap M_{r+1} = N_{r+1},$$

так что последовательность $(L_r)_{r \geqslant 0}$ возрастающая. Из условия следует, что существует такое целое $n \geqslant 0$, что $L_r = L_n$ для $r \geqslant n$. Пусть для каждого $r \leqslant n$ через $(m_{r,s})_{1 \leqslant s \leqslant k_r}$ обозначена система образующих A_0-модуля L_r. Мы сейчас докажем, что элементы $a^r m_{r,s}$ для $1 \leqslant s \leqslant k_r$, $0 \leqslant r \leqslant n$ составляют систему образующих A-модуля N. Так как $M_r = a^r M_0$ для всякого r, то $N_r = a^r L_r$ для всякого r, согласно определению множества L_r. Следовательно, для $r \leqslant n$

$$N_r = a^r L_r = \sum_{s=1}^{k_r} a^r A_0 m_{r,s} \subset \sum_{s=1}^{k_r} A_0 a^r m_{r,s},$$

а для $r > n$

$$N_r = a^r L_n = \sum_{s=1}^{k_n} a^r A_0 m_{n,s} \subset \sum_{s=1}^{k_n} A_0 a^r m_{n,s} \subset \sum_{s=1}^{k_n} A_0 a^{r-n}(a^n m_{n,s}).$$

Доказательство закончено (ср. упражнение 10).

Следствие 1 (теорема Гильберта). *Для всякого нётерова коммутативного кольца C кольцо многочленов $C[X]$ нётерово* (ср. упражнение 10).

Следствие 2. *Для всякого нётерова коммутативного кольца C и любого целого числа $n > 0$ кольцо многочленов $C[X_1, \ldots, X_n]$ нётерово.*

Это получается из следствия 1 индукцией по n.

Следствие 3. *Если C — нётерово коммутативное кольцо, то всякая коммутативная C-алгебра конечного типа является нётеровым кольцом.*

В самом деле, такая алгебра изоморфна факторалгебре алгебры многочленов $C[X_1, \ldots, X_n]$ (§ 1, n° 1).

Следствие 4. *Пусть A — градуированное коммутативное кольцо типа* **N**, *и пусть (A_n) — его градуировка. Для того чтобы кольцо A было нётеровым, необходимо и достаточно, чтобы было нётеровым кольцо A_0 и чтобы A было A_0-алгеброй конечного типа.*

Условие достаточно в силу следствия 3. Обратно, предположим, что кольцо A нётерово; прямая сумма $\mathfrak{m} = \sum_{n \geqslant 1} A_n$, являющаяся идеалом в A, имеет, следовательно, конечный тип. По этой причине A есть A_0-алгебра конечного типа (§ 1, n° 2, следствие предложения 1). С другой стороны, кольцо A_0, изоморфное факторкольцу $A/\mathfrak{m}$, нётерово.

Следствие 5. *Пусть A — коммутативное кольцо и $\mathfrak{m}$ — такой идеал в нем, что факторкольцо $A/\mathfrak{m}$ нётерово, $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ есть $(A/\mathfrak{m})$-модуль конечного типа, а само кольцо A полно и отделимо в $\mathfrak{m}$-адической топологии. Тогда кольца $\mathrm{gr}(A)$ и A нётеровы.*

Действительно, $\mathrm{gr}(A)$ является $(A/\mathfrak{m})$-алгеброй, порожденной группой $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ (n° 3, пример 3) и, следовательно, кольцо $\mathrm{gr}(A)$ нётерово в силу следствия 3. Отсюда получается, что нётерово и само кольцо A (n° 9, следствие 2 предложения 12).

Следствие 6. *Для любого нётерова коммутативного кольца C и любого целого числа $n > 0$ кольцо формальных рядов $C[[X_1, \ldots, X_n]]$ нётерово.*

Это вытекает из следствия 5 и из следствия предложения 6 n° 5, так как если $\mathfrak{m}$ — идеал кольца $A = C[[X_1, \ldots, X_n]]$, образованный формальными рядами без свободного члена, то факторкольцо $A/\mathfrak{m}$ изоморфно кольцу C и факторгруппа $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ изоморфна C-модулю C^n.

Замечания. 1) Следствия 2, 3 и 6 применимы, в частности, к случаю, когда C — поле.

*2) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над нётеровым коммутативным кольцом C, и предположим, что $\mathfrak{g}$ является C-модулем конечного типа. Наделим обертывающую алгебру U алгебры Ли $\mathfrak{g}$ *возрастающей* фильтрацией (U_n), определенной в примере 4 из n° 3. В соответствующей топологии алгебра U дискретна, а потому отделима и полна. Ассоциированное градуированное кольцо $\mathrm{gr}(U)$ представляет собой C-алгебру конечного типа, так как является факторалгеброй симметрической алгебры $\mathbf{S}(\mathfrak{g})$; следовательно, $\mathrm{gr}(U)$ — нётерово кольцо (следствие 3) и мы получаем отсюда, что кольцо U нётерово слева и справа (n° 9, следствие 2 предложения 12). *

11. Полные $\mathfrak{m}$-адические кольца и проективные пределы

В n° 6 мы уже видели, что если A — коммутативное кольцо и $\mathfrak{m}$ — такой идеал в нем, что A *полно* и *отделимо* в $\mathfrak{m}$-адической топологии, то топологическое кольцо A канонически отождествляется с проективным пределом дискретных колец $A_i = A/\mathfrak{m}^{i+1}$ $(i \in \mathbf{N})$, связанных каноническими отображениями h_{ij}: $A/\mathfrak{m}^{j+1} \to A/\mathfrak{m}^{i+1}$ $(i \leqslant j)$; отметим, что отображения h_{ij} сюръективны и

что если $\mathfrak{n}_{ij}$ — ядро отображения h_{ij}, то

$$\mathfrak{n}_{ij} = \mathfrak{m}^{i+1}/\mathfrak{m}^{j+1} = (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{j+1})^{i+1} = (\mathfrak{n}_{0j})^{i+1};$$

в частности, $(\mathfrak{n}_{0j})^{i+1} = 0$. Обратно, имеет место

Предложение 14. *Пусть (A_i, h_{ij}) — проективная система дискретных коммутативных колец с множеством индексов* $\mathbf{N}$, *и пусть (M_i, u_{ij}) — проективная система модулей над проективной системой колец (A_i, h_{ij}). Обозначим через $\mathfrak{n}_j$ ядро отображения h_{0j}: $A_j \to A_0$ и положим $A = \varprojlim A_i$, $M = \varprojlim M_i$. Допустим, что*

а) *для всякого $i \in \mathbf{N}$ отображение h_{ij} тождественно на A_i и для $i \leqslant j$ отображения h_{ij} и u_{ij} сюръективны;*

б) *для $i \leqslant j$ ядра отображений h_{ij} и u_{ij} равны $\mathfrak{n}_j^{i+1}$ и $\mathfrak{n}_j^{i+1}M_j$ соответственно.*

Тогда:

(i) *A является полным и отделимым топологическим кольцом, M — полным и отделимым топологическим A-модулем и канонические отображения h_i: $A \to A_i$, u_i: $M \to M_i$ сюръективны.*

(ii) *Если M_0 есть A_0-модуль конечного типа, то M является A-модулем конечного типа; более точно, любое конечное подмножество S модуля M, для которого $u_0(S)$ порождает M_0, служит системой образующих модуля M.*

Для доказательства утверждения пункта (i) достаточно воспользоваться результатами из *Общей топологии*, 1968, гл. II, § 3, n° 5, следствие предложения 10 и следствие 1 теоремы 1.

Для всякого $i \in \mathbf{N}$ положим $\mathfrak{m}_{i+1} = \mathrm{Ker}\,(h_i)$, $N_{i+1} = \mathrm{Ker}\,(u_i)$; тогда $\mathfrak{m}_{i+1} = \varprojlim_{k \geqslant 0} h_{i,\,i+k}^{-1}(0) = \varprojlim_k \mathfrak{n}_{i+k}^{i+1}$ и $N_{i+1} = \varprojlim_k \mathfrak{n}_{i+k}^{i+1} M_{i+k}$; поскольку отображения h_{i+k} и u_{i+k} сюръективны, то справедливы равенства

$$h_{i+k}(\mathfrak{m}_{i+1}) = \mathfrak{n}_{i+k}^{i+1}, \quad u_{i+k}(N_{i+1}) = \mathfrak{n}_{i+k}^{i+1} M_{i+k}. \tag{16}$$

Покажем, что $\mathfrak{m}_i N_j \subset N_{i+j}$ при $i \geqslant 1$ и $j \geqslant 1$, для чего достаточно доказать, что $u_{i+j-1}(\mathfrak{m}_i N_j) = 0$, но группа $u_{i+j-1}(\mathfrak{m}_i N_j) = h_{i+j-1}(\mathfrak{m}_i)\, u_{i+j-1}(N_j)$ равна $\mathfrak{n}_{i+j-1}^{i}(\mathfrak{n}_{i+j-1}^{j} M_{i+j-1}) = 0$, так как для любого $k \geqslant 0$ ядро $\mathfrak{n}_k^{k+1}$ отображения h_{kk} равно 0. Аналогичным образом проверяется, что $\mathfrak{m}_i \mathfrak{m}_j \subset \mathfrak{m}_{i+j}$. Если для любого $i \leqslant 0$ положить $\mathfrak{m}_i = A$ и $N_i = M$, то $(\mathfrak{m}_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ будет представлять собой фильтрацию в A, а $(N_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ — фильтрацию в M, согласованную с фильтрацией кольца A. Топологии на A и на M, очевидно, совпадают с теми, которые определяются указанными фильтрациями. Учитывая это, рассмотрим такой идеал $\mathfrak{a}$

кольца A, что $h_1(\mathfrak{a}) = \mathfrak{n}_1$, и обозначим через M' подмодуль модуля M, порожденный множеством S. Мы сейчас докажем, что

$$N_i = \mathfrak{a}^i M' + N_{i+1} \quad \text{для} \quad i \geqslant 0. \tag{17}$$

Положим $\mathfrak{a}_i = h_i(\mathfrak{a})$, $M'_i = u_i(M')$; достаточно показать, что $u_i(N_i) = \mathfrak{a}_i^i M'_i$. Это верно, если $i = 0$, так как $N_0 = M$ и $M'_0 = M_0$ по условию. Если $i \geqslant 1$, то $u_i(N_i) = \mathfrak{n}_i^i M_i$ в силу соотношения (16). Так как отображение h_{1i} сюръективно и $h_{0i} = h_{01} \circ h_{1i}$, то отображение h_{1i} переводит ядро $\mathfrak{n}_i$ гомоморфизма h_{0i} на ядро $\mathfrak{n}_1$ гомоморфизма h_{01} и $\mathfrak{n}_i = h_{1i}^{-1}(\mathfrak{n}_1)$. Теперь отметим, что $h_{1i}(\mathfrak{a}_i) = h_1(\mathfrak{a}) = \mathfrak{n}_1 = h_{1i}(\mathfrak{n}_i)$, и, поскольку ядро гомоморфизма h_{1i} равно $\mathfrak{n}_i^2$, имеют место соотношения $\mathfrak{n}_i \subset \mathfrak{a}_i + \mathfrak{n}_i^2$ и $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{n}_i$, откуда $\mathfrak{n}_i = \mathfrak{a}_i + \mathfrak{n}_i^2$. Кроме того, $u_{0i}(M'_i) = u_0(M') = M_0 = u_{0i}(M_i)$, и так как $\operatorname{Ker}(u_{0i}) = \mathfrak{n}_i M_i$, то $M_i = M'_i + \mathfrak{n}_i M_i$. Отсюда получаем, что

$$\mathfrak{n}_i^i M_i = (\mathfrak{a}_i + \mathfrak{n}_i^2)^i (M'_i + \mathfrak{n}_i M_i).$$

Однако $\mathfrak{a}_i^k \mathfrak{n}_i^{i+1-k} \subset \mathfrak{n}_i^{i+1} = 0$ для $0 \leqslant k \leqslant i$; отсюда вытекает, что $u_i(N_i) = \mathfrak{n}_i^i M_i = \mathfrak{a}_i^i M'_i$, а это доказывает (17).

Кроме того, $\mathfrak{m}_1 = h_1^{-1}(\mathfrak{n}_1)$, откуда $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}_1$ и, следовательно, $\mathfrak{a}^i \subset \mathfrak{m}_1^i \subset \mathfrak{m}_i$, так что $N_i \subset \mathfrak{m}_i M' + N_{i+1}$. С другой стороны, очевидно, что $\mathfrak{m}_i M \subset N_i$, в силу чего $N_i = \mathfrak{m}_i M' + N_{i+1}$ для всякого $i \geqslant 0$; из следствия 3 предложения 12 в n° 9 теперь вытекает, что $M' = M$. Доказательство закончено.

Следствие 1. *Сохраняя обозначения и условия из предложения* 14, *предположим дополнительно, что M_0 является A_0-модулем конечного типа и что $\mathfrak{n}_1$ является идеалом конечного типа кольца A_1. Пусть $\mathfrak{m}_1$ — ядро гомоморфизма h_0; тогда топологии на кольце A и модуле M совпадают с $\mathfrak{m}_1$-адическими топологиями на них. Более точно, для любого $i \geqslant 0$ ядра гомоморфизмов h_i и u_i равны $\mathfrak{m}_1^{i+1}$ и $\mathfrak{m}_1^{i+1} M$ соответственно. Кроме того, $\mathfrak{m}_1/\mathfrak{m}_1^2$ представляет собой A-модуль конечного типа.*

Сохраним обозначения из доказательства предложения 14. Дополнительные условия позволяют в данном случае предположить, что $\mathfrak{a}$ — идеал конечного типа. Пусть $i \geqslant 0$ — произвольное целое число; для любого $j \geqslant 0$, в силу формулы (17), имеет место равенство $N_{i+j} = \mathfrak{a}^j(\mathfrak{a}^i M) + N_{i+j+1} \subset \mathfrak{m}_j(\mathfrak{a}^i M) + N_{i+j+1}$; обратно, $\mathfrak{m}_j(\mathfrak{a}^i M) \subset \mathfrak{m}_j \mathfrak{m}_i M \subset \mathfrak{m}_{i+j} M \subset N_{i+j}$, откуда

$$N_{i+j} = \mathfrak{m}_j(\mathfrak{a}^i M) + N_{i+j+1}.$$

Поскольку и $\mathfrak{a}$ и M являются A-модулями конечного типа, то этим свойством обладает и модуль $\mathfrak{a}^i M$. Применяя следствие 3

предложения 12 п°9 к модулю N_i, наделенному фильтрацией $(N_{ij})_{j\in\mathbf{Z}}$, для которой $N_{ij}=N_i$ при $j<0$ и $N_{ij}=N_{i+j}$ при $j\geqslant 0$, получаем, что $N_i=\mathfrak{a}^iM$, откуда $N_i\subset\mathfrak{m}_1^iM$. Но наряду с этим и $\mathfrak{m}_1^iM\subset\mathfrak{m}_iM\subset N_i$, так что $N_i=\mathfrak{m}_1^iM$. Применительно к случаю $M_i=A_i$, $u_{ij}=h_{ij}$ это дает равенство $\mathfrak{m}_i=\mathfrak{m}_1^i$. Кроме того, $\mathfrak{m}_1=\mathfrak{a}+\mathfrak{m}_1^2$, в силу равенства (17), а это доказывает последнее утверждение следствия.

Следствие 2. *В условиях следствия* 1, *для того чтобы кольцо A было нётеровым, необходимо и достаточно, чтобы было нётеровым кольцо A_0.*

Это условие необходимо, так как A_0 изоморфно факторкольцу кольца A; оно достаточно в силу следствия 5 теоремы 2 из п° 10.

12. *Отделимое пополнение фильтрованного модуля*

Пусть G — фильтрованная группа, фильтрация (G_n) которой образована нормальными подгруппами; мы уже напоминали о том, что (п° 6) *отделимое пополнение* $\hat{G}$ топологической группы G канонически отождествляется с проективным пределом $\varprojlim G/G_n$ *дискретных* групп G/G_n, что канонический гомоморфизм $i\colon G\to\hat{G}$ имеет в качестве образа отделимую группу, ассоциированную с группой G (всюду плотную в $\hat{G}$), и что его ядро равно замыканию $\bigcap G_n$ множества $\{0\}$ в группе G. Отделимое пополнение $\hat{G}_n$ подгруппы G_n группы G отождествляется с замыканием множества $i(G_n)$ в группе $\hat{G}$ (*Общая топология*, 1968, гл. II, § 3, п° 9, следствие 1 предложения 18), и так как группа G_n замкнута в G, то

$$G_n=i^{-1}(\hat{G}_n)=i^{-1}(\hat{G}_n\cap i(G)). \tag{18}$$

С другой стороны, группы $\hat{G}_n$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в пополнении $\hat{G}$ (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 3, п° 4, предложение 7) и, следовательно, являются открытыми нормальными подгруппами в $\hat{G}$ (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 2, п° 3, предложение 8); топология на $\hat{G}$ определяется фильтрацией $(\hat{G}_n)$, всегда отделимой по определению. Поскольку множество $i(G)$ плотно в $\hat{G}$, а $\hat{G}_n$ — открытое подмножество, то

$$\hat{G}=i(G)\cdot\hat{G}_n \tag{19}$$

и, аналогичным образом,

$$\hat{G}_{n-1} = i(\hat{G}_{n-1}) \cdot \hat{G}_n. \tag{20}$$

Из соотношений (18) и (19) следует, что фильтрация $(\hat{G}_n)$ является исчерпывающей тогда и только тогда, когда исчерпывающей является (G_n).

Вторая теорема об изоморфизме (*Алгебра*, гл. 1, n° 13, теорема 6г) и формулы (18), (19), (20) показывают, что канонические гомоморфизмы

$$G_{n-1}/G_n \to \hat{G}_{n-1}/\hat{G}_n, \quad G/G_n \to \hat{G}/\hat{G}_n \tag{21}$$

биективны, так что биективен и канонический гомоморфизм

$$\mathrm{gr}(G) \to \mathrm{gr}(\hat{G}). \tag{22}$$

Пусть теперь A — фильтрованное кольцо, E — фильтрованный A-модуль, (A_n) и (E_n) — фильтрации на A и на E соответственно; мы будем считать, что эти фильтрации *исчерпывающие*, так что в соответствующих топологиях A — топологическое кольцо и E — топологический A-модуль (n° 5, предложение 3). Тогда (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 6, n° 5, 6) $\hat{A}$ является топологическим кольцом и $\hat{E}$ — топологическим $\hat{A}$-модулем. Если $i\colon A \to \hat{A}$ — канонический гомоморфизм, то $i(A_m)i(A_n) \subset i(A_{m+n})$, откуда, в силу непрерывности произведения в $\hat{A}$, получаем включение

$$\hat{A}_m \hat{A}_n \subset \hat{A}_{m+n}, \tag{23}$$

поскольку $\hat{A}_n$ — замыкание множества $i(A_n)$ в кольце $\hat{A}$. Аналогично показывается, что

$$\hat{A}_m \hat{E}_n \subset \hat{E}_{m+n}; \tag{24}$$

иначе говоря, имеет место

Предложение 15. *Пусть A — фильтрованное кольцо, E — фильтрованный A-модуль и соответствующие фильтрации (A_n), (E_n) кольца A и модуля E исчерпывающие. Тогда $(\hat{A}_n)$ представляет собой фильтрацию, согласованную со структурой кольца на $\hat{A}$, и $(\hat{E}_n)$ — фильтрацию, согласованную со структурой модуля на $\hat{E}$ над фильтрованным кольцом $\hat{A}$. Кроме того, эти фильтрации являются исчерпывающими и определяют топологии на $\hat{A}$ и на $\hat{E}$ соответственно. Наконец, канонические отображения $\mathrm{gr}(A) \to \mathrm{gr}(\hat{A})$ и $\mathrm{gr}(E) \to \mathrm{gr}(\hat{E})$ градуированных $\mathbf{Z}$-модулей представляют собой соответственно изоморфизмы градуированных колец и градуированных $\mathrm{gr}(A)$-модулей.*

В дальнейшем мы будем обозначать через j_X для любого равномерного пространства X каноническое отображение из X

в его отделимое пополнение $\widehat{X}$, а через $X_0 = j_X(X)$ — равномерное подпространство в $\widehat{X}$, являющееся отделимым пространством, *ассоциированным* с X. Напомним, что топология на X является прообразом относительно j_X топологии на X_0 (*Общая топология*, 1968, гл. II, § 3, n° 7, предложение 12). Напомним, также, что для любого непрерывного равномерного отображения $f\colon X \to Y$ через $\widehat{f}$ обозначается непрерывное равномерное отображение из $\widehat{X}$ в $\widehat{Y}$, такое, что $\widehat{f} \circ j_X = j_Y \circ f$ (*там же*, предложение 15); если X — равномерное подпространство пространства Y и f — каноническое вложение, то $\widehat{X}$ отождествляется с равномерным подпространством в $\widehat{Y}$, а $\widehat{f}$ — с каноническим вложением $\widehat{X}$ в $\widehat{Y}$ (*там же*, n° 9, следствие 1 из предложения 18).

Лемма 2. *Пусть* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ — *точная последовательность строгих морфизмов топологических групп* (*Algèbre*, chap. II, 3e éd., § 1, n° 4, remarque). *Предположим, что* X, Y, Z *обладают полными отделимыми пополнениями, а нейтральные элементы этих групп обладают счетными фундаментальными системами окрестностей. Тогда* $\widehat{X} \xrightarrow{\widehat{f}} \widehat{Y} \xrightarrow{\widehat{g}} \widehat{Z}$ — *точная последовательность строгих морфизмов.*

Пусть N_f, N_g — ядра морфизмов f и g соответственно. Запишем

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1,$$

где f_1 — каноническое отображение $X \to X/N_f$, f_2 — изоморфизм из X/N_f на N_g и f_3 — каноническое вложение $N_g \to Y$. Мы уже знаем, что $\widehat{f}_2$ — изоморфизм из $(X/N_f)\widehat{\ }$ на $\widehat{N}_g$, и мы только что напоминали, что $\widehat{f}_3$ — инъективный строгий морфизм группы $\widehat{N}_g$ в $\widehat{Y}$; если показать, что $\widehat{f}_1$ — сюръективный строгий морфизм, то отсюда будет следовать, что $\widehat{f}$ — строгий морфизм (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 2, n° 8, замечание 2). Пусть g_1 — каноническое отображение $Y \to Y/N_g$; если показать, что $\widehat{g}_1$ является сюръективным строгим морфизмом с ядром $\widehat{N}_g$, то, подобно тому, как это было сделано выше, мы получим, что $\widehat{g}$ представляет собой строгий морфизм и что последовательность $\widehat{X} \xrightarrow{\widehat{f}} \widehat{Y} \xrightarrow{\widehat{g}} \widehat{Z}$ точна. Следовательно, остается доказать, что если $Y = X/N$ (где N — некоторая нормальная подгруппа в X) и $f\colon X \to Y$ — каноническое отображение, то f — *сюръективный строгий морфизм с ядром* $\widehat{N}$.

Пусть $f_0\colon X_0 \to Y_0$ — отображение, совпадающее на X_0 с $\widehat{f}$; так как j_X (соответственно j_Y) есть сюръективный строгий морфизм из X на X_0 (соответственно из Y на Y_0), то f_0 является сюръективным строгим морфизмом (*Общая топология*, 1969,

гл. III, § 2, n° 8, *замечание* 3). Но X_0 и Y_0 являются метризуемыми пространствами (*Topologie générale*, chap. IX, 2e éd., § 3, n° 1, proposition 1); поэтому (см. *Topologie générale*, chap. IX, 2e éd., § 3, n° 1, cor. 1 de la proposition 4 et lemme 1) $\hat{f}_0 = \hat{f}$ является сюръективным строгим морфизмом и имеет в качестве ядра замыкание $\hat{N}_0'$ *в* $\hat{X}$ ядра N_0' отображения f_0. Нам, таким образом, достаточно доказать, что $\hat{N}_0' = \hat{N}$. Но N_0', очевидно, содержит $N_0 = j_X(N)$; достаточно доказать, что N_0' содержится в замыкании $\bar{N}_0$ в X_0 множества N_0. Но

$$U = j_X^{-1}(X_0 - \bar{N}_0) = X - j_X^{-1}(\bar{N}_0)$$

представляет собой множество, открытое в X и не пересекающееся с N; поскольку отображение f является сюръективным строгим морфизмом, то $V = f(U)$ — открытое множество в пространстве Y, не пересекающееся с нейтральным элементом e' топологической группы Y, а потому не пересекающееся и с замыканием точки e'; следовательно, $j_Y(V)$ не содержит нейтрального элемента из Y_0. Но $j_Y(V) = f_0(X_0 - \bar{N}_0)$, в силу чего $N_0' \subset \bar{N}_0$. Доказательство леммы 2 закончено.

Предложение 16. *Пусть A — фильтрованное кольцо, (A_n) — его фильтрация, E — некоторый A-модуль и (E_n) — фильтрация на E, порожденная фильтрацией кольца A, т. е. образованная подмодулями $E_n = A_n E$. Предположим, что фильтрация (A_n) исчерпывающая и что E — модуль конечного типа. Тогда если $i\colon E \to \hat{E}$ — каноническое отображение, то для любого $n \in \mathbf{Z}$ имеют место равенства*

$$\hat{E}_n = \hat{A}_n \hat{E} = \hat{A}_n i(E) \text{ и } \hat{E} = \hat{A} \cdot i(E). \tag{25}$$

В частности, $\hat{E}$ является $\hat{A}$-модулем конечного типа.

Равенство $A_n E = E_n$ в силу непрерывности внешнего закона $\hat{A}$-модуля $\hat{E}$ влечет за собой, что $\hat{A}_n \hat{E} \subset \hat{E}_n$ и, очевидно, что $\hat{A}_n \hat{E} \supset \hat{A}_n i(E)$. По условию, существует сюръективный гомоморфизм $u\colon L \to E$, где $L = A_s^I$ и I — некоторое конечное множество. Наделим модуль L фильтрацией, равной произведению фильтраций, т. е. образованной подмодулями $L_n = A_n^I$; эта фильтрация определяет на L топологию произведения. Следовательно, $\hat{L} = \hat{A}_s^I$ и $\hat{L}_n = \hat{A}_n^I$ (*Общая топология*, 1968, гл. II, § 3, n° 9, следствие 2 предложения 18). Пусть $j\colon L \to \hat{L}$ — каноническое отображение и $(e_i)_{i \in I}$ — канонический базис свободного модуля L. Для того чтобы некоторый элемент $\sum_{i \in I} a_i j(e_i)$ (в котором $a_i \in A$ для любого $i \in I$) принадлежал $\hat{L}_n$, необходимо и достаточно,

чтобы $a_i \in \hat{A}_n$ для любого i; следовательно, $\hat{L}_n = \hat{A}_n \cdot j(L)$. Кроме того, по определению, $u(L_n) = A_n E = E_n$, так что u — *строгий морфизм* из L на E (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 2, n° 8, proposition 24). Лемма 2 теперь показывает, что $\hat{u}\colon \hat{L} \to \hat{E}$ представляет собой *сюръективный строгий морфизм*. Так как $\hat{L}_n$ — открытая подгруппа в $\hat{L}$, то $\hat{u}(\hat{L}_n)$ — открытая (а потому и замкнутая) подгруппа в $\hat{E}$; но $\hat{u}(\hat{L}_n) = \hat{A}_n \hat{u}(j(L)) = \hat{A}_n i(E)$, и поскольку $i(E_n) \subset A_n i(E) \subset \hat{A}_n i(E)$, то $\hat{E}_n \subset \hat{A}_n i(E) \subset \hat{A}_n \hat{E} \subset \hat{E}_n$ и, следовательно, $\hat{E}_n = \hat{A}_n \hat{E} = \hat{A}_n i(E)$. Положив $n = 0$, мы получаем вторую из формул (25).

Следствие 1. *Если в условиях предложения* 16 *кольцо* A *полное, то полон и модуль* E.

Действительно, так как каноническое отображение $A \to \hat{A}$ в этой ситуации сюръективно (n° 6, предложение 5), то $\hat{E} = i(E)$ в силу соотношений (25) и доказательство завершается предложением 5 n° 6.

Следствие 2. *Пусть* A — *коммутативное кольцо,* $\mathfrak{m}$ — *идеал конечного типа в нем и* $\hat{A}$ — *отделимое пополнение кольца* A *относительно* $\mathfrak{m}$*-адической топологии. Тогда* $(\mathfrak{m}^n)\hat{} = (\hat{\mathfrak{m}})^n = \mathfrak{m}^n \cdot \hat{A}$ *для любого целого* $n > 0$ *и топология на* $\hat{A}$ *является* $\hat{\mathfrak{m}}$*-адической.*

Положим $A_n = \mathfrak{m}^n$ — это идеал конечного типа в A. Формула $\mathfrak{m}^p A_n = \mathfrak{m}^{n+p}$ показывает, что топология, индуцированная на A_n $\mathfrak{m}$-адической топологией, совпадает с $\mathfrak{m}$-адической топологией A-модуля A_n (n° 1 пример 3). В силу предложения 16, примененного к случаю $E = A_n$, получаем, что $\hat{A}_n = \hat{A} A_n$; другими словами, $(\mathfrak{m}^n)\hat{} = \mathfrak{m}^n \hat{A}$. В частности, $\hat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} \cdot \hat{A}$, откуда

$$(\hat{\mathfrak{m}})^n = \mathfrak{m}^n \cdot \hat{A} = \hat{A} \cdot A_n$$

(ср. упражнение 12).

Примеры отделимых пополнений фильтрованных колец. 1) Пусть A — градуированное кольцо типа $\mathbf{N}$, и пусть $(A_n)_{n \geqslant 0}$ — его градуировка. Снабдим это кольцо ассоциированной фильтрацией, являющейся отделимой и исчерпывающей (n° 1, пример 1). Аддитивная группа A канонически отождествляется с подгруппой в $B = \prod_{n \in \mathbf{N}} A_n$; если наделить группу B топологией, представляющей собой произведение дискретных топологий, то топология, индуцированная на A, будет топологией, определенной фильтрацией на кольце A; кроме того, B представляет собой полную топологическую группу, в которой группа A *плотна* (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 2, n° 9, предложение 25). Топологическая аддитивная группа B отождествляется,

следовательно, с *пополнением* $\hat{A}$ отделимой аддитивной группы A, и из предложения 15 следует, что она наделяется единственным образом структурой кольца, которое на самом деле и есть пополнение для топологического кольца A. Чтобы определить в этом кольце умножение, надо заметить, что если $A'_n = \sum_{i>n} A_i$ то замыкание в B двустороннего идеала A'_n равно множеству B_n тех $x=(x_i)\in B$, для которых $x_i = 0$ при $i \leqslant n$. Пусть теперь $x=(x_i)$, $y=(y_i)$ — два элемента из B и $z=(z_i)$ — их произведение. Для каждого $n>0$ имеют место сравнения $x \equiv x'_n \pmod{B_n}$ и $y \equiv y'_n \pmod{B_n}$, где $x'_n = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, $y'_n = (y_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$; отсюда получается, что $z \equiv x'_n y'_n \pmod{B_n}$. Но элементы x'_n и y'_n принадлежат кольцу A и, следовательно, для каждого $n \in \mathbf{N}$ имеем

$$z_n = \sum_{j=0}^{n} x_j y_{n-j}. \tag{26}$$

В частности, мы снова получили следствие предложения 6 из n° 6: если C — коммутативное кольцо, то пополнение кольца многочленов $C[X_1, \ldots, X_r]$, наделенного фильтрацией, ассоциированной с обычной градуировкой (по полной степени), канонически отождествляется с кольцом формальных степенных рядов $C[[X_1, \ldots, X_r]]$ (ср. *Алгебра*, гл. V, § 5, n° 10).

2) Пусть K — полное нормированное поле. Пополнение кольца сходящихся рядов от r переменных над K канонически отождествляется с кольцом формальных рядов $K[[X_1, \ldots, X_r]]$.

3) Пусть α — какой-нибудь отличный от нуля и не являющийся обратимым элемент кольца *главных идеалов* A; (α)-адическая топология на A называется также и *α-адической*; эта топология *отделима*, так как пересечение идеалов (α^n) равно нулю (*Алгебра*, гл. VII, § 1, n° 3). Следует обратить внимание на то, что пополнение кольца A относительно этой топологии не обязательно является целостным (ср. n° 13, замечание 3). Ассоциированное градуированное кольцо $\mathrm{gr}(A) = \mathrm{gr}(\hat{A})$ канонически изоморфно кольцу $(A/\alpha)[X]$ (n° 3, пример 1). Когда $A = \mathbf{Z}$, пополнение кольца $\mathbf{Z}$ относительно n-адической топологии $(n>1)$ обозначается через $\mathbf{Z}_n$ и его элементы называются *целыми n-адическими числами.*

Каждый элемент факторкольца $\mathbf{Z}/n^k\mathbf{Z}$ обладает единственным представителем вида $\sum_{i=0}^{k-1} a_i n^i$, где $0 \leqslant a_i \leqslant n-1$ для любого i; кроме того, канонический образ этого представителя в кольце $\mathbf{Z}/n^{k-1}\mathbf{Z}$ является классом элемента $\sum_{i=0}^{k-2} a_i n^i$. Эти замечания, а также тот факт,

что кольцо $\mathbf{Z}_n$ отождествляется каноническим образом с проективным пределом $\varprojlim \mathbf{Z}/n^k\mathbf{Z}$, показывают, что любой элемент из $\mathbf{Z}_n$ может быть записан единственным образом в виде $\sum_{i=0}^{\infty} a_i n^i$, где $0 \leqslant a_i < n$ и, обратно, любой такой ряд сходится в $\mathbf{Z}_n$.

13. Отделимое пополнение полулокального кольца

Предложение 17. *Пусть A — коммутативное кольцо и $(\mathfrak{m}_\lambda)_{\lambda\in L}$ — некоторое семейство идеалов в нем, отличных от A и таких, что $\mathfrak{m}_\lambda$ и $\mathfrak{m}_\mu$ взаимно просты при $\lambda \neq \mu$. Для любого семейства $s = (s(\lambda))_{\lambda\in L}$ целых чисел $\geqslant 0$ с конечным носителем положим $\mathfrak{a}_s = \bigcap_{\lambda\in L} \mathfrak{m}_\lambda^{s(\lambda)}$ (что равно произведению идеалов $\mathfrak{m}_\lambda^{s(\lambda)}$ для тех λ, для которых $s(\lambda) \neq 0$; ср. гл. II, § 1, n° 2, предложения 3 и 5). Идеалы $\mathfrak{a}_s$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в некоторой топологии $\mathscr{T}$, согласованной со структурой кольца A; пусть $\hat{A}$ — отделимое пополнение кольца A в этой топологии. С другой стороны, для любого $\lambda \in L$ пусть A_λ обозначает кольцо A, наделенное $\mathfrak{m}_\lambda$-адической топологией, и пусть $\hat{A}_\lambda$ — соответствующее отделимое пополнение. Если обозначить через u: $A \to \prod_{\lambda\in L} A_\lambda$ диагональный гомоморфизм, то u — непрерывное отображение и соответствующий гомоморфизм*

$$\hat{A} \to \Big(\prod_{\lambda\in L} A_\lambda\Big)\hat{} = \prod_{\lambda\in L} \hat{A}_\lambda$$

(Общая топология, 1969, гл. III, § 6, n° 5, и *Общая топология*, 1968, гл. II, § 3, n° 9, следствие 2 из предложения 18) *является изоморфизмом топологических колец.*

Первое утверждение следует из примера 3 в *Общей топологии*, 1969, гл. III, § 6, n° 3. Положим $B = \prod_{\lambda\in L} A_\lambda$; поскольку топология кольца A тоньше любой из $\mathfrak{m}_\lambda$-адических топологий, то отображения $pr_\lambda \circ u$ непрерывны, а потому непрерывно и u. Кроме того, $u(\mathfrak{a}_s)$ представляет собой пересечение диагонали Δ кольца B и множества $\bigcap_{\lambda\in L} \mathrm{pr}_\lambda^{-1}(\mathfrak{m}_\lambda^{s(\lambda)})$, являющегося открытым в B. Отсюда следует, что u — строгий морфизм аддитивной группы A в группу B с образом, равным Δ. Но множество Δ плотно в B. В самом деле, пусть $b = (a_\lambda)_{\lambda\in L}$ — некоторый элемент из B; любая окрестность элемента b в кольце B содержит множество вида $b + V$, где $V = \bigcap_{\lambda\in L} \mathrm{pr}_\lambda^{-1}(\mathfrak{m}_\lambda^{s(\lambda)})$ при некотором

семействе $s=(s(\lambda))_{\lambda\in L}$ целых чисел $\geqslant 0$ с конечным носителем. Поскольку идеалы $\mathfrak{m}_\lambda^{s(\lambda)}$ попарно взаимно просты (гл. II, § 1, n° 2, предложение 3), существует такой элемент $x\in A$, что $x\equiv a_\lambda \pmod{\mathfrak{m}_\lambda^{s(\lambda)}}$ при любом λ (loc. cit., предложение 5); следовательно, $(b+V)\cap\Delta\neq\varnothing$. Отделимое пополнение группы B/Δ равно, таким образом, нулю. Применяя лемму 2 n° 12 к точным последовательностям $0\to A\xrightarrow{u}B$, $A\xrightarrow{u}B\to B/\Delta$, мы видим, что $\hat{u}$ является изоморфизмом из $\hat{A}$ на $\hat{B}$.

Следствие. *Пусть A — некоторое кольцо главных идеалов и P — система представителей экстремальных элементов кольца A (Алгебра, гл. VII, § 1, n° 3). Топология на A, при которой отличные от нуля идеалы образуют фундаментальную систему окрестностей нуля и которая согласована со структурой кольца A, отделима и пополнение кольца A, наделенное этой топологией, канонически изоморфно произведению пополнений кольца A относительно π-адических топологий, где π пробегает систему P.*

Действительно, главные идеалы (π), где $\pi\in P$, являются максимальными и попарно различными, а потому взаимно простыми. Уже мы видели (n° 12, пример 3), что π-адические топологии отделимы; следовательно, отделимой является и та топология, которая была определена в формулировке предложения 17 и которая является более тонкой, чем любая π-адическая топология.

Когда следствие предложения 17 применяют к случаю $A=\mathbf{Z}$, то пополнение кольца $\mathbf{Z}$ относительно топологии, в которой отличные от нуля идеалы образуют фундаментальную систему окрестностей нуля, обозначают через $\hat{\mathbf{Z}}$; это кольцо изоморфно произведению $\prod_{p\in P}\mathbf{Z}_p$ колец целых p-адических чисел (здесь P является множеством простых чисел).

Замечания. 1) Очевидно, что в условиях предложения 17 топология $\mathscr{T}$ является *верхней границей $\mathfrak{m}_\lambda$-адических* топологий на A.

2) Любой *замкнутый* идеал $\mathfrak{a}$ кольца $\prod_{\lambda\in L}\hat{A}_\lambda$ совпадает с *произведением* своих проекций $\mathfrak{a}_\lambda=\mathrm{pr}_\lambda(\mathfrak{a})$, представляющих собой *замкнутые* идеалы колец $\hat{A}_\lambda$; действительно, $\hat{A}_\lambda$ можно канонически отождествить с некоторым замкнутым идеалом A'_λ в $\prod_\lambda\hat{A}_\lambda$, а $\mathfrak{a}_\lambda$ — с идеалом $\mathfrak{a}\cap A'_\lambda$ (*Алгебра*, гл. I, § 8, n° 10, предложение 6). Сумма идеалов $\mathfrak{a}_\lambda$ плотна в произведении $\prod_\lambda\mathfrak{a}_\lambda$ (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 2, n° 9, предложение 25), а это

последнее замкнуто в $\prod_{\lambda\in L}\hat{A}_\lambda$, откуда и следует наше утверждение.

Предложение 18. *Пусть A — коммутативное кольцо, $(\mathfrak{m}_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ — конечное семейство различных максимальных идеалов из A, $\mathfrak{r}$ — произведение идеалов $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\ldots\mathfrak{m}_q=\mathfrak{m}_1\cap\mathfrak{m}_2\cap\ldots\cap\mathfrak{m}_q$ и S — мультипликативная система $\bigcap_{i=1}^{q}(A-\mathfrak{m}_i)$. Наделим кольцо A $\mathfrak{r}$-адической топологией, кольцо $B=S^{-1}A$ снабдим $\mathfrak{r}B$-адической топологией, а на каждом из локальных колец $A_{\mathfrak{m}_i}$ введем $(\mathfrak{m}_iA_{\mathfrak{m}_i})$-адическую топологию.*

Пусть $u\colon A\to B$, $v_i\colon B\to A_{\mathfrak{m}_i}$ — канонические гомоморфизмы (гл. II, § 2, n° 1, следствие 2 предложения 2) *и v — гомоморфизм $(v_i)\colon B\to\prod_{i=1}^{q}A_{\mathfrak{m}_i}$. Тогда гомоморфизмы u и v непрерывны, а соответствующие гомоморфизмы $\hat{u}\colon\hat{A}\to\hat{B}$ и $\hat{v}\colon\hat{B}\to\prod_{i=1}^{q}\hat{A}_{\mathfrak{m}_i}$ представляют собой изоморфизмы топологических колец.*

Имеем $\mathfrak{m}_i\cap S=\varnothing$ для $1\leqslant i\leqslant q$; следовательно, идеал $\mathfrak{m}'_i=\mathfrak{m}_iB$ кольца B максимален (гл. II, § 2, n° 5, предложение 11) и справедливо равенство

$$\mathfrak{r}B=\mathfrak{m}'_1\cap\mathfrak{m}'_2\cap\ldots\cap\mathfrak{m}'_q$$

(гл. II, § 2, n° 4). Наконец, $B_{\mathfrak{m}'_i}=A_{\mathfrak{m}_i}$ с точностью до канонического изоморфизма (гл. II, § 2, n° 5, предложение 11). Так как $u^{-1}(\mathfrak{r}B)=\mathfrak{r}$ и $v_i^{-1}(\mathfrak{m}_iA_{\mathfrak{m}_i})\supset\mathfrak{r}B$, то гомоморфизмы u и v непрерывны. Следовательно, достаточно доказать, что если $w=v\circ u\colon A\to\prod_{i=1}^{q}A_{\mathfrak{m}_i}$, то $\hat{w}$ является изоморфизмом кольца $\hat{A}$ на кольцо $\prod_{i=1}^{q}\hat{A}_{\mathfrak{m}_i}$, ибо этот результат применительно к B и идеалам $\mathfrak{m}'_i$ покажет, что $\hat{v}$, а следовательно, и $\hat{u}$ — изоморфизмы. Заметим, что любое произведение степеней идеалов $\mathfrak{m}_i$ содержит некоторую степень идеала $\mathfrak{r}$, так что $\mathfrak{r}$-адическая топология представляет собой верхнюю границу $\mathfrak{m}_i$-адических топологий. Кроме того, если A_i обозначает кольцо A, наделенное $\mathfrak{m}_i$-адической топологией, и $\varphi\colon A\to\prod_{i=1}^{q}A_i$ — диагональное отображение, то $\hat{\varphi}\colon\hat{A}\to\prod_{i=1}^{q}\hat{A}_i$ есть изоморфизм (предложение 17).

Остается, таким образом, доказать, что если $u_i\colon A_i \to A_{\mathfrak{m}_i}$ — каноническое отображение, то $\hat{u}_i\colon \hat{A}_i \to \hat{A}_{\mathfrak{m}_i}$ — изоморфизм. Но для всякого n отображение

$$u_{i,\,n}\colon A/\mathfrak{m}_i^n \to A_{\mathfrak{m}_i}/\mathfrak{m}_i^n A_{\mathfrak{m}_i},$$

получаемое из u_i при переходе к факторкольцам, является изоморфизмом (гл. II, § 3, n° 3, предложение 9). Наше утверждение следует теперь из того, что $\hat{A}_i$ (соответственно $A_{\mathfrak{m}_i}$) есть проективный предел дискретных колец $A/\mathfrak{m}_i^n$ (соответственно $A_{\mathfrak{m}_i}/\mathfrak{m}_i^n A_{\mathfrak{m}_i}$) (ср. n° 6).

Замечание 3). Мы, таким образом, видим, что для целостного кольца A его отделимое пополнение $\hat{A}$ может содержать ненулевые делители нуля.

Предложение 19. *Пусть A — коммутативное кольцо и $\mathfrak{m}$ — некоторый максимальный идеал в нем. Тогда отделимое пополнение $\hat{A}$ кольца A относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии является локальным кольцом, максимальный идеал которого равен $\hat{\mathfrak{m}}$.*

Если $\mathfrak{a} = \bigcap_{k\geqslant 1} \mathfrak{m}^k$, то $\hat{A}$ представляет собой пополнение отделимого кольца $A/\mathfrak{a}$, ассоциированного с A, и так как $\mathfrak{m}/\mathfrak{a}$ — максимальный идеал в кольце $A/\mathfrak{a}$, то можно предположить, что кольцо A отделимо относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии. Так как кольца $A/\mathfrak{m}$ и $\hat{A}/\mathfrak{m}$ изоморфны (n° 12, формула (21)), то идеал $\hat{\mathfrak{m}}$ кольца $\hat{A}$ максимален. Поскольку топология на $\hat{A}$ определяется фильтрацией $(\mathfrak{m}^n)\hat{}$ (n° 12), предложение является следствием такой леммы:

Лемма 3. *Пусть A — полное и отделимое топологическое кольцо, в котором существует фундаментальная система $\mathfrak{S}$ окрестностей нуля, образованная аддитивными подгруппами группы A.*

(i) *для любого элемента $x \in A$, удовлетворяющего условию $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, элемент $1 - x$ обратим в A и обратный к нему элемент равен $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.*

(ii) *Пусть $\mathfrak{a}$ — такой двусторонний идеал в A, что $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ для любого $x \in \mathfrak{a}$. Для того чтобы некоторый элемент y кольца A был обратим, необходимо и достаточно, чтобы его класс $\bmod \mathfrak{a}$ был обратим в кольце $A/\mathfrak{a}$. В частности, идеал $\mathfrak{a}$ содержится в радикале кольца A.*

(i) *Так как*

$$(1-x)(1+x+\ldots+x^n)=(1+x+\ldots+x^n)(1-x)=1-x^{n+1},$$

то утверждение сводится к доказательству того, что ряд с общим членом x^n сходится в кольце A. Но по условию для любой окрестности $Y\in\mathfrak{S}$ нуля в кольце A существует такое целое число $p>0$, что $x^n\in V$ при $n\geqslant p$. Отсюда мы заключаем, что $x^p+x^{p+1}+\ldots+x^q\in V$ при любом $q\geqslant p$ и наше утверждение следует, таким образом, из критерия Коши (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 5, n° 2, теорема 1).

(ii) Предположим, что существует такой элемент $y'\in A$, что $yy'\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{a})$ и $y'y\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{a})$. Из условия, налагаемого на идеал $\mathfrak{a}$, в силу (i) вытекает, что элементы yy' и $y'y$ обратимы в A, так что элемент y в кольце A обратим. В частности, при любом $x\in\mathfrak{a}$ элемент $1-x$ обратим в A, и так как $\mathfrak{a}$ — двусторонний идеал кольца A, то он содержится в радикале этого кольца (*Алгебра*, гл. VIII, § 6, n° 3, теорема 1).

После того как эта лемма доказана, достаточно применить ее к топологическому кольцу $\widehat{A}$ и идеалу $\widehat{\mathfrak{m}}$, так как для всякого $x\in\widehat{\mathfrak{m}}$ справедливы включения $x^n\in(\mathfrak{m})^n\subset(\mathfrak{m}^n)\widehat{\ }$ и, значит, последовательность (x^n) сходится к 0.

Если положить $A=\mathbf{Z}$, то любой максимальный идеал в $\mathbf{Z}$ имеет вид $p\mathbf{Z}$, где p — простое число. Следовательно, кольцо p-адических чисел $\mathbf{Z}_p$ является локальным, а $p\mathbf{Z}_p$ представляет собой максимальный идеал в нем (следствие 2 предложения 16); поле вычетов этого локального кольца изоморфно $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}=\mathbf{F}_p$, и кольцо $\mathbf{Z}_{(p)}$, наделенное $p\mathbf{Z}_{(p)}$-адической топологией, отождествляется с топологическим подкольцом в $\mathbf{Z}_p$, содержащим кольцо $\mathbf{Z}$.

Следствие. *Пусть A — полулокальное кольцо* (гл. II, § 3, n° 5), *$\mathfrak{m}_i$ — его различные максимальные идеалы* $(1\leqslant i\leqslant q)$ *и*

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{m}_1\cap\mathfrak{m}_2\cap\ldots\cap\mathfrak{m}_q$$

его радикал. Тогда отделимое пополнение $\widehat{A}$ кольца A относительно $\mathfrak{r}$-адической топологии является полулокальным кольцом, канонически изоморфным произведению $\prod_{i=1}^{q}\widehat{A}_{\mathfrak{m}_i}$, где $\widehat{A}_{\mathfrak{m}_i}$ — локальное кольцо, являющееся отделимым пополнением локального кольца $A_{\mathfrak{m}_i}$ относительно $(\mathfrak{m}_iA_{\mathfrak{m}_i})$-адической топологии.

Упражнения

1) Пусть K — поле, A — кольцо многочленов $K[X, Y]$ от двух переменных и $\mathfrak{a}_n$ — главный идеал (XY^n) в A; последовательность $(\mathfrak{a}_n)_{n\geqslant 1}$ вместе с $\mathfrak{a}_0=A$ образует исчерпывающую и отделимую фильтрацию на A. Пусть $\mathfrak{b}$ — главный идеал (X) кольца A. Показать, что топология на идеале $\mathfrak{b}$, индуци-

рованная топологией кольца A, строго грубее топологии, определенной на этом же идеале фильтрацией, порожденной фильтрацией кольца A (и, *тем более*, эта последняя фильтрация отличается от фильтрации, индуцированной фильтрацией кольца A).

2) Пусть K — поле характеристики $\neq 2$ и A — кольцо $K[[X, Y]]$ формальных рядов от двух переменных.

а) Показать, что в кольце A главный идеал $\mathfrak{p} = (X^2 - Y^3)$ прост. (Если произведение $f(X, Y)g(X, Y)$ двух формальных рядов делится на $X^2 - Y^3$, то надо прежде всего заметить, что $f(T^3, T^2) = 0$ или $g(T^3, T^2) = 0$ в кольце формальных рядов $K[[T]]$; предполагая, например, что $f(T^3, T^2) = 0$, показать сначала, что $f(X, Y^2)$ делится на $X - Y^3$ и на $X + Y^3$, и затем, рассмотрев ряд $f(-Y^3 + X, Y^2)$, показать, что $f(X, Y^2)$ делится на $X^2 - Y^6$.)

б) Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал $AX + AY$ кольца A. Показать, что идеал $\mathfrak{p}$ замкнут в $\mathfrak{m}$-адической топологии на A (в которой кольцо A отделимо и полно); при этом идеал $\mathrm{gr}(\mathfrak{p})$ уже не является простым в кольце $\mathrm{gr}(A)$ (идеал $\mathfrak{p}$ предполагается наделенным фильтрацией, индуцированной фильтрацией кольца A).

3) Пусть A — фильтрованное кольцо и E — некоторый A-модуль конечного типа. Показать, что если E наделен фильтрацией, порожденной фильтрацией кольца A, то $\mathrm{gr}(E)$ представляет собой $\mathrm{gr}(A)$-модуль конечного типа (ср. упражнение 5в)).

4) Привести пример такого биективного A-линейного отображения $u\colon E \to F$, где E и F — два фильтрованных A-модуля, которое было бы согласовано с фильтрациями, но отображение $\mathrm{gr}(u)$ не являлось бы ни инъективным, ни сюръективным. (Положить $E = A$, $F = A$ и наделить их различными фильтрациями, а в качестве u взять тождественное отображение.)

5) Пусть A — фильтрованное коммутативное кольцо, причем его фильтрация $(\mathfrak{a}_n)_{n\geqslant 0}$ такова, что $\mathfrak{a}_0 = A$.

а) Для того чтобы кольцо $\mathrm{gr}(A)$ было порождено семейством элементов, степени которых ограничены, необходимо и достаточно, чтобы существовало целое число q со следующим свойством: для любого целого числа n выполняется равенство $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n+1} + \mathfrak{b}_n$, в котором $\mathfrak{b}_n$ представляет собой сумму идеалов $\mathfrak{a}_1^{\alpha_1}\mathfrak{a}_2^{\alpha_2} \dots \mathfrak{a}_q^{\alpha_q}$, взятую по всем системам целых чисел $\alpha_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant q)$, таких, что $\sum_{i=1}^{q} i\alpha_i = n$. Тогда $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n+k} + \mathfrak{b}_n$ для всякого $k > 0$.

б) Для того чтобы кольцо $\mathrm{gr}(A)$ было нётеровым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие три условия: кольцо $A/\mathfrak{a}_1$ является нётеровым; имеет место условие п. а) и для $i \leqslant q$ факторгруппы $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$ представляют собой $(A/\mathfrak{a}_1)$-модули конечного типа (воспользоваться следствием 4 теоремы 2 п° 10).

в) Пусть K — поле и A — кольцо многочленов $K[X, Y]$ от двух переменных. На множестве одночленов X^mY^n вводится следующим образом отношение совершенного порядка: $X^mY^n \leqslant X^pY^q$, если $m + n \leqslant p + q$ или если $m + n = p + q$, но $m \leqslant p$. Пусть (M_k) — последовательность одночленов от X, Y, возрастающая относительно порядка, и пусть $\mathfrak{a}_n$ — идеал в A, порожденный одночленами M_k с индексами $k \leqslant n$. Показать, что $(\mathfrak{a}_n)$ является фильтрацией, согласованной со структурой кольца A; кольцо $\mathrm{gr}(A)$, взятое относительно этой фильтрации, обладает делителями нуля и не является нётеровым, хотя A — нётерово целостное кольцо (воспользоваться критерием пункта б)); в частности, группа $\mathrm{gr}(\mathfrak{a}_1)$ (наделенная фильтрацией, индуцированной на $\mathfrak{a}_1$ фильтрацией кольца A) не является $(\mathrm{gr}(A))$-модулем конечного типа, хотя $\mathfrak{a}_1$ представляет собой A-модуль конечного типа (ср. § 1, п° 2, следствие предложения 1).

¶ 6) Пусть A — коммутативное кольцо, E и F — два A-модуля, (E_n) (соответственно (F_n)) — исчерпывающая фильтрация на E (соответственно на F),

образованная A-подмодулями. На тензорном произведении $G = E \otimes_A F$ мы будем рассматривать исчерпывающую фильтрацию, образованную суммами $G_n = \sum_{i+j=n} \mathrm{Im}\,(E_i \otimes_A E_j)$.

а) Показать, что композиции канонических гомоморфизмов

$$(E_i/E_{i+1}) \otimes_A (F_j/F_{j+1}) \to (E_i \otimes_A F_j)/(\mathrm{Im}\,(E_i \otimes_A F_{j+1}) + \mathrm{Im}\,(E_{i+1} \otimes_A F_j)) \to G_{i+j}/G_{i+j+1}$$

представляют собой ограничения сюръективного градуированного гомоморфизма степени 0 (называемого каноническим) $\mathrm{gr}(E) \otimes_A \mathrm{gr}(F) \to \mathrm{gr}(E \otimes_A F)$.

б) Показать, что если $\mathrm{gr}(E)$ является плоским A-модулем, то A-модули E_m/E_n при $m \leqslant n$, а также A-модули E/E_n при всех $n \in \mathbf{Z}$ являются плоскими.

в) Будем в дальнейшем считать, что $\mathrm{gr}(E)$ — плоский A-модуль и что E также является плоским A-модулем (второе предположение следует из первого, когда (E_n) представляет собой дискретную фильтрацию). Тогда модули $H_{ij} = E_i \otimes_A F_j$ канонически отождествляются с подмодулями в $G = E \otimes_A F$ (гл. I, § 2, n° 5, предположение 4). Показать, что для любых двух конечных подмножеств R, S в $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ имеет место равенство

$$\Big(\sum_{(i,\,j)\in R} H_{ij}\Big) \cap \Big(\sum_{(h,\,k)\in S} H_{hk}\Big) = \sum H_{\sup(i,\,h),\ \sup(j,\,k)}, \qquad (*)$$

где в сумме справа (i, j, h, k) пробегают множество $R \times S$. (Когда оба множества R и S состоят из одного элемента, надо применить предложение 7 из гл. I, § 2, n° 6. Если p — наибольший из индексов i, h, встречающихся среди элементов множеств R или S, а q — наименьший индекс в том же множестве чисел j и k из R или S, то надо рассмотреть образы обеих частей равенства (*) относительно канонического гомоморфизма $E \otimes_A F_q \to (E/E_p) \otimes_A F_q$ и провести рассуждения индукцией по $\mathrm{Card}(R) + \mathrm{Card}(S)$.)

г) Вывести из п. в), что канонический гомоморфизм, определенный в а), является в этом случае биективным.

7) Пусть A — коммутативное кольцо, E — некоторый A-модуль, F — подмодуль в E, B — внешняя алгебра $\Lambda(E)$ и $\mathfrak{J}$ — двусторонний идеал в B, порожденный каноническими образами в B элементов подмодуля F. Пусть $\mathrm{gr}^{\mathfrak{J}}(B)$ — градуированное кольцо, ассоциированное с кольцом B относительно $\mathfrak{J}$-адической фильтрации.

а) Определить сюръективный канонический гомоморфизм A-алгебр (не градуированных) $(\Lambda(F)) \otimes_A^g (\Lambda(E/F)) \to \mathrm{gr}^{\mathfrak{J}}(B)$ (где рассматривается *левое* тензорное произведение градуированных алгебр (*Algèbre*, chap. III, 3e éd.)).

б) Показать, что если подмодуль F обладает дополнением в модуле E, то гомоморфизм, определенный в а), является изоморфизмом.

в) Положим $A = \mathbf{Z}$, $E = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, $F = 2\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$; показать, что в этом случае гомоморфизм, определенный в п. а), не инъективен.

8) Пусть A — фильтрованное кольцо, (A_n) — его фильтрация, E — фильтрованный A-модуль и (E_n) — его фильтрация. Показать, что если $A_0 = A$ и $E_0 = E$, то отображение $(a, x) \to ax$ модуля $A \times E$ в E равномерно непрерывно в топологиях, определенных данными фильтрациями.

9) Привести пример двух фильтрованных колец A, B с отделимыми и исчерпывающими фильтрациями и несюръективного гомоморфизма u: $A \to B$, согласованного с этими фильтрациями и такого, что $\mathrm{gr}(u)$ — биективное отображение. Получить отсюда контрпример к следствию 1 предложения 12, когда кольцо A не предполагается полным, а также контрпример к предложению 13, когда модуль E не предполагается модулем конечного типа (воспользоваться упражнением 3б) из *Алгебры*, гл. VIII, § 7).

10) Пусть A — нётерово кольцо и σ — некоторый автоморфизм этого кольца. Показать, что кольцо E, определенное в упражнении 10б) из *Алгебры*, гл. IV, § 5, является нётеровым кольцом (слева и справа).

11) Показать, что если E — векторное пространство размерности $\geqslant 2$ над полем, то тензорная алгебра пространства E представляет собой кольцо, не являющееся нётеровым ни слева, ни справа (если a, b — два линейно независимых вектора в E, то рассмотреть левый идеал (или правый идеал), порожденный элементами $a^n b^n$ при $n \geqslant 1$).

¶ 12) Пусть K — поле, A — кольцо $K[X_\iota]_{\iota \in I}$ многочленов над K от произвольного бесконечного множества переменных, $\mathfrak{m}$ — идеал (максимальный) в A, порожденный элементами X_ι. Если положить $A_i = A/\mathfrak{m}^{i+1}$, то группы A_i и канонические гомоморфизмы h_{ij}: $A/\mathfrak{m}^{j+1} \to A/\mathfrak{m}^{i+1}$ при $i \leqslant j$ удовлетворяют условиям предложения 14; кольцо $\varprojlim A_i$ представляет собой пополнение $\widehat{A}$ кольца A относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии и ядро канонического гомоморфизма $\widehat{A} \to A_i$ равно $(\mathfrak{m}^i)\widehat{\ }$ — замыканию идеала $\mathfrak{m}^i$ в кольце $\widehat{A}$.

а) Показать, что пополнение $\widehat{A}$ канонически отождествляется с кольцом формальных рядов от переменных X_i, имеющих лишь *конечное число* членов данной степени (*Алгебра*, гл. IV, § 5, упражнение 1).

б) Будем считать в дальнейшем, что $I = \mathbf{N}$. Показать, что $\widehat{\mathfrak{m}} \neq \widehat{A} \cdot \mathfrak{m}$ (рассмотреть формальный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} X_n^n$).

в) Предположим, что K — конечное поле. Показать, что $(\widehat{\mathfrak{m}})^2 \neq (\mathfrak{m}^2)\widehat{\ }$. (Сначала надо доказать следующий результат: для любого целого $k > 0$ существует такое целое число n_k, что при всяком $n \geqslant n_k$ существует однородный многочлен F_n степени n от n^2 переменных с коэффициентами в K, не являющийся суммой членов степени n ни в каком миогочлене вида $P_1Q_1 + \ldots + P_kQ_k$, где P_i и Q_i — многочлены *без свободного члена* относительно тех же n^2 переменных).

Получить отсюда, что кольцо $\widehat{A}$ не является полным в $\widehat{\mathfrak{m}}$-адической топологии.

13) Пусть K — поле, $A = K[[X]]$ — кольцо формальных рядов, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал, так что A отделимо и полно в $\mathfrak{m}$-адической топологии (n° 6, следствие предложения 6). Рассмотрим на аддитивной группе A такую фильтрацию (E_n), что $E_0 = A$ и E_n является пересечением идеала $\mathfrak{m}^n$ и кольца $K[X]$; эта фильтрация исчерпывающая и отделимая, а топология $\mathscr{T}$, определенная ею на A, согласована со структурой аддитивной группы кольца A и является более тонкой, чем $\mathfrak{m}$-адическая топология; однако группа A не является полной группой относительно топологии $\mathscr{T}$ (рассмотреть последовательность многочленов $(1 - X^n)/(1 - X)$).

14) Пусть A — любое кольцо (не обязательно коммутативное) и E — левый A-модуль. Говорят, что топология на модуле E *линейна*, если она инвариантна относительно переноса и если 0 обладает фундаментальной системой окрестностей, являющихся подмодулями модуля E; в этом случае говорят, что модуль E *линейно топологизирован*. Любая линейная топология на E согласована со структурой его аддитивной группы и определяет на E структуру топологического A-модуля, когда A наделено дискретной топологией. На произвольном A-модуле дискретная топология и наименее тонкая топология линейны.

а) Если модуль E линейно топологизирован и F — подмодуль в E, то топология, индуцированная на F, и фактортопология топологии E относительно F являются линейными. Если $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — проективная система линейно топологизированных A-модулей, где $f_{\alpha\beta}$ — непрерывные линейные отображения, то топологический A-модуль $\varprojlim E_\alpha$ линейно топологизирован.

б) Пусть E — линейно топологизированный A-модуль. Существует фундаментальная система $(V_\lambda)_{\lambda \in L}$ окрестностей нуля в E, образованная открытыми (и замкнутыми) подмодулями; если $\varphi_{\lambda\mu}\colon E/V_\mu \to E/V_\lambda$ — каноиическое отображение в случае $V_\lambda \supset V_\mu$, то семейство $(E/V_\lambda, \varphi_{\lambda\mu})$ является проективной системой *дискретных* A-модулей; топологический A-модуль $\widetilde{E} = \varprojlim E/V_\lambda$ отождествляется с отделимым пополнением модуля E, который, следовательно, является линейно топологизированиым (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 7, n° 3).

в) Отделимый линейно топологизированный A-модуль E дискретен, если он артинов или если существует наименьший элемеит в множестве отличных от нуля подмодулей модуля E.

15) а) Пусть E — линейно топологизированный A-модуль (упражнение 14). Для того чтобы базис B фильтра на модуле E, образоваиный аффинными линейными многообразиями, обладал точкой прикосновения, необходимо и достаточно, чтобы существовала база сходящегося фильтра $\mathfrak{B}' \supset \mathfrak{B}$, образованная аффинными линейными многообразиями. Говорят, что модуль E *линейно компактен*, если он отделим и если всякий базис фильтра на E, состоящий из аффинных линейных многообразий, обладает по крайней мере одной точкой прикосновения. Любой артинов модуль линейно компактен в дискретной топологии. Всякий линейно компактный подмодуль отделимого лиинейно топологизированного модуля F замкнут в F.

б) Если E — линейно компактный A-модуль и u — непрерывное линейное отображение из E в какой-либо отделимый линейно топологизированный A-модуль F, то $u(E)$ является линейно компактным подмодулем модуля F.

в) Пусть E — отделимый лиинейно топологизированный A-модуль и F — замкнутый подмодуль в нем. Для линейной компактиости модуля E необходимо и достаточно, чтобы линейно компактными были модули F и E/F.

г) Всякое произведение линейно компактных модулей линейно компактно (рассмотреть базис максимального фильтра в семействе базисов фильтра, образованных аффинными линейными многообразиями).

д) Пусть $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ — проективная система линейно топологизированных модулей с фильтрующимся множеством индексов. Предположим, что $f_{\alpha\beta}$ являются непрерывными линейными отображениями и что для $\alpha \leqslant \beta$ множество $f_{\alpha\beta}^{-1}(0)$ представляет собой линейно компактный подмодуль модуля E_β. Пусть $E = \varprojlim E_\alpha$ и f_α — каноническое отображение $E \to E_\alpha$; показать, что для любого α имеет место равенство $f_\alpha(E) = \bigcap_{\alpha \leqslant \beta} f_{\alpha\beta}(E_\beta)$ (в частности, если отображения $f_{\alpha\beta}$ сюръективны, то сюръективны и отображения f_α) и что множество $f_\alpha^{-1}(0)$ лиинейно компактио (воспользоваться г) и теоремой 1 из *Общей топологии*, 1968, гл. I, Приложение, n° 2).

¶ 16) а) Пусть E — отделимый линейно топологизированный A-модуль. Показать, что следующие свойства эквивалентны:

α) Модуль E линейно компактеи (упражнение 15).

β) Для любого непрерывного линейного отображения u модуля E в какой-либо отделимый линейно топологизированиый A-модуль F модуль $u(E)$ является замкнутым подмодулем модуля F.

γ) Для любой линейной топологии (отделимой или нет) на E, являющейся менее тонкой, чем задаиная топология, модуль E полон.

δ) Модуль E полон и имеется фундаментальная система (U_λ) открытых окрестностей нуля в E, состоящая из подмодулей и такая, что E/U_λ являются линейно компактными дискретными A-модулями (ср. § 3, упражнение 5).

(Для доказательства того, что из γ) следует δ), рассмотреть открытый подмодуль F модуля E и базис фильтра $\mathfrak{B}$ иа E/F, образованный аффиииыми

линейными многообразиями. Для любого $V \in \mathfrak{B}$ пусть M_V обозначает прообраз в модуле E направляющего подмодуля для V в E/F; рассмотреть на E линейную топологию, в которой M_V образуют фундаментальную систему окрестностей нуля.)

б) Пусть E — отделимый линейно топологизированный A-модуль и M — линейно компактный подмодуль в E. Показать, что для любого замкнутого подмодуля F модуля E модуль $F + M$ замкнут в E (рассмотреть образ модуля M в фактормодуле E/F).

в) Пусть E — линейно компактный A-модуль и F — отделимый линейно топологизированный A-модуль. Показать, что для любого замкнутого подмодуля M прямого произведения $E \times F$ проекция модуля M на F замкнута. Обратное также верно (ср. *Общая топология*, 1968, гл. I, § 10, п° 2).

г) Пусть E — линейно компактный A-модуль и u — непрерывное линейное отображение модуля E в какой-либо отделимый линейно топологизированный A-модуль F. Показать, что для всякого базиса фильтра $\mathfrak{B}$ на E, образованного аффинными линейными многообразиями, образ относительно u множества точек прикосновения для $\mathfrak{B}$ представляет собой множество точек прикосновения для $u(\mathfrak{B})$. В частности, для любого замкнутого подмодуля M модуля E имеет место равенство $\bigcap_{N \in \mathfrak{B}} (M+N) = M + \bigcap_{N \in \mathfrak{B}} N$.

17) Говорят, что на A-модуле E линейная топология $\mathscr{T}$ *минимальна*, если она отделима и если не существует отделимой линейной топологии, строго меньшей тонкой, чем $\mathscr{T}$.

а) Для того чтобы отделимая линейная топология $\mathscr{T}$ на модуле E была минимальной, необходимо и достаточно, чтобы всякий базис фильтра $\mathfrak{B}$ на E, образованный аффинными линейными многообразиями и имеющий лишь одну предельную точку, сходился к этой точке. (Для доказательства необходимости условия заметить, что когда M пробегает базис $\mathfrak{B}$ и V — фундаментальная система окрестностей нуля, состоящая из подмодулей, $M + V$ пробегает базис фильтра, имеющий те же предельные точки, что и базис $\mathfrak{B}$. Для доказательства достаточности обратить внимание на то, что базис фильтра, образованный открытыми подмодулями, пересечение которых равно 0, представляет собой фундаментальную систему окрестностей нуля в некоторой отделимой линейной топологии, менее тонкой, чем $\mathscr{T}$.)

б) Для того чтобы дискретная топология на A-модуле E была минимальной, необходимо и достаточно, чтобы E был артиновым модулем.

в) Если топология $\mathscr{T}$ минимальна, то топология, индуцированная топологией $\mathscr{T}$ на любом замкнутом подмодуле модуля E, минимальна.

¶ 18) Пусть E — некоторый A-модуль; подмодуль $M \neq E$ называется *накрытым*, если в множестве ненулевых подмодулей модуля E/M существует наименьший элемент.

а) Показать, что всякий подмодуль $N \neq E$ модуля E является пересечением накрытых подмодулей (для любого $x \notin N$ рассмотреть максимальный элемент в множестве подмодулей модуля E, содержащих N и не содержащих x).

б) Пусть $\mathscr{T}$ — отделимая линейная топология на E, и пусть $\mathscr{T}^*$ — линейная топология, имеющая в качестве фундаментальной системы окрестностей нуля базис фильтра, порожденный накрытыми подмодулями модуля E, открытыми в топологии $\mathscr{T}$. Показать, что $\mathscr{T}^*$ — отделимая топология и что всякий замкнутый относительно $\mathscr{T}$ подмодуль является замкнутым и относительно $\mathscr{T}^*$ (заметить, что каждый замкнутый подмодуль относительно $\mathscr{T}$ представляет собой пересечение открытых подмодулей относительно $\mathscr{T}$). Получить отсюда, что если модуль E полон относительно $\mathscr{T}^*$, то он полон и относительно $\mathscr{T}$ (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 3, п° 5, предложение 9).

в) Предположим, что топология $\mathscr{T}$ линейно компактна. Показать, что тогда линейно компактна и топология $\mathscr{T}^*$, причем $\mathscr{T}^*$ является наименее тонкой среди отделимых линейных топологий, менее тонких, чем $\mathscr{T}$; в частности, $\mathscr{T}^*$ — минимальная линейная топология (упражнение 17). (Пусть $\mathfrak{B}$ — базис

фильтра, образованный замкнутыми относительно $\mathscr{T}$ подмодулями, пересечение которых равно 0; показать, что для любого открытого относительно $\mathscr{T}$ накрытого подмодуля U существует такой подмодуль $M \in \mathfrak{B}$, что $M \subset U$; воспользоваться для этого упражнением 16г).)

г) Пусть F — отделимый линейно топологизированный A-модуль и $\mathscr{T}_1$ — его топология; показать, что если u: $E \to F$ — линейное отображение, непрерывное относительно топологий $\mathscr{T}$ и $\mathscr{T}_1$, то u непрерывно и относительно топологий $\mathscr{T}^*$ и $\mathscr{T}_1^*$.

¶ 19) а) Пусть E — линейно компактный A-модуль. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) Для любого непрерывного линейного отображения u модуля E в какой-либо отделимый линейно топологизированный A-модуль F отображение u является строгим морфизмом (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 2, п° 8) модуля E в F.

β) Для любого замкнутого подмодуля F модуля E фактортопология на E/F является минимальной топологией (упражнение 17).

γ) Модуль E полон и имеется фундаментальная система (U_λ) открытых окрестностей нуля модуля E, образованная подмодулями и такая, что E/U_λ являются артиновыми модулями.

(Для того чтобы доказать, что из γ) следует β), свести рассмотрения к случаю $F = 0$ и воспользоваться упражнениями 17 и 18.)

Когда модуль E удовлетворяет эквивалентным условиям α), β) и γ), он называется *строго линейно компактным*.

б) Пусть E — отделимый линейно топологизированный A-модуль и F — замкнутый подмодуль в E. Для того чтобы E был строго линейно компактным, необходимо и достаточно, чтобы строго линейно компактными были F и E/F.

в) Любой проективный предел строго линейно компактных модулей строго линейно компактен.

г) Пусть E — отделимый линейно топологизированный A-модуль и u — линейное отображение модуля E в какой-либо строго линейно компактный A-модуль F. Показать, что если график отображения u замкнут в модуле $E \times F$, то u — непрерывное отображение (воспользоваться упражнением 16в) и тем, что если M — замкнутый подмодуль в E и E/M — артинов модуль, то M — открытый подмодуль в E).

¶ 20) а) Показать, что дискретный линейно компактный модуль не может быть прямой суммой бесконечного семейства ненулевых подмодулей.

б) Привести пример минимальной линейной топологии (упражнение 17), не являющейся линейно компактной (рассмотреть прямую сумму бесконечного семейства простых попарно неизоморфных модулей).

в) Пусть E — такой линейно компактный модуль, что существует семейство простых его подмодулей, сумма которых плотна в E. Показать, что: 1° модуль E строго линейно компактен (применить а) к фактормодулю модуля E по некоторому открытому подмодулю); 2° модуль E изоморфен произведению (топологическому) семейства дискретных простых модулей. (Рассмотреть множества $\mathfrak{H}$ максимальных открытых подмодулей модуля E, таких, что для любой конечной последовательности $(G_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ из n различных элементов из $\mathfrak{H}$ модуль $E \Big/ \left(\bigcap_{k=1}^{n} G_k \right)$ представляет собой прямую сумму n простых подмодулей. Показать, что существует максимальное (относительно включения) множество $\mathfrak{H}$ и что пересечение всех подмодулей G, принадлежащих такому множеству, равно нулю; воспользоваться тем фактом, что $\{0\}$ является пересечением максимальных открытых подмодулей, а также тем, что для любого максимального открытого подмодуля G модуля E существует по крайней мере один простой подмодуль модуля E, не содержащийся в G. В заключение

доказательства использовать тот факт, что E — строго линейно компактный модуль.)

г) Вывести из пункта в), что любое линейно компактное векторное пространство над телом K строго линейно компактно и изоморфно некоторому произведению K_s^I.

¶ 21) Напомним, что некоторая топология на кольце A называется *линейной* (слева), если она является линейной топологией на A-модуле A_s и если она согласована со структурой кольца на A (гл. II, § 2, упражнение 16). Говорят, что топологическое кольцо A *линейно компактно* (слева) (соответственно *строго линейно компактно* (слева)), если A_s является линейно компактным (соответственно строго линейно компактным) A-модулем.

а) Показать, что если A линейно компактно слева относительно топологии $\mathscr{T}$, то топология $\mathscr{T}^*$, определенная в упражнении 18б), вновь оказывается согласованной со структурой кольца на A (воспользоваться упражнением 18г)).

б) Предположим, что кольцо A коммутативно; пусть $u \neq 0$ — некоторый идемпотент из $A/\mathfrak{R}$, где $\mathfrak{R}$ — радикал кольца A. Показать, что если A линейно компактно относительно дискретной топологии, то существует, и притом единственный, идемпотент $e \in A$, такой, что его образ в $A/\mathfrak{R}$ равен u. (Показать, что среди аффинных линейных многообразий $x + \mathfrak{b}$, где $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{R}$ и $x^2 - x \in \mathfrak{b}$, которые содержатся в классе u, существует минимальный элемент $e + \mathfrak{a}$. Получить отсюда, что $e^2 = e$ и $\mathfrak{a} = 0$, рассмотрев элемент $e^2 - e = r$ и показав, что $r \in Ar^2$, с помощью упражнения 10а) из *Алгебры*, гл. VIII, § 6. Доказать единственность элемента e, показав, что если e_1, e_2 — два идемпотента в A, для которых $e_1 e_2 \in \mathfrak{R}$, то $e_1 e_2 = 0$.)

в) Показать, что любое коммутативное кольцо A, являющееся линейно компактным относительно дискретной топологии, представляет собой прямое произведение локальных колец (линейно компактных в дискретной топологии). (Рассмотреть сначала случай $\mathfrak{R} = 0$, воспользовавшись упражнением 15б) и предложением 5 гл. II, § 1, п° 2, а затем применить пункт б) к идемпотентам кольца $A/\mathfrak{R}$).

г) Показать, что всякое линейное компактное (соответственно строго линейно компактное) коммутативное кольцо A является произведением семейства линейно компактных (соответственно строго линейно компактных) локальных колец. (Пусть $(\mathfrak{m}_\lambda)$ — семейство открытых максимальных идеалов кольца A; для любого открытого идеала $\mathfrak{a}$, содержащегося в $\mathfrak{m}_\lambda$, пусть $A'_\lambda \times A''_\lambda$ есть разложение кольца $A/\mathfrak{a}$ в прямое произведение двух колец, определенное в в), где A'_λ — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}_\lambda/\mathfrak{a}$; пусть $e'_\lambda(\mathfrak{a})$ — единичный элемент кольца A'_λ, рассмотренный как класс $\bmod \mathfrak{a}$ в A; элементы $e'_\lambda(\mathfrak{a})$ образуют базис фильтра, который сходится в A к идемпотенту e_λ и Ae_λ представляет собой замкнутый идеал в кольце A, в котором e_λ служит единичным элементом. Показать, что кольцо Ae_λ локально и что A изоморфно произведению колец Ae_λ.)

¶ 22) а) Пусть A — локальное кольцо и $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал. Показать, что если для некоторой линейной топологии $\mathscr{T}$ на A кольцо A является строго линейно компактным, то топология $\mathscr{T}$ менее тонкая, чем $\mathfrak{m}$-адическая топология.

б) Пусть A — коммутативное кольцо и $\mathfrak{m}$ — идеал в нем. Для того чтобы кольцо A было строго линейно компактным в $\mathfrak{m}$-адической топологии, необходимо и достаточно, чтобы оно было отделимо и полно в этой топологии, чтобы факторкольцо $A/\mathfrak{m}$ было артиновым кольцом и чтобы $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ был $(A/\mathfrak{m})$-модулем конечной длины *(другими словами, A представляет собой полное полулокальное нётерово кольцо).*

в) Пусть I — бесконечное множество индексов, K — поле, $A = K[[X_\iota]]_{\iota \in I}$ — алгебра формальных рядов от семейства перемеиных $(X_\iota)_{\iota \in I}$ (*Алгеб-*

ра, гл. IV, § 5, упражнение 1); кольцо A является локальным. Кольцо A как векторное пространство над K можно отождествить с $K^{\mathbf{N}^{(I)}}$; если K наделить дискретной топологией, а A — топологией $\mathscr{T}$ произведения, то показать, что $\mathscr{T}$ является линейной топологией на кольце A, относительно которой A строго линейно компактно. Если $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца A, то показать, что A не является полным отиосительио $\mathfrak{m}$-адической топологии, посредством такого же рассуждения, как и в упражиении 12в).

¶ 23) Пусть A — коммутативное кольцо, снабженное линейной топологией $\mathscr{T}$.

а) Показать, что идеалы $\mathfrak{a}$ кольца A, замкнутые относительно $\mathscr{T}$ и такие, что факторкольца $A/\mathfrak{a}$ артиновы, образуют фундаментальную систему окрестностей 0 для некоторой линейной топологии $\mathscr{T}^{(c)}$ на кольце A, менее тонкой, чем $\mathscr{T}$ (воспользоваться *Алгеброй,* гл. III, § 2, упражнение 12); справедливо следующее равенство: $(\mathscr{T}^{(c)})^{(c)} = \mathscr{T}^{(c)}$. Пусть B — кольцо, являющееся отделимым пополнением кольца A относительно топологии $\mathscr{T}^{(c)}$; показать, что B строго линейно компактно; говорят, что B есть строго линейно компактное кольцо, *ассоциированное* с кольцом A.

б) Пусть $\mathscr{T}_\omega(A)$ — дискретная топология на A и $\mathscr{T}_c(A)$ — топология $(\mathscr{T}_\omega(A))^{(c)}$. Для того чтобы топология $\mathscr{T}^{(c)}$ на кольце A была отделимой, необходимо и достаточно, чтобы топология $\mathscr{T}$ была отделима и для всякого открытого относительно $\mathscr{T}$ идеала $\mathfrak{b}$ кольца A была отделимой топология $\mathscr{T}_c(A/\mathfrak{b})$. *Если A представляет собой кольцо неднскретного нормирования ранга 1 (гл. VI), то топология $\mathscr{T}_c(A)$ не является отделимой.*

в) Предположим, что кольцо A линейно компактно отиосительно топологии $\mathscr{T}$. Тогда A полно (но, вообще говоря, неотделимо) относительно $\mathscr{T}^{(c)}$. Для того чтобы топология $\mathscr{T}^{(c)}$ была отделимой, необходимо и достаточно, чтобы на A существовала линейная топология, строго линейно компактная и менее тонкая, чем $\mathscr{T}$; в этом случае $\mathscr{T}^{(c)}$ является единственной топологией, обладающей указанными свойствами.

в) Пусть E — линейно топологизироваиный и строго линейно компактный A-модуль. Показать, что когда кольцо A наделено топологией $\mathscr{T}_c(A)$, A-модуль E является топологическим A-модулем (заметить, что если F — артинов A-модуль, то для любого $x \in F$ аннулятор $\mathfrak{a}$ элемента x таков, что $A/\mathfrak{a}$ — артиново кольцо). Получить отсюда, что если B — отделимое пополнение кольца A относительно топологии $\mathscr{T}_c(A)$, то E можно рассматривать как топологический B-модуль; имея в виду, что кольцо B изоморфно произведению строго лииейно компактных локальных колец B_λ (упражнение 21г)), показать, что модуль E изоморфен произведению строго линейно компактных подмодулей E_λ, где E_λ аннулируется кольцами B_μ с индексом $\mu \neq \lambda$ и по этой причине E_λ можно рассматривать как топологический B_λ-модуль (если e_λ — единичный элемент из B_λ, то положить $E_\lambda = e_\lambda E$).

24) Для любого коммутативного кольца A обозначим через $\mathscr{T}_m(A)$ линейную топологию, в которой фундаментальная система окрестностей нуля образована произведениями (равными пересечениям) конечного числа степеней максимальных идеалов (ср. п° 13, предложение 17); обозначим через $\mathscr{T}_u(A)$ линейную топологию, в которой фуидаментальная система окрестностей нуля состоит из всех идеалов кольца A, отличных от $\{0\}$.

а) Показать, что топология $\mathscr{T}_c(A)$ (упражиение 23) менее тонкая, чем $\mathscr{T}_m(A)$ (обратить внимаине на то, что радикал артиова кольца нильпотентен). Привести пример, когда $\mathscr{T}_c(A) \neq \mathscr{T}_m(A)$ (ср. упражнение 22в)). *Если A является кольцом недискретного иормирования ранга 1 (гл. VI), то $\mathscr{T}_c(A) = \mathscr{T}_m(A)$ и $\mathscr{T}_u(A) \neq \mathscr{T}_m(A)$.*

б) Топология $\mathscr{T}_m(A)$ является наименее тонкой среди линейных топологий на кольце A, для которых максимальные идеалы кольца A замкнуты и любая степень открытого в A идеала является открытым идеалом (заметить, что для всякой линейной топологии на A, в которой максимальный идеал $\mathfrak{m}$ замкнут, этот идеал $\mathfrak{m}$ обязательно является и открытым).

в) Если кольцо A нётерово, то $\mathscr{T}_{\mathfrak{m}}(A) = \mathscr{T}_c(A)$ (обратить внимание на то, что если $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в A, то $A/\mathfrak{m}^k$ — артиново кольцо при любом целом $k \geqslant 1$, ибо $\mathfrak{m}^h/\mathfrak{m}^{h+1}$ представляет собой $(A/\mathfrak{m})$-модуль обязательно конечной длины). Привести пример нётерова локального кольца A, для которого $\mathscr{T}_m(A) \neq \mathscr{T}_u(A)$ (рассмотреть локальное кольцо кольца многочленов над полем).

25) Пусть A — топологическое кольцо и E — левый A-модуль конечного типа. Показать, что на E существует топология (называемая *канонической*), согласованная со структурой A-модуля и являющаяся более тонкой, чем любая другая (записать модуль E в виде A_s^n/R, наделить A_s^n топологией произведения, а E — фактортопологией). Если E — топологический A-модуль и $u: E \to E'$ — какое-либо A-линейное отображение, то показать, что u непрерывно в канонической топологии модуля E. Если, кроме того, модуль E' является модулем конечного типа, наделенным канонической топологией, то u представляет собой строгий морфизм. Если топология кольца A определяется фильтрацией (A_n), то показать, что каноническая топология модуля E определяется фильтрацией $(A_n E)$.

26) Пусть A — коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в нем, $(a_\lambda)_{\lambda \in L}$ — некоторая система образующих идеала $\mathfrak{m}$ и $\hat{A}$ — отделимое пополнение кольца A относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии.

Показать, что если A' обозначает кольцо формальных рядов относительно семейства переменных $(T_\lambda)_{\lambda \in L}$, имеющих лишь конечное число членов данной степени (упражнение 12), то $\hat{A}$ изоморфно факторкольцу кольца A' по замыканию $\mathfrak{b}$ идеала в A', порожденного элементами $T_\lambda - a_\lambda$ (воспользоваться теоремой 1 п° 8). В частности, кольцо $\mathbf{Z}_p$ целых p-адических чисел изоморфно факторкольцу $\mathbf{Z}[[T]]/(T - p)$.

¶ 27) а) Пусть A — коммутативное кольцо, наделенное линейной топологией. Для любой мультипликативной системы S кольца A обозначим через $A\{S^{-1}\}$ отделимое пополнение кольца $S^{-1}A$, наделенного топологией, в которой фундаментальная система окрестностей нуля состоит из идеалов $S^{-1}U_\lambda$, где (U_λ) — фундаментальная система окрестностей нуля в A, образованная идеалами кольца A. Показать, что $A\{S^{-1}\}$ канонически изоморфно проективному пределу колец $S_\lambda^{-1}(A/U_\lambda)$, где S_λ — канонический образ системы S в A/U_λ. Если $\hat{A}$ — отделимое пополнение кольца A, то $A\{S^{-1}\}$ канонически изоморфно кольцу $\hat{A}\{S'^{-1}\}$, где S' — канонический образ системы S в кольце $\hat{A}$.

б) Для того чтобы кольцо $A\{S^{-1}\}$ было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы в кольце A нуль был точкой прикосновения множества S. Привести пример, когда кольцо A отделимо и полно, но $S^{-1}A$ не обладает этими свойствами в топологии, определенной в п. а).

в) Пусть u — произвольный непрерывный гомоморфизм кольца A в линейно топологизированное кольцо B, являющееся полным и отделимым, и пусть $u(S)$ состоит из обратимых элементов кольца B. Показать, что $u = u' \circ j$, где $j: A \to A\{S^{-1}\}$ — каноническое отображение и u' — некоторое непрерывное отображение; кроме того, u' определяется единственным образом.

г) Пусть S_1, S_2 — две мультипликативные системы кольца A и S_2' — канонический образ системы S_2 в $A\{S^{-1}\}$. Определить канонический изоморфизм кольца $A\{(S_1S_2)^{-1}\}$ на $A\{S_1^{-1}\}\{S_2'^{-1}\}$.

д) Пусть $\mathfrak{a}$ — *открытый* идеал кольца A и $\mathfrak{a}(S^{-1})$ — отделимое пополнение $S^{-1}\mathfrak{a}$ относительно топологии, индуцированной топологией кольца частных $S^{-1}A$; показать, что $\mathfrak{a}\{S^{-1}\}$ канонически отождествляется с некоторым открытым идеалом кольца $A\{S^{-1}\}$ и что дискретное кольцо $A\{S^{-1}\}/\mathfrak{a}\{S^{-1}\}$ изоморфно кольцу $S^{-1}(A/\mathfrak{a})$. Обратно, если $\mathfrak{a}'$ — открытый идеал кольца $A\{S^{-1}\}$, то его прообраз $\mathfrak{a}$ в A является таким открытым идеалом, что $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}\{S^{-1}\}$. В ча-

стности, отображение $\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}\{S^{-1}\}$ представляет собой возрастающее биективное отображение множества открытых простых идеалов кольца A, не пересекающихся с S, на множество открытых простых идеалов кольца $A\{S^{-1}\}$.

е) Пусть $\mathfrak{p}$ — *открытый* простой идеал кольца A, и пусть $S = A - \mathfrak{p}$. Показать, что $A\{S^{-1}\}$ представляет собой локальное кольцо, поле вычетов которого изоморфно полю частных кольца $A/\mathfrak{p}$.

ж) Для любого элемента $f \in A$ обозначим через $A_{\{f\}}$ кольцо $A\{S_f^{-1}\}$, где S_f — мультипликативное множество степеней f^n $(n \geqslant 0)$. Когда f пробегает мультипликативную систему S кольца A, кольца $A_{\{f\}}$ образуют фильтрующуюся индуктивную систему колец, индуктивный предел которой обозначается через $A_{\{S\}}$ (без учета какой бы то ни было топологии). Определить канонический гомоморфизм

$$A_{\{S\}} \to A\{S^{-1}\}.$$

Показать, что, когда $S = A - \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ — открытый простой идеал в A, кольцо $A_{\{S\}}$ является локальным, канонический гомоморфизм $A_{\{S\}} \to A\{S^{-1}\}$ локален и поля вычетов колец $A_{\{S\}}$ и $A\{S^{-1}\}$ канонически изоморфны (ср. гл. II, § 3, упражнение 16).

з) Предположим, что топология на A есть $\mathfrak{m}$-адическая для некоторого идеала $\mathfrak{m}$ из A, что A отделимо и полно и что $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ является $(A/\mathfrak{m})$-модулем конечного типа. Показать, что если $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}\{S^{-1}\}$, то топология кольца $A' = A\{S^{-1}\}$ является $\mathfrak{m}'$-адической, что $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}A'$ и что $\mathfrak{m}'/\mathfrak{m}'^2$ есть $(A'/\mathfrak{m}')$-модуль конечного типа (воспользоваться предложением 14 n° 10)). Если A — нётерово кольцо, то нётерово и кольцо A'.

28) Пусть A — коммутативное кольцо, наделенное линейной топологией, E, F — два топологических A-модуля, являющихся линейно топологизированными. Когда V (соответственно W) пробегает множество открытых подмодулей модуля F (соответственно F), подмодули $\operatorname{Im}(V \otimes_A F) + \operatorname{Im}(E \otimes_A W)$ модуля $E \otimes_A F$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в $E \otimes_A F$ для некоторой топологии, согласованной со структурой модуля над топологическим кольцом A; эта топология называется *тензорным произведением* топологий, заданных на E и F. Отделимое пополнение $(E \otimes_A F)\hat{}$ этого A-модуля является $\hat{A}$-модулем и называется *пополненным тензорным произведением* модулей E и F.

а) Показать, что если (V_λ) (соответственно (W_μ)) — некоторая фундаментальная система окрестностей нуля в E (соответственно в F), образованная подмодулями, то $(E \otimes_A F)\hat{}$ канонически изоморфно проективному пределу проективной системы A-модулей $(E/V_\lambda) \otimes_A (F/W_\mu)$; вывести отсюда, что $(E \otimes_A F)\hat{}$ представляет собой $\hat{A}$-модуль, канонически изоморфный модулю $(\hat{E} \otimes_{\hat{A}} \hat{F})\hat{}$; этот модуль обозначается также через $\hat{E} \mathbin{\hat{\otimes}}_{\hat{A}} \hat{F}$.

б) Пусть E', F' — два топологических линейно топологизированных A-модуля, $u\colon E \to E'$, $v\colon F \to F'$ — два непрерывных A-линейных отображения; показать, что $u \otimes v\colon E \otimes F \to E' \otimes F'$ — непрерывное относительно тензорного произведения топологий отображение из $E \otimes F$ в $E' \otimes F'$. Обозначим через $u \mathbin{\hat{\otimes}} v$ непрерывное линейное отображение $(E \otimes F)\hat{} \to (E' \otimes F')\hat{}$, соответствующее отображению $u \otimes v$.

в) Пусть B, C — две коммутативные A-алгебры, наделенные такими линейными топологиями, что канонические отображениями $A \to B$, $A \to C$ непрерывны (для краткости в этом случае говорят, что B и C являются *топологическими A-алгебрами*). Показать, что кольцо $(B \otimes_A C)\hat{}$ канонически наделяется структурой топологической A-алгебры, называемой *пополненным тен-*

зорным произведением алгебр B и C. Определить канонические непрерывные представления $\rho\colon B \to (B \otimes_A C)\hat{}$, $\sigma\colon C \to (B \otimes_A C)\hat{}$, обладающие следующим свойством: для любой коммутативной топологической A-алгебры D, являющейся полной и отделимой, и любой пары непрерывных A-гомоморфизмов $u\colon B \to D$ и $v\colon C \to D$ существует, и притом единственный, непрерывный A-гомоморфизм $w\colon (B \otimes_A C)\hat{} \to D$, такой, что $u = w \circ \rho$ и $v = w \circ \sigma$.

г) Пусть $\mathfrak{m}$ — такой идеал кольца A, что топология на A является $\mathfrak{m}$-адической. Показать, что если модули E и F наделены $\mathfrak{m}$-адическими топологиями, то на $E \otimes_A F$ тензорное произведение топологий модулей E и F является $\mathfrak{m}$-адической топологией. Вывести отсюда, что модуль $(E \otimes_A F)\hat{}$ изоморфен проективным пределам

$$\varprojlim \left((E/\mathfrak{m}^{n+1}) \otimes_A F\right) \text{ и } \varprojlim \left(E \otimes_A (F/\mathfrak{m}^{n+1}F)\right).$$

29) Пусть A — коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — такой идеал в нем, что $\bigcap_{n \geqslant 0} \mathfrak{m}^n = 0$, и c — любой элемент из A, не являющийся делителем нуля. Показать, что коидукторы $\mathfrak{q}_n = \mathfrak{m}^n : Ac$ открыты в $\mathfrak{m}$-адической топологии и имеют нулевое пересечение. Если кольцо A является строго линейно компактным относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии (упражнение 22б)), то $(\mathfrak{q}_n)$ представляет собой фундаментальную систему окрестностей нуля в A относительно этой топологии.

30) Пусть K — бесконечное поле и A — кольцо формальных рядов $K[[X, Y]]$ от двух переменных, являющееся отделимым и полным нётеровым локальным кольцом. Построить такую мультипликативную систему S кольца A, чтобы кольцо $S^{-1}A$ не было полулокальным кольцом (если (λ_n) — бесконечная последовательность различных элементов поля K, то следует рассмотреть простые идеалы $\mathfrak{p}_n = A(X + \lambda_n Y)$ кольца A).

31) Показать, что если A — полулокальное кольцо, то полулокальным является и кольцо формальных рядов $A[[X]]$ (рассмотреть радикал этого кольца).

§ 3. $\mathfrak{m}$-адические топологии на нётеровых кольцах

Все фильтрации, рассматриваемые в этом параграфе, предполагаются исчерпывающими.

1. Хорошие фильтрации

Пусть A — фильтрованное коммутативное кольцо, E — фильтрованный A-модуль, (A_n) и (E_n) — фильтрации кольца A и модуля E соответственно. Предположим, что $A_0 = A$. В кольце многочленов $A[X]$ множество $A' = \sum_{n \geqslant 0} A_n X^n$ является *градуированной A-подалгеброй типа* $\mathbf{N}$; подгруппа $E' = \sum_{n \geqslant 0} E_n \otimes_A AX^n$ модуля $E \otimes_A A[X]$ представляет собой *градуированный A'-модуль* типа $\mathbf{N}$, так как

$$A_m X^m (E_n \otimes_A AX^n) \subset (A_m E_n \otimes_A AX^{m+n}) \subset E_{m+n} \otimes_A AX^{m+n}.$$

Определение 1. *Пусть A — коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в нем, E — некоторый A-модуль и (E_n) — фильтрация на аддитивной группе E, образованная подмодулями модуля E. Фильтрация (E_n) называется $\mathfrak{m}$-хорошей, если*

1° $\mathfrak{m}E_n \subset E_{n+1}$ *для каждого* $n \in \mathbf{Z}$;

2° *существует такое целое* n_0, *что* $\mathfrak{m}E_n = E_{n+1}$ *при* $n \geqslant n_0$.

В этом случае из индуктивных соображений следует, что $\mathfrak{m}^q E_n = E_{n+q}$ при $n \geqslant n_0$ и $q \geqslant 1$. Следует отметить, что условие 1° означает, что фильтрация (E_n) согласована со структурой A-модуля на E, когда кольцо A наделено $\mathfrak{m}$-адической фильтрацией. Очевидно, что на всяком A-модуле E $\mathfrak{m}$-адическая фильтрация является $\mathfrak{m}$-хорошей. Если некоторая фильтрация на A-модуле E $\mathfrak{m}$-хороша, то $\mathfrak{m}$-хороша и факторфильтрация на любом фактормодуле модуля E.

Теорема 1. *Пусть A — коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в A, E — некоторый A-модуль, (E_n) — фильтрация аддитивной группы E, образованная A-подмодулями конечного типа. Предположим, что $\mathfrak{m}E_n \subset E_{n+1}$ для каждого n. Пусть A' — градуированная подалгебра $\sum_{n\geqslant 0} \mathfrak{m}^n X^n$ кольца $A[X]$ и E' — градуированный A'-модуль $\sum_{n\geqslant 0} E_n \otimes_A AX^n$. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

а) *фильтрация (E_n) является $\mathfrak{m}$-хорошей;*

б) *E' является A'-модулем конечного типа.*

Предположим, что $\mathfrak{m}E_{n-1} = E_n$ для $n > n_0 \geqslant 0$. При $i \leqslant n_0$ пусть $(e_{ij})_{1\leqslant j\leqslant r_i}$ — некоторая конечная система образующих A-модуля E_i. Так как A-модуль $E_n \otimes_A AX^n$ порожден элементами $e_{nj} \otimes X^n$ при $0 \leqslant n \leqslant n_0$ и равен модулю $\mathfrak{m}^{n-n_0}E_{n_0} \otimes_A AX^n$ при $n > n_0$, то A'-модуль E' порожден элементами $e_{nj} \otimes X^n$ при $0 \leqslant n \leqslant n_0$ и $1 \leqslant j \leqslant r_n$. Следовательно, этот модуль имеет конечный тип.

Обратно, если E' — модуль конечного типа над кольцом A', то он порождается некоторым конечным семейством элементов вида $e_k \otimes X^{n(k)}$, где $e_k \in E_{n(k)}$. Пусть n_0 — наибольшее из целых чисел $n(k)$. Для $n \geqslant n_0$ и $f \in E_n$ имеет место, следовательно, равенство $f \otimes X^n = \sum_k t_k (e_k \otimes X^{n(k)})$, в котором $t_k \in A'$. Заменяя при необходимости элемент t_k его однородной компонентой степени $n - n(k)$, можно считать, что $t_k = a_k X^{n-n(k)}$ при $a_k \in \mathfrak{m}^{n-n(k)}$. Так как элемент X^n образует базис A-модуля AX^n, то равенство $f \otimes X^n = \left(\sum_k a_k e_k\right) \otimes X^n$ означает, что $f = \sum_k a_k e_k$. Следовательно, $E_n \subset \mathfrak{m}^{n-n_0}E_{n_0}$; поскольку обратное включение

очевидно, то

$$E_n = \mathfrak{m}^{n-n_0}E_{n_0},$$

откуда $E_n = \mathfrak{m}E_{n-1}$ для $n > n_0$.

Лемма 1. *Пусть A — нётерово коммутативное кольцо и $\mathfrak{m}$ — идеал в нем. Тогда подкольцо $A' = \sum_{n\geqslant 0} \mathfrak{m}^n X^n$ кольца $A[X]$ нётерово.*

Действительно, A' является A-алгеброй, порожденной множеством $\mathfrak{m}X$; поскольку кольцо A нётерово, $\mathfrak{m}X$ представляет собой A-модуль конечного типа и утверждение следует, таким образом, из следствия 3 теоремы 2, п° 10, § 2.

Предложение 1. *Пусть A — нётерово коммутативное кольцо и $\mathfrak{m}$ — идеал в нем. Наделим кольцо A $\mathfrak{m}$-адической фильтрацией. Пусть E, F — два фильтрованных A-модуля и j: $F \to E$ — инъективный гомоморфизм, согласованный с фильтрациями. Если E — модуль конечного типа и его фильтрация $\mathfrak{m}$-хороша, то и F является модулем конечного типа с $\mathfrak{m}$-хорошей фильтрацией.*

Так как модуль F изоморфен подмодулю в E, то он является модулем конечного типа, поскольку A — нётерово кольцо и модуль E имеет конечный тип. Пусть (E_n), (F_n) — фильтрации модулей E и F соответственно, которые образованы подмодулями конечного типа. Сохраним обозначения леммы 1 и положим $E' = \sum_{n\geqslant 0} E_n \otimes_A AX^n$, $F' = \sum_{n\geqslant 0} F_n \otimes_A AX^n$. Поскольку, согласно условию, F_n изоморфно подмодулю в E_n, модуль F' изоморфен некоторому подмодулю модуля E'. В силу теоремы 1, E' является A'-модулем конечного типа, а потому конечный тип имеет и модуль F', ибо кольцо A' — нётерово (лемма 1). Утверждение справедливо теперь в силу теоремы 1.

Следствие 1 (Артина — Риса). *Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в A, E — некоторый A-модуль конечного типа и F — подмодуль модуля E. Тогда фильтрация на F, индуцированная $\mathfrak{m}$-адической фильтрацией модуля E, $\mathfrak{m}$-хороша.*

Другими словами, существует такое целое n_0, что

$$\mathfrak{m}\left((\mathfrak{m}^n E) \cap F\right) = (\mathfrak{m}^{n+1}E) \cap F \tag{1}$$

для любого $n \geqslant n_0$.

Следствие 2. *Пусть A — нётерово коммутативное кольцо и $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — два идеала в нем. Тогда существует такое целое число $h > 0$, что $\mathfrak{a}^h \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{ab}$.*

Действительно, существует такое целое n, что $\mathfrak{a}^{n+1} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}(\mathfrak{a}^n \cap \mathfrak{b}) \subset \mathfrak{ab}$, в силу следствия 1, примененного к случаю $E = A$, $F = \mathfrak{b}$.

Следствие 3. *Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в A и x — элемент из A, не являющийся делителем нуля. Тогда существует такое целое $k > 0$, что для любого $n \geqslant k$ из включения $xy \in \mathfrak{m}^n$ следует включение $y \in \mathfrak{m}^{n-k}$.*

В самом деле, следствие 1, примененное к $E = A$, $F = Ax$, показывает, что существует такое k, для которого при любом $n \geqslant k$ имеет место соотношение $\mathfrak{m}^n \cap Ax = \mathfrak{m}^{n-k}(\mathfrak{m}^k \cap Ax)$. Следовательно, если $xy \in \mathfrak{m}^n$, то $xy \in \mathfrak{m}^n \cap Ax \subset \mathfrak{m}^{n-k}x$ и, поскольку x не является делителем нуля, $y \in \mathfrak{m}^{n-k}$.

В терминах кондукторов (гл. 1, § 2, n° 10) утверждение следствия 3 записывается в виде формулы

$$\mathfrak{m}^n : Ax \subset \mathfrak{m}^{n-k}. \tag{2}$$

Следствие 4. *Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал этого кольца, E — некоторый A-модуль конечного типа, (E_n) и (E'_n) — две фильтрации, образованные подмодулями модуля E. Предположим, что фильтрации (E_n) и (E'_n) согласованы со структурой A-модуля на E, если считать, что кольцо A наделено $\mathfrak{m}$-адической фильтрацией. Если фильтрация (E_n) $\mathfrak{m}$-хороша и если $E'_n \subset E_n$ при любом $n \in \mathbf{Z}$, то $\mathfrak{m}$-хороша и фильтрация (E'_n).*

Это частный случай предложения 1.

Лемма 2. *Пусть A, B — два нётеровых коммутативных кольца, φ: $A \to B$ — некоторый гомоморфизм этих колец, E — некоторый A-модуль конечного типа и F — какой-нибудь B-модуль конечного типа. Тогда $\mathrm{Hom}_A(E, \varphi_*(F))$ представляет собой B-модуль конечного типа.*

Действительно, согласно условию, существует сюръективный A-гомоморфизм v: $A^n \to E$; следовательно, отображение $u \to u \circ v$ группы $\mathrm{Hom}_A(E, \varphi_*(F))$ в $\mathrm{Hom}_A(A^n, \varphi_*(F))$ инъективно и, так как кольцо B нётерово, достаточно доказать, что $\mathrm{Hom}_A(A^n, \varphi_*(F))$ является B-модулем конечного типа. Но это получается немедленно, ибо указанный модуль изоморфен F^n.

Предложение 2. *Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в A и E, F — два A-модуля конечного типа. Если (F_n) — некоторая $\mathfrak{m}$-хорошая фильтрация на F, то подмодули $\mathrm{Hom}_A(E, F_n)$ образуют $\mathfrak{m}$-хорошую фильтрацию A-модуля $\mathrm{Hom}_A(E, F)$.*

Поскольку $\mathfrak{m}^k F_n \subset F_{n+k}$ при $n \in \mathbf{Z}$, $k \geqslant 0$, то

$$\mathfrak{m}^k \operatorname{Hom}_A(E, F_n) \subset \operatorname{Hom}_A(E, F_{n+k});$$

следовательно, семейство $(\operatorname{Hom}_A(E, E_n))_{n \in \mathbf{Z}}$ представляет собой фильтрацию на $\operatorname{Hom}_A(E, F)$, согласованную со структурой модуля над кольцом A, наделенного $\mathfrak{m}$-адической фильтрацией. Так как E — модуль конечного типа, то существует такое целое $r > 0$ и такой сюръективный A-гомоморфизм $u\colon A^r \to E$, что этот последний определяет инъективный гомоморфизм над A

$$v = \operatorname{Hom}(u, 1_F)\colon \operatorname{Hom}_A(E, F) \to \operatorname{Hom}_A(A^r, F);$$

очевидно, что v согласован с фильтрациями $(\operatorname{Hom}_A(E, F_n))$ и $(\operatorname{Hom}_A(A^r, F_n))$. Так как $\operatorname{Hom}_A(E, F)$ и $\operatorname{Hom}_A(A^r, F)$ — модули конечного типа (лемма 2), то, в силу предложения 1, достаточно доказать, что фильтрация $(\operatorname{Hom}_A(A^r, F_n))$ $\mathfrak{m}$-хороша; но это немедленно следует из существования канонического изоморфизма $\operatorname{Hom}_A(A^r, F_n) \to F_n^r$ и из того факта, что равенство $\mathfrak{m}F_n = F_{n+1}$ влечет за собой равенства $\mathfrak{m}(F_n^r) = (\mathfrak{m}F_n)^r = F_{n+1}^r$ (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 3, n° 7, remarque).

Предложение 3. *Пусть A — нётерово кольцо и $\mathfrak{m}$ — такой идеал в нем, что A отделимо и полно в $\mathfrak{m}$-адической топологии. Пусть E — некоторый фильтрованный A-модуль над фильтрованным кольцом A, причем фильтрация (E_n) на E такова, что $E_0 = E$ и E — отделимый модуль в топологии, определенной фильтрацией (E_n). Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *E представляет собой A-модуль конечного типа и фильтрация (E_n) является $\mathfrak{m}$-хорошей;*

б) *$\operatorname{gr}(E)$ представляет собой $\operatorname{gr}(A)$-модуль конечного типа;*

в) *для любого $n \geqslant 0$ $\operatorname{gr}_n(E)$ является A-модулем конечного типа и существует такое n_0, что для $n \geqslant n_0$ канонический гомоморфизм*

$$\operatorname{gr}_1(A) \otimes_A \operatorname{gr}_n(E) \to \operatorname{gr}_{n+1}(E) \qquad (3)$$

сюръективен.

Из определений немедленно следует, что а) влечет в). Тот факт, что из б) вытекает в), является следствием леммы 1, § 1, n° 3. Обратно, если выполнено в), то, очевидно, $\operatorname{gr}(E)$ порожден как $\operatorname{gr}(A)$-модуль суммой A-подмодулей $\operatorname{gr}_p(E)$ при $p \leqslant n_0$, а потому, согласно условию, этот модуль обладает конечной системой образующих. Остается доказать, что из в) следует а). Так как $\operatorname{gr}_n(E)$ имеют конечный тип и $E_0 = E$, то, во-первых, очевидно, что E/E_n является A-модулем конечного типа при любом n — это проверяется индукцией по n. Следовательно, достаточно доказать, что E_n представляет собой A-мо-

дуль конечного типа при любом $n \geqslant n_0$ и что $\mathfrak{m}E_n = E_{n+1}$. Но рассмотрим A-модуль E_{n+1}, наделенный исчерпывающей и отделимой фильтрацией подмодулей E_{n+k} $(k \geqslant 1)$; тогда $\mathfrak{m}E_n \subset E_{n+1}$. Условие в) означает, что образ модуля $\mathfrak{m}E_n$ в $\mathrm{gr}_{n+1}(E) = E_{n+1}/E_{n+2}$ равен модулю $\mathrm{gr}_{n+1}(E)$ и *порождает* градуированный $\mathrm{gr}(A)$-модуль $\mathrm{gr}(E_{n+1})$. Так как по условию $\mathrm{gr}_{n+1}(E)$ есть A-модуль конечного типа, то из предложения 12 в § 2, n° 9, следует, что $\mathfrak{m}E_n = E_{n+1}$ и что E_{n+1} представляет собой A-модуль конечного типа.

2. m-адические топологии на нётеровых кольцах

Предложение 4. *Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в нем и E — некоторый A-модуль конечного типа. Тогда все $\mathfrak{m}$-хорошие фильтрации на E определяют одну и ту же топологию (совпадающую с $\mathfrak{m}$-адической).*

Пусть (E_n) — любая $\mathfrak{m}$-хорошая фильтрация на E. Так как она исчерпывающая, то любой элемент модуля E принадлежит одной из подгрупп E_n, и так как E — модуль конечного типа, а E_n являются A-модулями, то существует такое целое n_1, что $E_{n_1} = E$. Пусть, с другой стороны, число n_0 таково, что $\mathfrak{m}E_n = E_{n+1}$ при $n \geqslant n_0$. Для $n > n_0 - n_1$ в таком случае имеют место соотношения $\mathfrak{m}^n E \subset E_{n+n_1} = \mathfrak{m}^{n+n_1-n_0}E_{n_0} \subset \mathfrak{m}^{n+n_1-n_0}E$, что и завершает доказательство.

Теорема 2. (Крулль). *Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в A, E — некоторый A-модуль конечного типа и F — некоторый подмодуль в E. Тогда $\mathfrak{m}$-адическая топология на F индуцирована $\mathfrak{m}$-адической топологией на E.*

Действительно из предложения 1 n° 1 следует, что фильтрация, индуцированная на F $\mathfrak{m}$-адической фильтрацией на E, является $\mathfrak{m}$-хорошей; теорема следует теперь из предложения 4.

Следствие. *Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в нем, E — некоторый A-модуль и F — некоторый A-модуль конечного типа. Тогда любое A-линейное отображение u: $E \to F$ представляет собой строгий морфизм (Общая топология, 1969, гл. III, § 2, n° 8) в $\mathfrak{m}$-адических топологиях.*

Действительно, поскольку $u(\mathfrak{m}^n E) = \mathfrak{m}^n u(E)$, отображение u является строгим морфизмом модуля E на $u(E)$ в $\mathfrak{m}$-адических топологиях на этих двух модулях; однако $\mathfrak{m}$-адическая топология на $u(E)$ индуцируется $\mathfrak{m}$-адической топологией на модуле F в силу теоремы 2.

Предложение 5. *Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в нем, E — некоторый A-модуль конечного типа,*

Тогда замыкание $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n E$ *множества* $\{0\}$ *в пространстве* E *относительно* $\mathfrak{m}$*-адической топологии представляет собой множество элементов* $x \in E$*, для которых существует такой элемент* $m \in \mathfrak{m}$*, что* $(1 - m)x = 0$.

Действительно, если $x = mx$ при $m \in \mathfrak{m}$, то $x = m^n x \in \mathfrak{m}^n E$ для любого целого $n \geqslant 0$; следовательно, $x \in F = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n E$. Обратно, если $x \in F$, то Ax содержится в пересечении окрестностей нуля в модуле E; тогда из теоремы 2 следует, что $\mathfrak{m}$-адическая топология на Ax, которая индуцируется $\mathfrak{m}$-адической топологией модуля E, представляет собой наименее тонкую топологию. Так как множество $\mathfrak{m}x$ является по определению некоторой окрестностью нуля в этой топологии, то $\mathfrak{m}x = Ax$; следовательно, существует такое $m \in \mathfrak{m}$, что $x = mx$.

Можно также сказать, что $\mathfrak{m}F = F$, так как для достаточно большого n

$$F = F \cap \mathfrak{m}^{n+1} E = \mathfrak{m}(F \cap \mathfrak{m}^n E) = \mathfrak{m}F;$$

поскольку кольцо A нётерово, модуль F является A-модулем конечного типа; достаточно, таким образом, применить следствие 3 предложения 4 гл. II, § 2, n° 2.

Следствие (Крулль). *Пусть* A *— нётерово коммутативное кольцо и* $\mathfrak{m}$ *— какой-нибудь идеал в нем. Тогда идеал* $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n$ *совпадает с множеством тех элементов* $x \in A$*, для которых существует такой элемент* $m \in \mathfrak{m}$*, что* $(1 - m)x = 0$. *В частности, для того чтобы* $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = \{0\}$*, необходимо и достаточно, чтобы ни один элемент из* $1 + \mathfrak{m}$ *не являлся делителем нуля в* A.

Достаточно применить предложение 5 к случаю $E = A_s$.

Замечание. Предположение о том, что кольцо A является *нётеровым*, существенно для последнего следствия. Например, пусть A — кольцо бесконечно дифференцируемых отображений прямой $\mathbf{R}$ в себя, и пусть $\mathfrak{m}$ — (максимальный) идеал кольца A, образованный такими функциями f, что $f(0) = 0$. Немедленно проверяется, что $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n$ представляет собой множество тех функций f, для которых $f^{(n)}(0) = 0$ при любом $n \geqslant 0$, и что среди них существуют такие функции, что $f(x) \neq 0$ при любом $x \neq 0$; например, такой является функция f, определенная формулой $f(x) = e^{-1/x^2}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.

Определение 1. *Пусть A — топологическое кольцо. Если для некоторого двустороннего идеала $\mathfrak{m}$ кольца A топология, заданная на A, совпадает с $\mathfrak{m}$-адической, то говорят, что $\mathfrak{m}$ является идеалом определения топологии кольца A.*

Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в нем и $\mathfrak{t}$ — его корень (гл. II, § 2, n° 6). Если $\mathfrak{m}'$ — идеал определения $\mathfrak{m}$-адической топологии, то существует такое целое $n > 0$, что $\mathfrak{m}'^n \subset \mathfrak{m}$ (§ 2, n° 5); следовательно, $\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{t}$. Обратно, так как кольцо A нётерово, существует такое целое $k > 0$, что $\mathfrak{t}^k \subset \mathfrak{m}$ (гл. II, § 2, n° 6, предложение 15), так что $\mathfrak{t}$ является *наибольшим идеалом определения $\mathfrak{m}$-адической топологии.*

3. Кольца Зарисского

Предложение 6. *Пусть A — нётерово коммутативное кольцо и $\mathfrak{m}$ — какой-нибудь идеал в нем. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

а) *идеал $\mathfrak{m}$ содержится в радикале кольца A;*

б) *всякий A-модуль конечного типа отделим в $\mathfrak{m}$-адической топологии;*

в) *для всякого A-модуля E конечного типа любой подмодуль в E замкнут в $\mathfrak{m}$-адической топологии модуля E;*

г) *любой максимальный идеал кольца A замкнут относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии.*

Покажем, что из а) следует б). Предположим, что $\mathfrak{m}$ содержится в радикале кольца A, и пусть E — любой A-модуль конечного типа. Если элементы $x \in E$ и $m \in \mathfrak{m}$ таковы, что $(1 - m)x = 0$, то $x = 0$, поскольку элемент $1 - m$ обратим в A. Следовательно (n° 2, предложение 5), модуль E отделим в $\mathfrak{m}$-адической топологии.

Докажем, что из б) следует в). Предположим, что условие б) выполнено. Пусть E — какой-нибудь A-модуль конечного типа и F — подмодуль в E. Тогда E/F — отделимый модуль в $\mathfrak{m}$-адической топологии, которая представляет собой фактортопологию $\mathfrak{m}$-адической топологии на E; следовательно, модуль F замкнут в E.

Очевидно, что из в) следует г). Наконец, докажем, что из г) следует а). Из г) вытекает, что A-модуль $A/\mathfrak{a}$ отделим в $\mathfrak{m}$-адической топологии для любого максимального идеала $\mathfrak{a}$ кольца A. Из этого получается, что $\mathfrak{m}(A/\mathfrak{a}) \neq A/\mathfrak{a}$, ибо в противном случае $\mathfrak{m}$-адическая топология на $A/\mathfrak{a}$ была бы наименее тонкой и факторкольцо $A/\mathfrak{a}$ равнялось бы нулю, что невозможно, ибо $A/\mathfrak{a}$ — *поле.* Канонический образ идеала $\mathfrak{m}$ в $A/\mathfrak{a}$ является, следовательно, идеалом кольца $A/\mathfrak{a}$, отличающимся от $A/\mathfrak{a}$;

следовательно, этот идеал равен 0. Таким образом, $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a}$, что и показывает, что идеал $\mathfrak{m}$ содержится в радикале кольца A.

Определение 2. *Топологическое кольцо A называется кольцом Зарисского, если оно коммутативно и нётерово и если существует идеал $\mathfrak{m}$ определения топологии на A, удовлетворяющий эквивалентным условиям предложения* 6.

Кольцо Зарисского обязательно *отделимо* (предложение 6) и *всякий* идеал определения его топологии содержится в радикале этого кольца.

Примеры колец Зарисского. 1) Пусть A — нётерово коммутативное кольцо и $\mathfrak{m}$ — какой-нибудь идеал в нем. Если A *отделимо и полно в $\mathfrak{m}$-адической топологии*, то A представляет собой кольцо Зарисского в этой топологии в силу леммы 3 § 2, n° 13.

2) Любое *факторкольцо* $A/\mathfrak{b}$ кольца Зарисского является кольцом Зарисского, ибо оно нётерово и, если $\mathfrak{m}$ — идеал определения кольца A, то $\mathfrak{m}(A/\mathfrak{b}) = (\mathfrak{m} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ содержится в радикале кольца $A/\mathfrak{b}$ (*Алгебра*, гл. VIII, § 6, n° 3, предложение 7).

3) Пусть A — *нётерово полулокальное* кольцо и $\mathfrak{r}$ — его радикал. Тогда A, наделенное $\mathfrak{r}$-адической топологией, является кольцом Зарисского. Именно эта топология будет подразумеваться (если не оговорено противное) во всех тех случаях, когда мы будем рассматривать нётерово полулокальное кольцо как топологическое кольцо.

Предложение 7. *Пусть A, A' — два коммутативных кольца и h: $A \to A'$ — гомоморфизм этих колец. Предположим, что A нётерово и что A' является A-модулем конечного типа (имеется в виду структура модуля, определенная гомоморфизмом h). Пусть $\mathfrak{m}$ — идеал кольца A, и пусть $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}A'$. Тогда*

(i) *для того чтобы $\mathfrak{m}'$-адическая топология на A' была отделимой, необходимо и достаточно, чтобы элементы множества $1 + h(\mathfrak{m})$ не являлись делителями нуля в A';*

(ii) *если кольцо A, наделенное $\mathfrak{m}$-адической топологией, представляет собой кольцо Зарисского, то кольцом Зарисского является и кольцо A', наделенное $\mathfrak{m}'$-адической топологией;*

(iii) *если гомоморфизм h инъективен (и, таким образом, отождествляет A с некоторым подкольцом в A'), то $\mathfrak{m}'$-адическая топология кольца A' индуцирует на A $\mathfrak{m}$-адическую топологию.*

Напомним, что $\mathfrak{m}'$-адическая фильтрация на A' совпадает с $\mathfrak{m}$-адической фильтрацией A-модуля A' (§ 2, n° 1, пример 3). Следовательно, утверждение (i) является частным случаем предложения 5 в n° 2, а утверждение (iii) — частным случаем тео-

ремы 2 п° 2. Наконец, докажем (ii). Предположим, что A является кольцом Зарисского в $\mathfrak{m}$-адической топологии, и пусть E' обозначает некоторый A'-модуль конечного типа; этот модуль имеет также конечный тип и над кольцом A и $\mathfrak{m}$-адическая фильтрация на E' совпадает с $\mathfrak{m}'$-адической. Следовательно, модуль E' отделим в $\mathfrak{m}'$-адической топологии. Наконец, A-модуль A' нётеров, так что нётеровым является и кольцо A'; этим завершается доказательство того, что A' — кольцо Зарисского.

4. *Отделимое пополнение нётерова кольца*

Пусть A — коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в нем и E — некоторый A-модуль. Обозначим через $\hat{A}$ и $\hat{E}$ отделимые пополнения кольца A и модуля E соответственно относительно $\mathfrak{m}$-адических топологий и через j_E — каноническое отображение $E \to \hat{E}$. Отображение $(a, x) \to aj_E(x)$ множества $\hat{A} \times E$ в $\hat{E}$, являющееся A-билинейным, определяет некоторое $\hat{A}$-линейное отображение α_E: $\hat{A} \otimes_A E \to \hat{E}$, называемое каноническим. Пусть u: $E \to F$ — гомоморфизм A-модулей, и пусть $\hat{u}$: $\hat{E} \to \hat{F}$ — отображение, получающееся из u при переходе к отделимым пополнениям; для $a \in \hat{A}$ и $x \in E$ имеем

$$\alpha_F(a \otimes u(x)) = aj_F(u(x)) = a\hat{u}(j_E(x)) = \hat{u}(\alpha_E(a \otimes x)),$$

иначе говоря, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \hat{A} \otimes_A E & \xrightarrow{1 \otimes u} & \hat{A} \otimes_A F \\ {\scriptstyle \alpha_E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_F} \\ \hat{E} & \xrightarrow{\hat{u}} & \hat{F} \end{array} \tag{4}$$

коммутативна. Наконец, из предложения 16 § 2, п° 12, следует, что если E — модуль *конечного типа*, то гомоморфизм α_E *сюръективен*.

Теорема 3. *Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — его идеал и E, F, G — три A-модуля конечного типа. Тогда*

(i) *если $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$ — точная последовательность A-линейных отображений, то точна и последовательность $\hat{E} \xrightarrow{\hat{u}} \hat{F} \xrightarrow{\hat{v}} \hat{G}$, полученная при переходе к отделимым пополнениям (относительно $\mathfrak{m}$-адических топологий)*;

(ii) *каноническое $\hat{A}$-линейное отображение α_E: $\hat{A} \otimes_A E \to \hat{E}$ биективно*;

(iii) *модуль $\hat{A}$ является плоским над кольцом A.*

Уже было показано, что u и v являются строгими морфизмами топологических групп (п° 2, следствие теоремы 2),

Следовательно, утверждение (i) вытекает из леммы 2 § 2, n° 12. Утверждение (ii) очевидно, когда $E = A$, а случай, когда E является свободным A-модулем конечного типа, немедленно сводится к только что указанному. В общем же случае модуль E допускает конечное представление

$$L \xrightarrow{u} L' \xrightarrow{v} E \to 0$$

(гл. I, § 2, n° 8, лемма 8). Отсюда получается коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \hat{A} \otimes_A L & \xrightarrow{1\otimes u} & \hat{A} \otimes_A L' & \xrightarrow{1\otimes v} & \hat{A} \otimes_A E \to 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_L} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{L'}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_E} \\ \hat{L} & \xrightarrow{\hat{u}} & \hat{L}' & \xrightarrow{\hat{v}} & \hat{E} \to 0 \end{array}$$

Первая строка здесь точна (гл. I, § 2, n° 1, лемма 1); в силу утверждения (i) точна и вторая строка. Уже известно, что отображение α_E сюръективно (§ 2, n° 12, предложение 16). С другой стороны, поскольку α_L и $\alpha_{L'}$ биективны, а $1 \otimes v$ — сюръективно, отображение α_E инъективно в силу следствия 2 предложения 2 гл. I, § 1, n° 4. Этим доказано (ii).

Из утверждений (i) и (ii) теперь следует, что если $\mathfrak{a}$ — идеал в кольце A (автоматически имеющий конечный тип), то каноническое отображение $\hat{A} \otimes_A \mathfrak{a} \to \hat{A}$ инъективно, ибо является композицией отображений $\hat{\mathfrak{a}} \to \hat{A}$ и α_E; это доказывает, что $\hat{A}$ — плоский A-модуль (гл. I, § 2, n° 3, предложение 1).

В условиях теоремы 3 модули $\hat{A} \otimes_A E$ и $\hat{E}$ часто отождествляются при помощи канонического отображения α_E. Если $u\colon E \to F$ — некоторый гомоморфизм A-модулей конечного типа, то гомоморфизм $\hat{u}\colon \hat{E} \to \hat{F}$ совпадает при этом отождествлении с гомоморфизмом $1 \otimes u$ ввиду коммутативности диаграммы (4).

Следствие 1. *Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в A и E — некоторый A-модуль конечного типа, а F и G — подмодули в E. Наделим A, E, F и G $\mathfrak{m}$-адическими топологиями, и пусть i — каноническое отображение модуля E в $\hat{E}$. Тогда*:

$$\hat{F} = \hat{A} \cdot i(F), \quad (F+G)\hat{} = \hat{F} + \hat{G}, \quad (F \cap G)\hat{} = \hat{F} \cap \hat{G}$$

$$(F : G)\hat{} = \hat{F} : \hat{G}.$$

Кроме того, если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — два идеала в A и если $\mathfrak{c} = \mathfrak{ab}$, то $\hat{\mathfrak{c}} = \hat{\mathfrak{a}}\hat{\mathfrak{b}}$.

Действительно, в силу теоремы 3, модули $\hat{E}$, $\hat{F}$, $\hat{G}$ канонически отождествляются с $\hat{A} \otimes E$, $\hat{A} \otimes F$, $\hat{A} \otimes G$, что и доказывает

две первые формулы. Что касается третьей и четвертой формул, то они следуют соответственно из предложения 6 гл. I, § 2, n° 6, и предложения 12 n° 10. Наконец, так как $\hat{\mathfrak{a}} = \hat{A}i(\mathfrak{a})$, $\hat{\mathfrak{b}} = \hat{A}i(\mathfrak{b})$, $\hat{\mathfrak{c}} = \hat{A}i(\mathfrak{c})$, то

$$\hat{\mathfrak{c}} = \hat{A}i(\mathfrak{ab}) = \hat{A}i(\mathfrak{a})\,i(\mathfrak{b}) = \hat{\mathfrak{a}}\hat{\mathfrak{b}}.$$

Следствие 2. *Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в нем и $\hat{A}$ — отделимое пополнение кольца A относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии. Если элемент $a \in A$ не является делителем нуля в A, то его канонический образ a' в кольце $\hat{A}$ также не является делителем нуля в $\hat{A}$.*

Поскольку $\hat{A}$ — плоский A-модуль, следствие представляет собой частный случай предложения 3 (i) гл. I, § 2, n° 4.

Следствие 3. *Если A — нётерово коммутативное кольцо, то кольцо формальных рядов $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ является плоским A-модулем.*

Действительно, кольцо формальных рядов является пополнением кольца многочленов

$$B = A[X_1, \ldots, X_n]$$

относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии, где $\mathfrak{m}$ — множество многочленов без свободного члена (§ 2, n° 12, пример 1). Поскольку B — нётерово кольцо (§ 2, n° 10, следствие 2 теоремы 2), кольцо $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ представляет собой плоский B-модуль в силу теоремы 3, а так как B — свободный A-модуль, то $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ является плоским A-модулем (гл. I, § 2, n° 7, следствие 3 предложения 8).

Предложение 8. *Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в нем, $\hat{A}$ — отделимое пополнение кольца A относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии и j — каноническое отображение кольца A в $\hat{A}$. Тогда:*

(i) *$\hat{A}$ представляет собой кольцо Зарисского и $\hat{\mathfrak{m}} = \hat{A} \cdot j(\mathfrak{m})$ является идеалом определения кольца $\hat{A}$.*

(ii) *Сопоставление $\mathfrak{n} \to \hat{\mathfrak{n}} = \hat{A} \cdot j(\mathfrak{n})$ определяет биективное отображение множества максимальных идеалов кольца A, содержащих $\mathfrak{m}$, на множестве максимальных идеалов кольца $\hat{A}$, а сопоставление $\mathfrak{q} \to j^{-1}(\mathfrak{q})$ определяет обратное биективное отображение.*

(iii) *Пусть $\mathfrak{n}$ — максимальный идеал в A, содержащий $\mathfrak{m}$. Тогда гомоморфизм j': $A_{\mathfrak{n}} \to \hat{A}_{\hat{\mathfrak{n}}}$, полученный из j, инъективен; если отождествить $A_{\mathfrak{n}}$ с некоторым подкольцом в $\hat{A}_{\hat{\mathfrak{n}}}$ посред-*

ством отображения j', то $(\mathfrak{n}A_\mathfrak{n})$-адическая топология на $A_\mathfrak{n}$ окажется индуцированной $\hat{\mathfrak{n}}$-адической топологией на $\hat{A}_{\hat{\mathfrak{n}}}$, а множество $A_\mathfrak{n}$ будет плотным в $\hat{A}_{\hat{\mathfrak{n}}}$ в смысле $\hat{\mathfrak{n}}$-адической топологии.

Докажем утверждение (i). Так как $\mathfrak{m}$ — идеал конечного типа, то $(\mathfrak{m}^n)\hat{} = (\hat{\mathfrak{m}})^n = \mathfrak{m}^n\hat{A}$ (§ 2, n° 12, следствие 2 предложения 16) и топология на $\hat{A}$ — это $\hat{\mathfrak{m}}$-адическая топология. Поскольку $\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}$ изоморфно $A/\mathfrak{m}$, это кольцо нётерово и $\hat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\hat{A}$ представляет собой $\hat{A}$-модуль конечного типа, так что нётеровым является и кольцо $\hat{A}$ (§ 2, n° 10, следствие 5 из теоремы 2); наконец, поскольку кольцо $\hat{A}$ отделимо и полно относительно $\hat{\mathfrak{m}}$-адической топологии, то $\hat{A}$ — кольцо Зарисского (n° 3, пример 1).

Утверждение (ii) немедленно следует из того, что канонический гомоморфизм $A/\mathfrak{m} \to \hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}$, полученный из j, биективен, а также из того факта, что любой максимальный идеал кольца $\hat{A}$ содержит $\hat{\mathfrak{m}}$, так как $\hat{A}$ — кольцо Зарисского и, следовательно, его радикал содержит $\hat{\mathfrak{m}}$ (n° 3, предложение 6).

Наконец, докажем (iii). Поскольку $\mathfrak{n} = j^{-1}(\hat{\mathfrak{n}})$, имеет место включение $j(A-\mathfrak{n}) \subset \hat{A}-\hat{\mathfrak{n}}$ и j однозначно определяет некоторый гомоморфизм $j'\colon A_\mathfrak{n} \to \hat{A}_{\hat{\mathfrak{n}}}$ (гл. II, § 2, n° 1, предложение 2). Покажем, что гомоморфизм j' инъективен. Пусть $a \in A$, $s \in A-\mathfrak{n}$ — такие элементы, что $j'(a/s) = j(a)/j(s) = 0$. Следовательно, существует такой элемент $s' \in \hat{A}-\hat{\mathfrak{n}}$, что $s'j(a) = 0$ (гл. II, § 2, n° 1, замечание 3) и аннулятор элемента $j(a)$ в кольце $\hat{A}$ не содержится, таким образом, в $\hat{\mathfrak{n}}$. Однако, если $\mathfrak{b}$ — аннулятор элемента a в кольце A, то аннулятор элемента $j(a)$ в кольце $\hat{A}$ равен $\hat{\mathfrak{b}}$ (следствие 1 теоремы 3). Следовательно, $\mathfrak{b} \not\subset \mathfrak{n}$, в силу чего $a/s = 0$.

Кроме того, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A/\mathfrak{n}^k & \to & A_\mathfrak{n}/(\mathfrak{n}A_\mathfrak{n})^k \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h'} \\ \hat{A}/\hat{\mathfrak{n}}^k & \to & \hat{A}_{\hat{\mathfrak{n}}}/(\hat{\mathfrak{n}}\hat{A}_{\hat{\mathfrak{n}}})^k \end{array} \qquad (5)$$

в которой h и h' определяются гомоморфизмами j и j' соответственно и в которой горизонтальные стрелки — это канонические изоморфизмы из предложения 9 гл. II, § 3, n° 3. Так как $\mathfrak{n}^k$ — открытый идеал в A (ведь он содержит $\mathfrak{m}^k$), то гомоморфизм h биективен и, следовательно, биективен и h'. Это пока-

зывает прежде всего, что $(\mathfrak{n}A_{\mathfrak{n}})^k = j'^{-1}\left((\widehat{\mathfrak{n}}\widehat{A}_{\widehat{\mathfrak{n}}})^k\right)$, так что топология на $A_{\mathfrak{n}}$ индуцирована топологией на $\widehat{A}_{\widehat{\mathfrak{n}}}$; кроме того, $\widehat{A}_{\widehat{\mathfrak{n}}} = A_{\mathfrak{n}} + (\widehat{\mathfrak{n}}\widehat{A}_{\widehat{\mathfrak{n}}})^k$ при любом $k > 0$, в силу чего $A_{\mathfrak{n}}$ всюду плотно в $\widehat{A}_{\widehat{\mathfrak{n}}}$.

Следствие. *Пусть A — нётерово локальное* (соответственно *полулокальное*) *кольцо и $\mathfrak{m}$ — его радикал. Тогда $\widehat{A}$ также является нётеровым локальным* (соответственно *полулокальным*) *кольцом, радикал которого равен $\widehat{\mathfrak{m}}$.*

В самом деле, кольцо $\widehat{A}$ нётерово в силу предложения 8 (i), а остальное следует из предложения 8 (ii) и третьей формулы следствия 1 теоремы 3.

5. Пополнение кольца Зарисского

Предложение 9. *Пусть A — нётерово коммутативное кольцо и $\mathfrak{m}$ — его идеал; наделим A $\mathfrak{m}$-адической топологией. Для того чтобы кольцо $\widehat{A}$ было строго плоским A-модулем, необходимо и достаточно, чтобы A было кольцом Зарисского.*

В самом деле, для всякого A-модуля M конечного типа каноническое отображение $M \to M \otimes_A \widehat{A}$ отождествляется с каноническим отображением $M \to \widehat{M}$ модуля M в его пополнение относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии (n° 4, теорема 3); ядро этого отображения представляет собой, следовательно, замыкание множества $\{0\}$ в модуле M относительно этой топологии. Так как уже известно, что $\widehat{A}$ является плоским A-модулем (n° 4, теорема 3), предложение вытекает из описания строго плоских модулей (гл. I, § 3, n° 1, предложение 1б)) и из описания колец Зарисского (n° 3, предложение 6).

Если A — кольцо Зарисского и E — некоторый A-модуль конечного типа, то можно (благодаря предложению 9) отождествить E с некоторым подмножеством в $\widehat{E}$ при помощи канонического отображения j_E: $E \to \widehat{E}$. С учетом этого отождествления имеем

Следствие 1. *Пусть A — кольцо Зарисского, E — некоторый A-модуль конечного типа и F — подмодуль в E. Тогда*

$$F = \widehat{F} \cap E = (\widehat{A}F) \cap E.$$

Это частный случай предложения 10 (ii) гл. I, § 3, n° 5; впрочем, этот результат может быть получен и из предложения 6 n° 3.

Следствие 2. *Пусть A — кольцо Зарисского и E — некоторый A-модуль конечного типа. Если $\hat{E}$ — свободный $\hat{A}$-модуль, то свободным является и A-модуль E.*

Пусть $\mathfrak{m}$ — идеал определения кольца A, который, следовательно, содержится в радикале этого кольца. Воспользуемся критерием из предложения 5 гл. II, § 3, n° 2; каноническое отображение $j_E\colon E \to \hat{E}$ определяет некоторое биективное отображение $i_E\colon E/\mathfrak{m}E \to \hat{E}/(\mathfrak{m}E)\hat{}$; аналогичным образом каноническое отображение $j_A\colon A \to \hat{A}$ определяет некоторое биективное отображение $i_A\colon A/\mathfrak{m} \to \hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}$, представляющее собой изоморфизм колец. Мы имеем $(\mathfrak{m}E)\hat{} = \hat{A}\cdot\mathfrak{m}E = \hat{\mathfrak{m}}\hat{E}$ (n° 4, теорема 3), так что $\hat{E}/(\mathfrak{m}E)\hat{}$ наделен структурой $(\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}})$-модуля и, следовательно (с помощью отображения i_A), структурой $(A/\mathfrak{m})$-модуля. Немедленно устанавливается, что i_A представляет собой $(A/\mathfrak{m})$-линейное отображение, так что оно является изоморфизмом $(A/\mathfrak{m})$-модулей. Поскольку $\hat{E}/\hat{\mathfrak{m}}\hat{E}$ есть свободный $(\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}})$-модуль, то свободным является и $(A/\mathfrak{m})$-модуль $E/\mathfrak{m}E$.

Кроме того, пусть $v\colon \mathfrak{m} \otimes_A E \to E$ — канонический гомоморфизм; поскольку $(\mathfrak{m} \otimes_A E) \otimes_A \hat{A}$ канонически отождествляется с $\hat{\mathfrak{m}} \otimes_{\hat{A}} \hat{E}$ и $E \otimes_A \hat{A}$ с $\hat{E}$ (n° 4, теорема 3), то из предложения о том, что $\hat{E}$ является свободным $\hat{A}$-модулем, следует, что гомоморфизм $v \otimes 1\colon \hat{\mathfrak{m}} \otimes_{\hat{A}} \hat{E} \to \hat{E}$ инъективен. Так как кольцо $\hat{A}$ является строго плоским A-модулем (предложение 9), то отсюда следует, что инъективен гомоморфизм v (гл. I, § 3, n° 1, предложение 2), и, таким образом, условия, при которых можно применять упомянутый критерий, установлены.

Следствие 3. *Пусть A — кольцо Зарисского, имеющее целостное пополнение $\hat{A}$, и пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в A. Если идеал $\mathfrak{a}\hat{A}$ в $\hat{A}$ является главным, то главным является и идеал $\mathfrak{a}$.*

Это частный случай следствия 2.

Следствие 4. *Пусть A — кольцо Зарисского, имеющее целостное пополнение $\hat{A}$, пусть L — поле частных кольца $\hat{A}$ и $K \subset L$ — поле частных кольца A. Тогда $\hat{A} \cap K = A$.*

Очевидно, что $A \subset \hat{A} \cap K$, с другой стороны, пусть $x \in \hat{A} \cap K$; тогда $x = a/b$, $a, b \in A$; нам нужно показать, что $x \in A$, т. е. что $(Aa : Ab)\cdot Ab = Aa$. Положим $(Aa : Ab)\cdot Ab = \mathfrak{b}$ — некоторый идеал в A. В силу следствия теоремы 3 n° 4, имеем $(\hat{A}a : \hat{A}b) \times \times \hat{A}b = \hat{\mathfrak{b}}$ и, с другой стороны, $(\hat{A}a : \hat{A}b)\cdot \hat{A}b = \hat{A}a$, так как $a/b \in \in \hat{A}$. Следовательно, $\hat{\mathfrak{b}} = \hat{A}a$. Поскольку $\hat{\mathfrak{b}} \cap A = \mathfrak{b}$ (в силу следствия 1), то $Aa \subset \mathfrak{b}$; обратное включение очевидно.

Следствие 5. *Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, E, F — два A-модуля конечного типа и u: $E \to F$ — некоторый A-гомоморфизм. Для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A обозначим через $A(\mathfrak{m})$* (соответственно *через $E(\mathfrak{m})$, $F(\mathfrak{m})$*) *отделимое пополнение кольца A* (соответственно *модулей E, F*) *относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии и через $u(\mathfrak{m})$: $E(\mathfrak{m}) \to F(\mathfrak{m})$ — гомоморфизм, соответствующий гомоморфизму u. Для того чтобы u был инъективным* (соответственно *сюръективным, биективным, нулевым*), *необходимо и достаточно, чтобы $u(\mathfrak{m})$ обладал этим свойством при любом максимальном идеале $\mathfrak{m}$ кольца A.*

В самом деле, уже известно, что для инъективности u (соответственно для сюръективности, биективности, обращения в нуль этого отображения) необходимо и достаточно, чтобы этим же свойством обладал гомоморфизм $u_{\mathfrak{m}}$: $E_{\mathfrak{m}} \to F_{\mathfrak{m}}$ при любом максимальном идеале $\mathfrak{m}$ кольца A (гл. II, § 3, n° 3, теорема 1). Теперь заметим, что $A_{\mathfrak{m}}$ представляет собой нётерово локальное кольцо (гл. II; § 2, n° 4, следствие 2 предложения 10); следовательно, оно является кольцом Зарисского и имеется канонический изоморфизм A-алгебр $\widehat{A}_{\mathfrak{m}} \to A(\mathfrak{m})$ (§ 2, n° 13, предложение 18). С другой стороны (начало n° 4), имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} E_{\mathfrak{m}} \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} A(\mathfrak{m}) & \to & E \otimes_A A(\mathfrak{m}) & \to & E(\mathfrak{m}) \\ \downarrow{\scriptstyle u_{\mathfrak{m}} \otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle u \otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle u(\mathfrak{m})} \\ F_{\mathfrak{m}} \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} A(\mathfrak{m}) & \to & F \otimes_A A(\mathfrak{m}) & \to & F(\mathfrak{m}) \end{array}$$

в которой горизонтальные стрелки слева существуют в силу ассоциативности тензорного произведения и наличия изоморфизмов $E_{\mathfrak{m}} \to E \otimes_A A_{\mathfrak{m}}$, $F_{\mathfrak{m}} \to F \otimes_A A_{\mathfrak{m}}$. Поскольку E и F суть A-модуля конечного типа, из теоремы 3 n° 4 следует, что горизонтальные стрелки указанной диаграммы являются изоморфизмами. Следовательно, все, что остается доказать, — это эквивалентность инъективности (соответственно сюръективности, биективности, обращения в нуль) гомоморфизма $u_{\mathfrak{m}}$ и инъективности (соответственно сюръективности, биективности, обращения в нуль) гомоморфизма $u_{\mathfrak{m}} \otimes 1$. Но это следует из того, что $\widehat{A}_{\mathfrak{m}}$ (а потому и $A(\mathfrak{m})$) представляет собой строго плоский $A_{\mathfrak{m}}$-модуль в силу предложения 9 (гл. I, § 3, n° 1, предложения 1 и 2).

Предложение 10. *Пусть A, B — два кольца Зарисского, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ — их пополнения, f: $A \to B$ — некоторый непрерывный гомоморфизм колец и $\widehat{f}$: $\widehat{A} \to \widehat{B}$ — гомоморфизм, получаемый из f при переходе к пополнениям. Тогда, если f биективен, A-модуль B является строго плоским.*

Так как кольца A и B отделимы, то условие, что отображение $\hat{f}$ биективно, означает прежде всего, что инъективно отображение f. Отождествляя (алгебраически) A и $f(A)$ посредством гомоморфизма f и $\hat{A}$ с $\hat{B}$ посредством гомоморфизма $\hat{f}$, мы получаем включения $A \subset B \subset \hat{A} = \hat{B}$; известно, что $\hat{A}$ является строго плоским A-модулем и одновременно строго плоским B-модулем (предложение 9). Отсюда получается, что B — строго плоский A-модуль (гл. I, § 3, n° 4, замечание 2).

Предложение 11. *Пусть A — нётерово локальное кольцо, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал, $\hat{A}$ — его $\mathfrak{m}$-адическое пополнение и B — такое кольцо, что $A \subset B \subset \hat{A}$. Предположим, что B есть локальное нётерово кольцо, максимальный идеал $\mathfrak{n}$ которого удовлетворяет равенству $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}B$. Тогда*

$$\mathfrak{n}^k = \mathfrak{m}^k B = \hat{\mathfrak{m}}^k \cap B$$

при любом $k \geqslant 1$, $\mathfrak{n}$-адическая топология на B индуцируется $\hat{\mathfrak{m}}$-адической топологией на $\hat{A}$, B является строго плоским A-модулем и существует изоморфизм $\hat{A}$ на $\mathfrak{n}$-адическое пополнение $\hat{B}$ кольца B, который продолжает каноническое вложение $A \to B$.

Достаточно проверить соотношение $\mathfrak{n}^k = \hat{\mathfrak{m}}^k \cap B$, так как при условии, что B плотно в $\hat{A}$ и $\mathfrak{n}$-адическая топология индуцируется $\hat{\mathfrak{m}}$-адической, последнее утверждение вытекает из следствия 1 предложения 18 из *Общей топологии*, 1968, гл. II, § 3, n° 9; что касается предпоследнего утверждения, то оно вытекает из предложения 10. Инъективный гомоморфизм $j_A\colon A \to \hat{A}$ (соответственно $j_B\colon B \to \hat{A}$) определяет при переходе к факторкольцам вложение $i_A\colon A/(\hat{\mathfrak{m}} \cap A) \to \hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}$ (соответственно $i_B\colon B/(\hat{\mathfrak{m}} \cap B) \to \hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}$). Известно, что $\hat{\mathfrak{m}} \cap A = \mathfrak{m}$ и что i_A биективно, так что биективно и i_B, и это доказывает, что $B/(\hat{\mathfrak{m}} \cap B)$ является полем; следовательно, $\hat{\mathfrak{m}} \cap B$ — максимальный идеал в B, и тем самым $\hat{\mathfrak{m}} \cap B = \mathfrak{n}$. Поскольку $\hat{A} = A + \hat{\mathfrak{m}}$, имеют место равенства $B = A + \mathfrak{n} = A + \mathfrak{m}B$; с помощью индукции по k получается, что $B = A + \mathfrak{m}^k B = A + \mathfrak{n}^k$ при любом $k > 1$. Поскольку $\mathfrak{n}^k \subset \hat{\mathfrak{m}}^k \cap B$, достаточно доказать, что $\hat{\mathfrak{m}}^k \cap B \subset \mathfrak{n}^k$; если $b \in \hat{\mathfrak{m}}^k \cap B$, то можно записать $b = a + z$, где $a \in A$, $z \in \mathfrak{n}^k$. Отсюда следует, что $a = b - z \in \hat{\mathfrak{m}}^k \cap A = \mathfrak{m}^k \subset \mathfrak{n}^k$ и $b \in \mathfrak{n}^k$.

* Важный случай, к которому применимо предложение 11, состоит в следующем: B — кольцо целых рядов от n переменных над полным нормированным полем K, *сходящихся* в окрестности нуля, A — локальное кольцо

$$K[X_1, \ldots, X_n]_{\mathfrak{p}},$$

где $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал, образованный многочленами без свободного члена, и $\hat{A}$ — кольцо формальных рядов $K[[X_1, \ldots, X_n]]$.*

Z

Замечание. Локальное кольцо B, для которого $A \subset B \subset \hat{A}$ и максимальный идеал $\mathfrak{n}$ которого равен идеалу $\mathfrak{m}B$, а $\mathfrak{n}$-адическая топология на котором индуцируется $\mathfrak{m}$-адической топологией кольца $\hat{A}$, не обязано быть нётеровым (упражнение 14).

Предложение 12. *Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в A, S — мультипликативная система $1+\mathfrak{m}$ в A и E — некоторый A-модуль конечного типа. При этих условиях*

(i) *$S^{-1}A$ представляет собой кольцо Зарисского в $(S^{-1}\mathfrak{m})$-адической топологии.*

(ii) *Каноническое отображение $f\colon E \to S^{-1}E$ непрерывно, если модуль E наделен $\mathfrak{m}$-адической топологией, а модуль $S^{-1}E$ наделен $(S^{-1}\mathfrak{m})$-адической; отображение $\hat{f}\colon \hat{E} \to (S^{-1}E)\hat{}$ является изоморфизмом.*

Любой элемент из $1+(S^{-1}\mathfrak{m})$ имеет вид

$$1+(m/(1+m')) = (1+m+m')/(1+m),$$

где $m \in \mathfrak{m}$ и $m' \in \mathfrak{m}$; следовательно, этот элемент обратим в $S^{-1}A$, в силу чего $S^{-1}\mathfrak{m}$ содержится в радикале кольца $S^{-1}A$; поскольку $S^{-1}A$ нётерово (гл. II, § 2, n° 4, следствие 2, предложения 10), $S^{-1}A$ является кольцом Зарисского в $(S^{-1}\mathfrak{m})$-адической топологии, чем доказано (i). Докажем утверждение (ii). Для любого $n>0$ имеют место равенства

$$f^{-1}\left((S^{-1}\mathfrak{m})^n E\right) = f^{-1}\left(S^{-1}(\mathfrak{m}^n E)\right) = \mathfrak{m}^n\tilde{E};$$

действительно, прежде всего очевидно, что $f(\mathfrak{m}^n E) \subset S^{-1}\mathfrak{m}^n E$; обратно, пусть x — элемент из $f^{-1}(S^{-1}\mathfrak{m}^n E)$; следовательно, существуют элементы m', m'' идеала $\mathfrak{m}$ и $x'' \in \mathfrak{m}^n E$, такие, что $(1+m')((1+m'')x - x'') = 0$, откуда $(1-m)x = x'$ при $m = -(m'+m''+m'm'') \in \mathfrak{m}$ и $x' = (1+m')x'' \in \mathfrak{m}^n E$; отсюда получаем, что

$$x = (1+m+\ \ldots\ +m^{n-1})x' + m^n x \in \mathfrak{m}^n E.$$

Это доказывает, что f — строгий морфизм. Кроме того, ядро отображения f, являющееся множеством тех $x \in E$, для которых существует $s \in S$, удовлетворяющий равенству $sx = 0$, отождествляется с ядром канонического отображения $j\colon E \to \hat{E}$ (n° 2, предложение 5). Следовательно, имеется топологический изоморфизм $f_0\colon j(E) \to f(E)$, для которого $f = f_0 \circ j$; так как $\hat{f}$ — топологический изоморфизм, то остается показать, что $f(E)$ плотно в $S^{-1}E$. Но всякий элемент из модуля $S^{-1}E$ записывается

в виде $x/(1-m)$, где $m \in \mathfrak{m}$, и немедленно проверяется, что

$$x/(1-m) \equiv ((1+m+\ \ldots\ +m^{n-1})\,x)/1 \pmod{S^{-1}\mathfrak{m}^n E}.$$

Доказательство закончено.

Упражнения

1) а) Пусть K — поле характеристики $p>0$, B — кольцо формальных рядов с коэффициентами в K относительно двух бесконечных систем переменных (X_n), (Y_n), имеющих лишь конечное число членов данной степени (§ 2, упражнение 12). Кольцо B является локальным и отделимым относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии, где $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в нем. Пусть $\mathfrak{b}$ — замкнутый идеал кольца B, порожденный одночленами $X_j Y_i$ для $i \geqslant 0$, $0 \leqslant j \leqslant i$, пусть A — локальное кольцо $B/\mathfrak{b}$, отделимое относительно $\mathfrak{n}$-адической топологии, где $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}/\mathfrak{b}$ — максимальный идеал этого кольца. Пусть c — элемент из A, равный классу mod $\mathfrak{b}$ суммы $\sum_{n=1}^{\infty} X_n^{p^n}$. Показать, что для $k \geqslant 3$ имеет место соотношение $\mathfrak{n}^k \cap (Ac) \not\subset \mathfrak{n}^2 c$ (и *тем более* не может иметь место равенство

$$\mathfrak{n}^2(\mathfrak{n}^{2k} \cap (Ac)) = \mathfrak{n}^{2k+2} \cap (Ac)).$$

б) Пусть C' — коммутативное кольцо, которое как множество совпадает с $A \times A$ и умножение в котором определяется так: $(a, x)\cdot(a', x') = (aa', ax' + a'x)$. Пусть C — подкольцо $A \times (Ac)$ кольца C'; кольца C и C' являются локальными, максимальные идеалы их обозначаются через $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{r}'$; кольцо C' представляет собой C-модуль конечного типа. Показать, что $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}' \cap C$, но топология, индуцированная на C $\mathfrak{r}'$-адической топологией, не является $\mathfrak{r}$-адической.

2) Пусть A — целостное нётерово кольцо, не являющееся полем, K — его поле частных и $\mathfrak{m}$ — идеал в A, отличный от A. Тогда $\mathfrak{m}$-адическая топология кольца A не индуцирована $\mathfrak{m}$-адической топологией поля K, а эта последняя не является отделимой.

3) Если A — кольцо недискретного нормирования ранга 1 (гл. VI) и $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал, то A не является отделимым в $\mathfrak{m}$-адической топологии, причем замыкание множества $\{0\}$ равно $\mathfrak{m}$.

¶ 4) Пусть A — полулокальное кольцо и $\mathfrak{r}$ — его радикал. Для того чтобы A было нётеровым, необходимо и достаточно, чтобы всякий идеал кольца A был замкнут относительно $\mathfrak{r}$-адической топологии и чтобы всякий максимальный идеал кольца A имел конечный тип. (Если эти условия выполнены, показать, что отделимое пополнение $\hat{A}$ кольца A нётерово, используя при этом следствие предложения 19 § 2, п° 13, и следствие 5 теоремы 1 п° 10. После этого обратить внимание на то, что $\mathfrak{r}$-адическая топология на A отделима, и на то, что существует возрастающее инъективное отображение множества идеалов кольца A в множество идеалов кольца $\hat{A}$.)

¶ 5) Пусть A — нётерово коммутативное кольцо и $\mathfrak{m}$ — его радикал.

а) Для того чтобы A было строго линейно компактно относительно линейной топологии $\mathscr{T}$ (§ 2, упражнение 19), необходимо и достаточно, чтобы A было полулокальным и полным относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии; при выполнении указанных условий топология $\mathscr{T}$ обязательно совпадает с $\mathfrak{m}$-адической. (Воспользоваться упражнением 21г) § 2 и упражнением 22а) § 2, а также предложением 6 § 3, п° 3.)

б) Для того чтобы кольцо A было линейно компактным относительно линейной топологии $\mathscr{T}$, необходимо и достаточно, чтобы A было полулокальным и полным относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии и чтобы топология $\mathscr{T}$ была тоньше $\mathfrak{m}$-адической. (Для доказательства достаточности этого условия воспользоваться предложением 6 из п° 3. Для доказательства необходимости свести рассмотрение к случаю, когда A — локальное кольцо, использовав упражнение 21г) из § 2. Рассмотреть сначала случай, когда $\mathscr{T}$ — дискретная топо-

логия, и заметить, что A тогда линейно компактно относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии. Общий случай свести к рассмотрению случая, когда $\mathscr{T}$ — минимальная топология (§ 2, упражнение 18в)); показать, что тогда кольцо A строго линейно компактно и применить критерий γ) из упражнения 19а) § 2 и упражнение 18б) § 2.)

6) Пусть A — целостное нётерово локальное кольцо, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал и K — поле частных. Предположим, что A полно относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии. Рассмотрим на A некоторую линейную топологию $\mathscr{T}$, более тонкую, чем $\mathfrak{m}$-адическая топология. Показать, что если $\mathscr{T}'$ — линейная топология на поле K, фундаментальная система окрестностей нуля которой образована окрестностями нуля в кольце A относительно топологии $\mathscr{T}$, то $\mathscr{T}'$ согласована со структурой поля на K и K полно относительно $\mathscr{T}'$.

7) Пусть A — нётерово коммутативное кольцо и E — некоторый A-модуль. Наделим кольцо A топологией $\mathscr{T}_m(A)$ (§ 2, упражнение 24) и обозначим через $\mathscr{T}_m(E)$ линейную топологию модуля E, фундаментальная система окрестностей нуля которой образована подмодулями $\mathfrak{a}E$, где $\mathfrak{a}$ пробегает фундаментальную систему окрестностей нуля топологии $\mathscr{T}_m(A)$, образованную идеалами кольца A. Показать, что если E является модулем конечного типа, то E — отделимый топологический A-модуль (относительно топологий $\mathscr{T}_m(A)$ и $\mathscr{T}_m(E)$), любой подмодуль которого замкнут. Любая фундаментальная система окрестностей нуля топологии $\mathscr{T}_m(E)$ в этом случае образована подмодулями F модуля E, такими, что E/F представляет собой модуль конечной длины; при этом для любого подмодуля M модуля E топология $\mathscr{T}_m(M)$ индуцируется топологией $\mathscr{T}_m(E)$.

¶ 8) Пусть A — нётерово полулокальное кольцо, $\mathfrak{n}$ — его нильрадикал (который является наибольшим нильпотентным идеалом кольца A) и $\mathfrak{m}$—радикал в A. Показать, что если кольцо A (будучи наделенным $\mathfrak{m}$-адической топологией) таково, что $A/\mathfrak{n}$ — полное кольцо, то полно и само A. (Свести рассмотрение к случаю, когда $\mathfrak{n}$ порожден единственным элементом c, таким, что $c^2 = 0$; с помощью упражнения 9 из *Общей топологии*, 1969, гл. III, § 3, свести все к доказательству того, что модуль $\mathfrak{n} = Ac$ полон, и использовать тот факт, что $\mathfrak{n}$ является $(A/\mathfrak{n})$-модулем.)

¶ 9) а) Пусть A — кольцо Зарисского, $\mathfrak{m}$ — идеал определения кольца A, B — кольцо, которое является A-модулем конечного типа и для которого справедливы включения $A \subset B \subset \hat{A}$. Показать, что если модуль $\mathfrak{m}B$ открыт в B относительно топологии, индуцированной топологией кольца $\hat{A}$, то обязательно имеет место равенство $B = \hat{A}$ (воспользоваться леммой Накаямы).

б) Пусть A — коммутативное нётерово кольцо и $\mathfrak{m}$ — какой-либо идеал в нем. Показать, что если отделимое пополнение $\hat{A}$ кольца A относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии является A-модулем конечного типа, то A полно относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии (свести все к случаю отделимого кольца A; воспользоваться предложением 1 и теоремой 1 гл. V, § 2, n° 1, для того чтобы показать, что A является кольцом Зарисского относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии, и закончить доказательство с помощью пункта а)).

10) Пусть A — кольцо Зарисского, $\mathfrak{m}$ — идеал определения топологии A и E — некоторый A-модуль конечного типа. Показать, что если $\hat{E}$ является $\hat{A}$-модулем, допускающим систему образующих из r элементов, то A-модуль E обладает системой образующих из r элементов (заметить, что $E/\mathfrak{m}E$ и $\hat{E}/\mathfrak{m}\hat{E}$ изоморфны и воспользоваться следствием 2 предложения 4 гл. II, § 3). Имеет ли место этот результат, когда модуль E не предполагается модулем конечного типа (ср. упражнение 9)? Будет ли этот результат верен, когда предполагается лишь нётеровость кольца A (взять $A = \mathbf{Z}$)?

11) Пусть A — кольцо $\mathbf{Z}_p$ целых p-адических чисел (p — простое число), наделенное p-адической топологией, в которой оно представляет собой полное кольцо Зарисского. Пусть E обозначает A-модуль $A^{(\mathbf{N})}$, наделенный p-адической топологией.

а) Показать, что пополнение $\widehat{E}$ модуля E отождествляется с подмодулем модуля $A^{\mathbf{N}}$, образованным последовательностями элементов $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ кольца A, такими, что $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

б) Пусть e_n есть n-й вектор канонического базиса модуля E. Рассмотрим в E подмодуль F, порожденный векторами e_{2n-1}, и подмодуль G, порожденный векторами $p^{2^n}e_{2n} - e_{2n-1}$ $(n \geqslant 1)$. Показать, что топологии, индуцированные на F и G p-адической топологией модуля E, представляют собой p-адические топологии модулей F и G, но тем не менее в $\widehat{E}$ имеет место соотношение

$$\overline{F+G} \neq \overline{F} + \overline{G}.$$

в) Пусть в модуле $\widehat{E}$ взяты элементы $a_r = \sum_{n=0}^{\infty} p^n e_{r+2^n}$ $(r \geqslant 0)$; пусть H — подмодуль модуля $\widehat{E}$, порожденный элементами a_r $(r \geqslant 0)$. Показать, что на H топология, индуцированная p-адической топологией модуля $\widehat{E}$, является p-адической топологией модуля H, но $\overline{E \cap H} \neq \overline{E} \cap \overline{H}$.

г) Пусть L — подмодуль модуля E, порожденный элементами $p^n e_n$. Показать, что на L топология, индуцированная p-адической топологией модуля E, отличается от p-адической топологии модуля L.

12) а) Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ — два идеала этого кольца, содержащиеся в его радикале. Пусть A_i — пополнение кольца A относительно $\mathfrak{m}_i$-адической топологии. Если $\mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{m}_2$, то показать, что тождественное отображение кольца A продолжается по непрерывности до инъективного представления кольца A_1 в кольцо A_2 (ср. *Общая топология*, 1969, гл. III, § 3, п° 5, предложение 9).

б) Пусть $\mathfrak{n} = A_1\mathfrak{m}_2$. Показать, что если канонически отождествить A_1 с некоторым подкольцом в A_2, то A_2 отождествится с пополнением кольца A_1 относительно $\mathfrak{n}$-адической топологии.

13) Пусть A — нётерово локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и B — такое кольцо, что $A \subset B \subset \widehat{A}$. Предположим, что B является локальным нётеровым кольцом с максимальным идеалом $\mathfrak{n}$ (ср. упражнение 14).

а) Показать, что $\mathfrak{n} = B \cap \widehat{\mathfrak{m}}$ и $B = A + \mathfrak{n}$. Если, кроме того, имеет место равенство $\mathfrak{n}^2 = B \cap \widehat{\mathfrak{m}}^2$, то $\mathfrak{n} = B\mathfrak{m}$ (заметить, что в этом случае $\mathfrak{n} = B\mathfrak{m} + \mathfrak{n}^2$).

б) Пусть K — поле, C — кольцо многочленов $K[X]$, $\mathfrak{p}$ — простой идеал CX, A — (нётерово) локальное кольцо $C_{\mathfrak{p}}$ и $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал; пополнение $\widehat{A}$ отождествляется с кольцом формальных рядов $K[[X]]$ (п° 4, предложение 8). Пусть $u = u(X)$ — некоторый элемент из $\widehat{A}$, трансцендентный над полем рациональных дробей $K(X)$ (ср. *Алгебра*, гл. V, § 5, упражнение 13, или *Теория функций действительного переменного*, гл. III, § 1, упражнение 14а)), не имеющий свободного члена; пусть B — подкольцо в $\widehat{A}$, образованное дробями

$$P(X, u(X))/Q(X, u(X)),$$

где P и Q — многочлены из $K[X, Y]$, такие, что $Q(0, 0) \neq 0$. Показать, что B является нётеровым локальным кольцом, содержащим A, максимальный идеал $\mathfrak{n}$ которого порожден элементами X и $u(X)$; однако $\mathfrak{n}$-адическая топология на B строго грубее $\mathfrak{m}$-адической, но строго тоньше, чем топология, индуцированная на B $\widehat{\mathfrak{m}}$-адической топологией на $\widehat{A}$.

в) Сохраняя определения пункта б), обозначим через B' подкольцо кольца B, порожденное кольцом A и элементом $u(X)$. Показать, что B' не является локальным кольцом (заметить, что $B' \cap \mathfrak{n}$ представляет собой максимальный идеал в B', однако в B' имеются элементы, не обратимые в B' и не принадлежащие идеалу $B' \cap \mathfrak{n}$).

¶ 14) Пусть K — поле, C — кольцо $K[X, Y]$, $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал $CX + CY$ кольца C, A — локальное кольцо $C_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал, $\widehat{A}$ — пополнение кольца A, которое отождествляется с кольцом формальных рядов $K[[X, Y]]$ (n° 4, предложение 8). Пусть B — подкольцо кольца $\widehat{A}$, образованное формальными рядами типа $Xf(X, Y) + (P(Y)/Q(Y))$, где $f \in \widehat{A}$ и где P и Q — такие два многочлена из $K[Y]$, что $Q(0) \neq 0$.

а) Показать, что $A \subset B$, что B представляет собой локальное кольцо, максимальный идеал $\mathfrak{n}$ которого равен $B\mathfrak{m}$, и что $\mathfrak{n}^k = B \cap \widehat{\mathfrak{m}}^k$ при любом целом $k \geqslant 1$; следовательно, кольцо B всюду плотно в $\widehat{A}$ и топология, индуцированная на B $\widehat{\mathfrak{m}}$-адической топологией кольца $\widehat{A}$, является $\mathfrak{n}$-адической.

б) Показать, что в кольце B идеал $\mathfrak{b}$, порожденный всеми элементами вида $Xf(Y)$, где $f(Y) \in K[[Y]]$, не является идеалом конечного типа (ср. *Алгебра*, гл. V, § 5, упражнение 13) и, следовательно, кольцо B не является нётеровым, хотя кольца $B/\mathfrak{n}$ и $\mathrm{gr}(B) = \mathrm{gr}(\widehat{A})$ нётеровы и $\mathfrak{n}$ — идеал конечного типа. Имеет место равенство $\mathfrak{b} = B \cap \widehat{A}X$ и $\mathfrak{b}$ представляет собой замыкание в B главного идеала BX (не замкнутого); наконец, B не является плоским A-модулем и $\widehat{B} = \widehat{A}$ не является плоским модулем над B (воспользоваться предложением 9, гл. 1, § 3, n° 5).

в) Пусть $f(Y)$ — обратимый формальный ряд кольца $K[[Y]]$, не являющийся элементом поля $K(Y)$. Если $\mathfrak{c}$ — идеал, порожденный в B элементами X и $Xf(Y)$, то доказать, что на $\mathfrak{c}$ $\mathfrak{n}$-адическая топология строго тоньше той топологии, которая индуцируется на $\mathfrak{c}$ $\mathfrak{n}$-адической топологией кольца B. Показать, что каноническое отображение $\widehat{B} \otimes_B \mathfrak{c} \to \widehat{\mathfrak{c}}$ (где $\widehat{\mathfrak{c}}$ — пополнение $\mathfrak{c}$ относительно $\mathfrak{n}$-адической топологии) не является инъективным (рассмотреть образы элементов $f(Y) \otimes X$ и $1 \otimes Xf(Y)$; для того чтобы показать, что эти два элемента различны в $\widehat{B} \otimes_B \mathfrak{c}$, следует рассмотреть это тензорное произведение как факторкольцо тензорного произведения $\widehat{B} \otimes_{K(Y)} \mathfrak{c}$).

г) Пусть $f_1(Y)$, $f_2(Y)$ — два таких обратимых формальных ряда из $K[[Y]]$, что 1, f_1 и f_2 образуют линейно независимую систему над $K(Y)$. Пусть $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ — два главных идеала кольца B, порожденных элементами $Xf_1(Y)$ и $Xf_2(Y)$ соответственно; $\mathfrak{n}$-адические топологии на $\mathfrak{c}_1$ и $\mathfrak{c}_2$ совпадают соответственно с топологиями, индуцированными топологией кольца B; замыкания $\overline{\mathfrak{c}_1}$ и $\overline{\mathfrak{c}_2}$ этих идеалов в $\widehat{A} = \widehat{B}$ совпадают с главным идеалом $\widehat{A}X$ кольца $\widehat{A}$. Вывести отсюда, что замыкание идеала $\mathfrak{c}_1 \cap \mathfrak{c}_2$ в $\widehat{A}$ не равно идеалу $\overline{\mathfrak{c}_1} \cap \overline{\mathfrak{c}_2}$ и что замыкание идеала $\mathfrak{c}_1 : \mathfrak{c}_2$ в $\widehat{A}$ не равно идеалу $\overline{\mathfrak{c}_1} : \overline{\mathfrak{c}_2}$.

15) а) Пусть A — целостное нётерово кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в A и $\widehat{A}$ — отделимое пополнение кольца A относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии. Показать, что если M — некоторый A-модуль без кручения, то для любого элемента b, не являющегося делителем нуля в $\widehat{A}$, гомотетия умножения на b в $\widehat{A}$-модуле $\widehat{A} \otimes_M M$ инъективна. (Свести рассмотрение к случаю, когда M является модулем конечного типа; в этом случае существуют максимальная свободная система $(m_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ в модуле M и элемент $a \in A$, для которых при любом $m \in M$ имеет место равенство $am = \sum_j a_j m_j$, где $a_j \in A$; следовательно, для всякого $x \in \widehat{A} \otimes_A M$ имеем $ax = \sum_j b_j \otimes m_j$, где $b_j \in \widehat{A}$; воспользоваться теперь тем, что $\widehat{A}$ — плоский A-модуль.)

б) Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики, иуль и B — кольцо многочленов $K[X, Y]$; пусть $P(X, Y) = X(X^2 + Y^2) + (X^2 - Y^2)$. Показать, что идеал BP прост в кольце B; рассматривается факторкольцо $A = B/BP$,

являющееся нётеровым и целостным. Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца A, равный каноническому образу максимального идеала $\mathfrak{n} = BX + BY$ кольца B. Показать, что отделимое пополнение $\widehat{A}$ кольца A относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии не является целостным (обратить внимание на то, что в кольце формальных рядов $K[[X, Y]]$ элемент P представляется в виде произведения двух формальных рядов («двойная точка неприводимой кубической кривой»)).

16) Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в A и E — некоторый A-модуль конечного типа, наделенный $\mathfrak{m}$-адической топологией. Для любого бесконечного множества I обозначим через E_I множество семейств $(x_\iota)_{\iota \in I}$ элементов модуля E, для которых $\lim x_i = 0$ по фильтру дополнений к конечным подмножествам множества I. Это подмодуль A-модуля E^I.

а) Показать, что если $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ — точная последовательность A-модулей конечного типа, то соответствующая последовательность $0 \to E_I \to E_I \to E_I'' \to 0$ точна.

б) Построить канонический A-гомоморфизм $A_I \otimes_A E \to E_I$ для произвольного A-модуля E и показать, что он является изоморфизмом (сначала проверить это, когда E — свободный модуль, а затем применить а)).

в) Получить из б), что A_I является строго плоским A-модулем.

¶ 17) а) Пусть K — поле, $A = K[[X_1, \ldots, X_n]]$ — кольцо формальных рядов от n переменных с коэффициентами из K и V — некоторое векторное пространство над K. Сохраняя обозначения примера 1 § 2, n° 6, будем считать, что $V[[X_1, \ldots, X_n]]$ — векторное пространство $V^{\mathbf{N}^n}$ наделенное структурой A-модуля, определенной формулой $\left(\sum_\alpha c_\alpha X^\alpha\right)(v_\alpha) = (w_\alpha)$, где $w_\alpha = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} c_\beta v_\gamma$. Показать, что если V допускает базис с множеством индексов I, то A-модуль $V[[X_1, \ldots, X_n]]$ изоморфен модулю A^I при условии, что I — конечное миожество, и A-модулю A_I, определениому в упражнении 16, если I бесконечно. Вывести отсюда, что $V[[X_1, \ldots, X_n]]$ является плоским A-модулем и даже строго плоским, если V не равно нулю.

б) Пусть L — расширение поля K. Вывести из а), что кольцо формальных рядов $L[[X_1, \ldots, X_n]]$ является строго плоским модулем над кольцом $K[[X_1, \ldots, X_n]]$. Если L имеет конечный ранг над K, то кольцо $L[[X_1, \ldots, X_n]]$ изоморфно $L \otimes_K K[[X_1, \ldots, X_n]]$.

в) Если L — *алгебраическое* расширение поля K, то показать, что кольцо $L[[X_1, \ldots, X_n]]$ является строго плоским модулем над кольцом

$$L \otimes_K K[[X_1, \ldots, X_n]]$$

(рассмотреть L как индуктивный предел подрасширений конечного ранга над K и воспользоваться предложением 9 гл. I, § 2, n° 7). Вывести отсюда, что кольцо $B = L \otimes_K K[[X_1, \ldots, X_n]]$ является локальным и нётеровым, а его пополнение отождествляется с $L[[X_1, \ldots, X_n]]$. Для того чтобы $\widehat{B} = B$, необходимо и достаточно, чтобы либо $n = 0$, либо $[L : K] < +\infty$.

¶ 18) Пусть A — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$; говорят, что некоторый A-модуль M является *квазиконечным*, если $M/\mathfrak{m}M$ представляет собой векторное пространство конечного ранга над полем вычетов $k = A/\mathfrak{m}$. В частности, если кольцо A целостное, то его поле частных K является квазиконечным A-модулем.

а) Показать, что если кольцо A нётерово и если M — квазиконечный A-модуль, то его отделимое пополнение $\widehat{M}$ относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии представляет собой $\widehat{A}$-модуль конечного типа (применить следствие 2 предложения 14 § 2, n° 11). В частности, если кольцо A полно и M отделим

относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии, то M является A-модулем конечного типа.

б) Пусть B — второе локальное кольцо, $\mathfrak{n}$ — его максимальный идеал, $\varphi\colon A \to B$ — локальный гомоморфизм и M — некоторый B-модуль конечного типа. Показать, что если B нётерово и если M — квазиконечный A-модуль, то $\mathfrak{m}$-адическая и $\mathfrak{n}$-адическая топологии на M совпадают. (Заметить, что $M/\mathfrak{m}M$ является B-модулем конечной длины, и вывести отсюда, что если $\mathfrak{b}$ — аннулятор B-модуля $M/\mathfrak{m}M$, то $V(\mathfrak{b}) = \{\mathfrak{n}\}$ в $\mathrm{Spec}(B)$ и, следовательно, $V(\mathfrak{m}B + \mathfrak{b}) = \{\mathfrak{n}\}$. Закончить доказательство с помощью следствия 2 предложения 11 гл. II, § 4, п° 3.)

в) При предположениях пункта б) показать, что если $M \neq 0$, то $B/\mathfrak{b}$ является квазиконечным A-модулем (заметить, что $M \neq \mathfrak{n}M$ и что $M/\mathfrak{n}M$ представляет собой векторное пространство конечного ранга над k; вывести отсюда, что $B/\mathfrak{n}$ имеет конечный ранг над полем k).

¶ 19) Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в A и S — мультипликативная система в A. Наделим кольцо A $\mathfrak{m}$-адической топологией.

а) Показать, что кольцо $A\{S^{-1}\}$ (§ 2, упражнение 27) является плоским A-модулем.

б) Пусть S' — другая мультипликативная система кольца A, содержащаяся в S. Показать, что $A\{S^{-1}\}$ представляет собой плоский $(A\{S'^{-1}\})$-модуль (воспользоваться упражнением 27г) § 2).

в) Показать, что $A\{S^{-1}\}$ является плоским $A_{\{S\}}$-модулем (§ 2, упражнение 27ж)).

г) Предположим, что $S = A - \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ — *открытый* простой идеал кольца A. Показать, что $A\{S^{-1}\}$ является строго плоским $A_{\{S\}}$-модулем и вывести отсюда, что кольцо $A_{\{S\}}$ нётерово (ср. § 2, упражнение 27ж)).

20) Пусть A — коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — некоторый идеал в A. Наделим кольцо A $\mathfrak{m}$-адической топологией. Пусть B — коммутативная топологическая A-алгебра (§ 2, упражнение 28); предположим, что B является кольцом Зарисского. Пусть $\mathfrak{n}$ — идеал определения кольца B. Показать, что если M — некоторый A-модуль конечного типа, наделенный $\mathfrak{m}$-адической топологией, то на B-модуле $B \otimes_A M$ тензорное произведение топологии кольца B и $\mathfrak{m}$-адической топологии модуля M является $\mathfrak{n}$-адической топологией модуля $B \otimes_A M$; следовательно, пополненное тензорное произведение $(B \otimes_A M)\hat{}$ изоморфно $\hat{B} \otimes_A M$.

21) Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в A и M, N — два A-модуля конечного типа.

а) Предположим, что модуль M отделим относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии. Показать, что в модуле $\mathrm{Hom}_A(M, N)$, наделенном $\mathfrak{m}$-адической топологией, множество инъективных гомоморфизмов открыто (воспользоваться предложением 2 п° 1 и леммой Артина — Рисса).

б) Предположим, что A является полным кольцом Зарисского и $\mathfrak{m}$ — идеал определения этого кольца. Для любого целого i пусть $A_i = A/\mathfrak{m}^{i+1}$, $M_i = M/\mathfrak{m}^{i+1}M$, $N_i = N/\mathfrak{m}^{i+1}N$. Показать, что топологический A-модуль $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ изоморфен модулю $\varprojlim \mathrm{Hom}_{A_i}(M_i, N_i)$. Вывести отсюда, что в модуле $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ множество сюръективных гомоморфизмов открыто.

¶ 22) [1]) Пусть A — кольцо (не обязательно коммутативное), все рассматриваемые A-модули предполагаются левыми. Пусть $\boldsymbol{P}$ — некоторое такое свойство A-модулей, что: α) если $f\colon M \to N$ — инъективный гомоморфизм A-модулей и если N обладает свойством $\boldsymbol{P}$, то и M обладает свойством $\boldsymbol{P}$; β) прямая сумма двух A-модулей, обладающих свойством $\boldsymbol{P}$, обладает свойством $\boldsymbol{P}$.

[1]) Упражнения 22—25 нам сообщил П. Габриэль.

а) Пусть M — некоторый A-модуль. Показать, что те подмодули M' модуля M, для которых M/M' обладает свойством $\boldsymbol{P}$, образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в некоторой линейной топологии $\mathscr{T}_{\boldsymbol{P}}(M)$ на модуле M. Показать, что топология $\mathscr{T}_{\boldsymbol{P}}(A_s)$ согласована со структурой кольца A и что модуль M, наделенный топологией $\mathscr{T}_{\boldsymbol{P}}(M)$, является топологическим модулем над кольцом A, наделенным в свою очередь топологией $\mathscr{T}_{\boldsymbol{P}}(A_s)$. Любой гомоморфизм $f: M \to N$ A-модулей непрерывен в топологиях $\mathscr{T}_{\boldsymbol{P}}(M)$ и $\mathscr{T}_{\boldsymbol{P}}(N)$.

б) Предположим, что выполнено следующее условие: γ) если N является подмодулем в M, обладающим свойством $\boldsymbol{P}$, и если для всякого подмодуля $L \neq 0$ модуля M имеет место соотношение $N \cap L \neq 0$, то M обладает свойством $\boldsymbol{P}$. Показать, что при этих условиях для любого подмодуля F произвольного A-модуля E топология $\mathscr{T}_{\boldsymbol{P}}(F)$ индуцируется топологией $\mathscr{T}_{\boldsymbol{P}}(E)$. (Пусть F' — такой подмодуль в F, что F/F' обладает свойством $\boldsymbol{P}$; рассмотреть какой-нибудь максимальный элемент G среди подмодулей E, таких, что $G \cap F = F'$, и показать, что E/G обладает свойством $\boldsymbol{P}$.)

¶ 23) а) Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в A. Обозначим через $\boldsymbol{P}\{M\}$ следующее свойство: M является A-модулем и любой подмодуль конечного типа в M аннулируется некоторой степенью идеала $\mathfrak{m}$.

Показать, что условия α), β) и γ) упражнения 22 выполнены. (Для доказательства γ) свести рассмотрение к случаю модуля M конечного типа; для любого $a \in \mathfrak{m}$ по условию существует такое число $k > 0$, что $a^k N = 0$; воспользоваться тем, что существует такое $r > 0$, что $\operatorname{Ker}\left(a_M^r\right) \cap \operatorname{Im}\left(a_M^r\right) = 0$ (*Алгебра*, гл. VIII, § 2, n° 2, лемма 2).)

б) Показать, что если M — некоторый A-модуль конечного типа, то топология $\mathscr{T}_{\boldsymbol{P}}(M)$ совпадает с $\mathfrak{m}$-адической топологией. Привести пример A-модуля M, для которого топология $\mathscr{T}_{\boldsymbol{P}}(M)$ строго тоньше $\mathfrak{m}$-адической (ср. упражнение 11).

в) Показать, что утверждение пункта а) не распространяется на случай, когда A — нётерово слева некоммутативное кольцо и $\mathfrak{m}$ — двусторонний идеал в A (рассмотреть кольцо нижних треугольных матриц порядка 2 над полем).

¶ 24) Не равное нулю кольцо A (не обязательно коммутативное) называется кольцом *главных идеалов*, если в нем нет отличных от нуля делителей нуля и если любой как правый, так и левый идеал в A моногенен. Такое кольцо нётерово слева и справа.

а) Показать, что для любого элемента $c \neq 0$ из A кольцо A/Ac является A-модулем конечной длины. (Обратить внимание на то, что если убывающая последовательность идеалов Aa_n кольца A содержит Ac, то $c = b_n a_n$ при всяком n и рассмотреть правые идеалы $b_n A$.)

б) Показать, что любой подмодуль свободного (левого или правого) A-модуля свободен (рассуждение то же, что и в теореме 1 из *Алгебры*, гл. VII, § 3).

в) В любом A-модуле M множество всех элементов, не являющихся свободными, образует некоторый подмодуль T, называемый *подмодулем кручения* модуля M (воспользоваться упражнением 14а) гл. II, § 2); говорят, что M является *модулем кручения* (*или периодическим модулем*), если $T = M$; говорят, что M является модулем *без кручения*, если $T = 0$.

г) Показать, что всякий A-модуль конечного типа без кручения свободен (воспользоваться упражнением 23б) гл. II, § 2).

д) Показать, что всякий A-модуль конечного типа является прямой суммой свободного модуля и модуля кручения.

е) Пусть $\mathfrak{a}$ — ненулевой двусторонний идеал кольца A. Показать, что существуют элемент $a \in \mathfrak{a}$ и автоморфизм δ кольца A, такие, что $\mathfrak{a} = Aa = aA$ и $ax = \delta(x)a$ для любого $x \in A$. (Если b — образующая идеала $\mathfrak{a}$ как левого идеала, то существует такой эндоморфизм τ кольца A, что $bx = \tau(x)b$ при

любом $x \in A$; показать, что если $a = ub$ — образующая идеала $\mathfrak{a}$ как правого идеала, то элемент u обратим, для чего воспользоваться упражнением 8б) из *Алгебры*, гл. VIII, § 2).

¶ 25) Пусть A — кольцо главных идеалов (упражнение 24), $\mathfrak{a}$ — двусторонний идеал в A, отличный от нуля, и a — некоторый элемент из $\mathfrak{a}$, обладающий свойствами, перечисленными в упражнении 24е). Обозначим через $\boldsymbol{P}\{M\}$ следующее свойство: модуль M является левым A-модулем и любой подмодуль конечного типа в M аннулируется некоторой степенью элемента a.

а) Показать, что условия α), β), γ) упражнения 22 выполнены (рассмотреть гомотетию a_M и рассуждать так же, как в упражнении 23а), учитывая, что $\mathrm{Ker}\left(a_M^r\right)$ и $\mathrm{Im}\left(a_M^r\right)$ являются подмодулями в M).

б) Показать, что всякий A-модуль M без кручения (упражнение 24в)) является прямой суммой подмодуля M_a, обладающего свойством $\boldsymbol{P}$, и такого подмодуля M'_a, что ограничение на M'_a гомотетии a_M биективно (обратить внимание на то, что если N является A-модулем без кручения и если a_N инъективно, то a_N и биективно. Надо свести рассмотрение к случаю, когда модуль N моногенен и воспользоваться упражнением 24а), а также леммой 2 из *Алгебры*, гл. VIII, § 2, n° 2).

в) Пусть S — множество элемеитов $s \in A$, канонический образ которых в $A/\mathfrak{a}$ обратим. Показать, что S является мультипликативной системой кольца A и что следующие условия, наложенные на некоторый идеал $\mathfrak{l}$ в A, эквивалентны: α) $\mathfrak{l} \cap S \neq \varnothing$; β) $\mathfrak{l} + \mathfrak{a} = A$; γ) $(A/\mathfrak{l})_a = 0$ (обозначения взяты из б)); δ) для любого $x \in A$ существует такой элемент $s \in S$, что $sx \in \mathfrak{l}$.

Вывести отсюда, что A обладает кольцом частных (левым или правым) относительно системы S (гл. II, § 2, упражнение 22), являющимся кольцом главных идеалов, все ненулевые двусторонние идеалы которого порождены каноническими образами идеалов $\mathfrak{a}^n$; кроме того, каноническое отображение кольца A в это кольцо частных инъективно.

г) Теперь предположим, что двусторонний идеал $\mathfrak{a}$ *максимален*. Показать, что для любого целого числа $n > 0$ кольцо $A/\mathfrak{a}^n$ изоморфно кольцу матриц $\mathbf{M}_r(B_n)$ иад некоторым вполне примариым кольцом (*Алгебра*, гл. VIII, § 6, упражнение 20). Если $\mathfrak{b}_n$ — максимальный идеал кольца B_n, то показать, что $\mathfrak{b}_n^n = 0$ и что любой идеал (левый или правый) в B_n имеет вид $\mathfrak{b}_n^k$ и моногенен. (Заметить, что, с одной стороны, $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^n = \mathbf{M}_r(\mathfrak{b}_n)$ (*Алгебра*, гл. VIII § 6, упражнение 5), а с другой — при $k < n$ идеал $\mathfrak{b}_n^k/\mathfrak{b}_n^{k+1}$ обязательно является простым B_n-модулем, так как в противном случае $\mathbf{M}_r\left(\mathfrak{b}_n^k\right)$ не был бы моногенным $(A/\mathfrak{a}^n)$-модулем.)

Вывести отсюда, что пополнение $\hat{A}$ кольца A относительно топологии $\mathscr{T}_{\boldsymbol{P}}(A_s)$ является кольцом матриц $\mathbf{M}_r(B)$ над некоторым кольцом B без делителей нуля (отличных от нуля), в котором любой идеал (левый или правый) является степенью одного и того же максимального двустороннего идеала.

26) Пусть B — коммутативное кольцо и A — подкольцо в B, являющееся полным, нётеровым и полулокальным. Пусть $\mathfrak{n}$ — идеал в B, содержащий некоторую степень радикала кольца A и такой, что $\mathfrak{n}$-адическая топология иа B отделима. Показать, что в этом случае топология кольца A индуцируется $\mathfrak{n}$-адической топологией кольца B (воспользоваться предложением 8 § 2, n° 7).

¶ 27) Пусть A — кольцо, B — коммутативная A-алгебра, являющаяся кольцом Зарисского, и N — некоторый B-модуль конечного типа.

а) Предположим, что для некоторого идеала $\mathfrak{J}$ кольца B, содержащегося в радикале кольца B, A-модули $N/\mathfrak{J}^{n+1}N$ являются плоскими при всяком $n \geqslant 0$. Показать, что N — плоский A-модуль. (Если $v\colon M \to M'$ — инъективный гомоморфизм A-модулей *конечного типа*, то нужно доказать, что инъективен и гомоморфизм $u = v \otimes 1\colon M \otimes_A N \to M' \otimes_A N$. Свести к доказатель-

ству того факта, что если $N_n = N/\mathfrak{J}^{n+1}N$ и $u_n = v \otimes 1_{N_n}$, то гомоморфизм $\varprojlim u_n$ инъективен, для чего воспользоваться отделимостью $\mathfrak{J}$-адических топологий на $M \otimes_A N$ и $M' \otimes_A N$.)

б) Пусть b — элемент из радикала кольца B, такой, что соответствующая ему гомотетия модуля N инъективна. Показать, что если N/bN является плоским A-модулем, то плоским будет и A-модуль N (свести к пункту а)).

в) Предположим дополнительно, что A — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и полем вычетов $k = A/\mathfrak{m}$ и что $\mathfrak{m}B$ содержится в радикале кольца B. Пусть P — некоторый B-модуль, являющийся плоским A-модулем, и u: $N \to P$ — такой гомоморфизм, что отображение $u \otimes 1_k$: $N \otimes_A k \to P \otimes_A k$ инъективно. Показать, что в этих условиях N является плоским A-модулем, а гомоморфизм u инъективен. (Свести рассмотрение к доказательству того, что при любом A-модуле M конечного типа гомоморфизм $u \otimes 1_M$: $N \otimes_A M \to P \otimes_A M$ инъективен; обратить внимание на то, что $\mathfrak{m}$-адическая топология $N \otimes_A M$ отделима; воспользоваться затем следствием 1 теоремы 1 § 2, n° 8, рассматривая коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{gr}_0(N) \otimes_k \mathrm{gr}(M) & \xrightarrow{\mathrm{gr}_0(u) \otimes 1} & \mathrm{gr}_0(P) \otimes_k \mathrm{gr}(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{gr}(N \otimes_A M) & \xrightarrow{\mathrm{gr}(u \otimes 1)} & \mathrm{gr}(P \otimes_A M) \end{array}$$

и используя плоскостность модуля P (вертикальные стрелки означают канонические гомоморфизмы из § 2, упражнение 6).)

§ 4. Подъем в полных кольцах

1. *Сильно взаимно простые многочлены*

Пусть R — коммутативное кольцо. Два элемента x, y из R называются *сильно взаимно простыми*, если взаимно просты главные идеалы Rx и Ry, другими словами (гл. II, § 1, n° 2), если $Rx + Ry = R$. То же самое можно выразить, потребовав существования элементов a, b из R, для которых $ax + by = 1$.

Лемма 1 (лемма Евклида). *Пусть x, y — два сильно взаимно простых элемента в кольце R; если $z \in R$ — такой элемент, что x делит yz, то x делит z.*

Действительно, если $1 = ax + by$, то $z = x(az) + (yz)b$.

Если x и y — сильно взаимно простые элементы в R, то

$$Rxy = (Rx) \cap (Ry)$$

(гл. II, § 1, n° 2, предложение 5); следовательно, если кольцо R *целостное*, то для двух сильно взаимно простых элементов НОК (наименьшее общее кратное) равно их произведению (*Алгебра*, гл. VI, § 1, n° 8); поэтому эти элементы *взаимно просты* в смысле *Алгебры*, гл. VI, § 1, n° 12. Обратно, если R — кольцо *главных идеалов*, то в нем два взаимно простых элемента будут

также и сильно взаимно простыми, как это следует из тождества Безу (*Алгебра*, гл. VII, § 1, n° 2, теорема 1).

В кольцах многочленов имеет место следующий результат:

Предложение 1. *Пусть A — коммутативное кольцо, P и P' — два сильно взаимно простых многочлена из $A[X]$. Предположим, что P унитарен и имеет степень s. Тогда любой многочлен T из $A[X]$ записывается однозначным образом в виде*

$$T = PQ + P'Q', \tag{1}$$

где $Q \in A[X]$, $Q' \in A[X]$ и $\deg(Q') < s$.

Если, сверх того, $\deg(T) \leqslant t$ и $\deg(P') \leqslant t - s$, то $\deg(Q) \leqslant t - s$.

Поскольку многочлен P унитарен, $RP \neq 0$ для любого многочлена $R \neq 0$ из $A[X]$, и в этом случае $\deg(PR) = s + \deg(R)$.

Пусть T — произвольный многочлен из кольца $A[X]$. Поскольку идеал, порожденный многочленами P и P', равен самому кольцу $A[X]$, существуют такие многочлены Q_1 и Q_1', что $T = PQ_1 + P'Q_1'$; так как P унитарен и имеет степень s, то алгоритм деления Евклида (*Алгебра*, гл. IV, § 1, n° 5) показывает, что существуют два многочлена Q', Q'', такие, что $Q_1' = PQ'' + Q'$ и $\deg(Q') < s$; следовательно,

$$T = PQ_1 + P'(PQ'' + Q') = PQ + P'Q',$$

где $Q = Q_1 + P'Q''$. Для доказательства единственности в формуле (1) достаточно установить, что соотношения

$$0 = PQ + P'Q', \qquad \deg(Q') < s \tag{2}$$

имеют своим следствием равенства $Q = Q' = 0$. Однако если выполнено (2), то P делит $-PQ = P'Q'$, и поскольку P и P' сильно взаимно просты, многочлен P делит многочлен Q' в соответствии с леммой 1; если бы $Q' \neq 0$, то существовал бы такой многочлен $S \neq 0$, что $Q' = PS$, откуда следовало бы, что $\deg(Q') = s + \deg(S) \geqslant s$, а это — противоречие. Следовательно, $Q' = 0$, откуда $PQ = 0$ и, наконец, $Q = 0$ в силу замечания, сделанного вначале.

Наконец, предположим, что $\deg(T) \leqslant t$ и $\deg(P') \leqslant t - s$, многочлен T, взятый в виде (1), дает неравенства

$$\deg(P'Q') \leqslant \deg(P') + \deg(Q') < s + \deg(P') \leqslant t$$

и, следовательно,

$$s + \deg(Q) = \deg(PQ) = \deg(T - P'Q') \leqslant t,$$

откуда $\deg(Q) \leqslant t - s$.

Пример. Для того чтобы многочлен $P \in A[X]$ был сильно взаимно прост с многочленом $X - a$ (где $a \in A$), необходимо и достаточно, чтобы элемент $P(a)$ был *обратим* в A. Действительно, если P и $X - a$ сильно взаимно просты, то из предложения 1 следует, что существуют элемент $c \in A$ и многочлен $Q \in A[X]$, такие, что $cP + (X - a)Q = 1$, откуда $cP(a) = 1$ и элемент $P(a)$ обратим. Обратно, в силу алгоритма деления Евклида,

$$P = (X - a)R + P(a),$$

и если $P(a) = b^{-1}$, где $b \in A$, то $1 = bP - b(X - a)R$. Это доказывает, что P и $X - a$ сильно взаимно просты.

Пусть A и B — два коммутативных кольца, $f\colon A \to B$ — некоторый гомоморфизм колец. Если $P = \sum_{i \geqslant 0} a_i X^i$ — формальный ряд в $A[[X]]$, то через $\bar{f}(P)$ мы будем обозначать формальный ряд $\sum_{i \geqslant 0} f(a_i) X^i$ в $B[[X]]$. Если P является многочленом, то многочленом является и $\bar{f}(P)$, и если, кроме того, многочлен P унитарен, то многочлен $\bar{f}(P)$ унитарен и имеет ту же степень, что и P. Наконец, очевидно, что отображение $P \to \bar{f}(P)$ является гомоморфизмом кольца $A[[X]]$ в $B[[X]]$, продолжающим гомоморфизм f и переводящим X в X. *Обозначение $\bar{f}$ будет использоваться только в этом смысле до конца этого параграфа.*

Предложение 2. *Пусть A и B — два коммутативных кольца, f — некоторый гомоморфизм кольца A в B и P, P' — два многочлена из $A[X]$. Если P и P' сильно взаимно просты в $A[X]$, то $\bar{f}(P)$ и $\bar{f}(P')$ сильно взаимно просты в $B[X]$. Обратное верно, если f — сюръективный гомоморфизм и его ядро содержится в радикале A и если P — унитарный многочлен.*

Предположим, что P и P' сильно взаимно просты; тогда существуют многочлены Q, Q' в $A[X]$, такие, что $PQ + P'Q' = 1$. Значит, $\bar{f}(P)\bar{f}(Q) + \bar{f}(P')\bar{f}(Q') = 1$, откуда получается первое утверждение. Для того чтобы доказать второе, обозначим через $\mathfrak{a}$ ядро гомоморфизма f; положим $E = A[X]$, и пусть F — идеал в E, порожденный многочленами P и P'. Так как f сюръективен и многочлены $\bar{f}(P)$, $\bar{f}(Q)$ сильно взаимно просты, для всякого многочлена $T \in A[X]$ существуют такие два многочлена Q, Q' в $A[X]$, что $\bar{f}(T) = \bar{f}(P)\bar{f}Q + \bar{f}(P')\bar{f}(Q')$, откуда получается соотношение $E = F + \mathfrak{a}E$. Но E/F представляет собой A-модуль конечного типа, так как любой многочлен сравним по модулю P с многочленом степени, меньшей, чем $\deg(P)$, поскольку P унитарен. Так как $E/F = \mathfrak{a}(E/F)$ и $\mathfrak{a}$ содержится в радикале кольца A, то лемма Накаямы показывает, что $E/F = 0$ (*Алгебра*, гл. VIII, § 6, n° 3, следствие 2 предложения 6), а это означает, что P и P' сильно взаимно просты.

2. *Ограниченные формальные ряды*

Определение 1. *Топологическое кольцо A называется линейно топологизированным (а его топология линейной), если существует фундаментальная система $\mathscr{B}$ окрестностей нуля, образованная идеалами кольца A.*

Отметим, что в таком кольце идеалы $\mathfrak{J} \in \mathscr{B}$ являются одновременно *открытыми и замкнутыми* (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 2, n° 1, следствие предложения 4.) Для любого $\mathfrak{J} \in \mathscr{B}$ топологическое факторкольцо $A/\mathfrak{J}$, таким образом, дискретно; для $\mathfrak{J} \in \mathscr{B}$, $\mathfrak{J}' \in \mathscr{B}$, $\mathfrak{J}' \subset \mathfrak{J}$ пусть $h_{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}$: $A/\mathfrak{J}' \to A/\mathfrak{J}$ обозначает каноническое отображение. Известно (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 7, n° 3), что $(A/\mathfrak{J}, h_{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'})$ представляет собой *проективную систему* дискретных колец (относительно фильтрующегося множества индексов $\mathscr{B}$ с отношением порядка $\supset$), проективный предел которой является топологическим кольцом $\hat{A}$, линейно топологизированным, отделимым и полным; кроме того (loc. cit., предложение 2), определяется строгий морфизм i: $A \to \hat{A}$, ядро которого равно замыканию множества $\{0\}$ в A, а образ всюду плотен в $\hat{A}$, так что $\hat{A}$ канонически отождествляется с *отделимым пополнением* кольца A.

Определение 2. *Пусть задано коммутативное топологическое кольцо A. Формальный ряд* $T = \sum_{(n_i)} c_{n_1 n_2 \dots n_p} X_1^{n_1} X_2^{n_2} \dots X_p^{n_p}$ *кольца* $A[[X_1, \dots, X_p]]$ *называется ограниченным, если для любой окрестности V нуля в A существует лишь конечное число коэффициентов $c_{n_1 \dots n_p}$, не принадлежащих окрестности V* (иначе говоря, семейство $(c_{n_1 \dots n_p})$ *сходится к 0 в кольце A* по фильтру дополнений к конечным множествам из $\mathbf{N}^p$).

Если кольцо A *линейно топологизировано*, то ограниченные формальные ряды из кольца $A[[X_1, \dots, X_p]]$ образуют *подкольцо* кольца $A[[X_1, \dots, X_p]]$, которое обозначается через $A\{X_1 \dots, X_p\}$; в самом деле, если

$$T = \sum_{(n_i)} c_{n_1 \dots n_p} X_1^{n_1} \dots X_p^{n_p}, \quad T' = \sum_{(n_i)} c'_{n_1 \dots n_p} X_1^{n_1} \dots X_p^{n_p} -$$

два ограниченных формальных ряда, $\mathfrak{J}$ — некоторая окрестность нуля в A, являющаяся идеалом в A, то существует такое целое m, что $c_{n_1 \dots n_p} \in \mathfrak{J}$ и $c'_{n_1 \dots n_p} \in \mathfrak{J}$ для любой системы $(n_1, \dots, n_p)$, в которой $n_k \geqslant m$ по крайней мере для одного индекса k; если

$$T'' = TT' = \sum_{(n_i)} c''_{n_1 \dots n_p} X_1^{n_1} \dots X_p^{n_p},$$

то $c''_{n_1 \dots n_p} = \sum c_{r_1 \dots r_p} c'_{s_1 \dots s_p}$ для всяких систем (r_k), (s_k), у которых $r_k + s_k = n_k$ при $1 \leqslant k \leqslant p$; отсюда получается, что если $n_k \geqslant 2m$, то $r_k + s_k = n_k$ или $s_k > m$, следовательно, поскольку $\mathfrak{J}$ — идеал, $c''_{n_1 \dots n_p} \in \mathfrak{J}$, лишь только $n_k \geqslant 2m$ по крайней мере при одном k; этим установлено наше утверждение. Кроме того, любая *производная* $\partial T/\partial X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ ограниченного формального ряда является ограниченным рядом, что следует непосредственно из определения и того факта, что окрестности $\mathfrak{J} \in \mathscr{B}$ являются аддитивными подгруппами аддитивной группы A.

Когда кольцо A *дискретно*, кольцо ограниченных формальных рядов есть не что иное, как кольцо многочленов $A[X_1, \dots, X_p]$.

Будем считать, что кольцо A всегда *линейно топологизировано*, и пусть $\mathscr{B}$ — фундаментальная система окрестностей нуля в A, образованная идеалами этого кольца; для любого идеала $\mathfrak{J} \in \mathscr{B}$ пусть $p_{\mathfrak{J}}$: $A \to A/\mathfrak{J}$ обозначает канонический гомоморфизм. По определению для любого ограниченного формального ряда $T \in A\{X_1, \dots, X_p\}$ имеет место включение $\bar{p}_{\mathfrak{J}}(T) \in (A/\mathfrak{J})[X_1, \dots, X_p]$. Очевидно, что

$$((A/\mathfrak{J})[X_1, \dots, X_p],\ \bar{h}_{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'})$$

представляет собой проективную систему колец (относительно фильтрующегося множества индексов $\mathscr{B}$) и что $(\bar{p}_{\mathfrak{J}})$ является проективной системой гомоморфизмов $A\{X_1, \dots, X_p\} \to (A/\mathfrak{J})[X_1, \dots, X_p]$; поскольку любой многочлен является ограниченным формальным рядом, отображение $\bar{p}_{\mathfrak{J}}$ сюръективно; его ядро $N_{\mathfrak{J}}$ равно идеалу кольца $A\{X_1, \dots, X_p\}$, образованному ограниченными формальными рядами, все коэффициенты которых принадлежат $\mathfrak{J}$. Мы наделим кольцо $A\{X_1, \dots, X_n\}$ (линейной) топологией, в которой идеалы $N_{\mathfrak{J}}$ (для $\mathfrak{J} \in \mathscr{B}$) образуют фундаментальную систему окрестностей нуля (эта топология зависит, очевидно, только от самого кольца A). В таком случае из предложения 2 в *Общей топологии*, 1969, гл. III, § 7, п° 3, следует, что

$$\pi = \varprojlim_{\mathfrak{J}} \bar{p}_{\mathfrak{J}}\colon\ A\{X_1, \dots, X_p\} \to \varprojlim_{\mathfrak{J}} (A/\mathfrak{J})[X_1, \dots, X_p] \qquad (3)$$

является *строгим морфизмом*, ядро которого представляет собой замыкание множества $\{0\}$ в кольце $A\{X_1, \dots, X_p\}$ и образ которого плотен в

$$A' = \varprojlim_{\mathfrak{J}} (A/\mathfrak{J})[X_1, \dots, X_p].$$

Предложение 3. *Если линейно топологизированное коммутативное кольцо A отделимо и полно, то канонический гомоморфизм π является изоморфизмом топологических колец.*

Действительно, для любого набора $(n_1, \ldots, n_p) \in \mathbf{N}^p$ и любого идеала $\mathfrak{J} \in \mathscr{B}$ обозначим через $\varphi^{\mathfrak{J}}_{n_1 \ldots n_p}$ отображение $(A/\mathfrak{J})[X_1, \ldots, X_p] \to A/\mathfrak{J}$, которое каждому многочлену сопоставляет его коэффициент при $X_1^{n_1} \ldots X_p^{n_p}$; очевидно, что отображения $\varphi^{\mathfrak{J}}_{n_1 \ldots n_p}$ образуют проективную систему гомоморфизмов $(A/\mathfrak{J})$-модулей (относительно упорядоченного множества $\mathscr{B}$); поскольку A канонически отождествляется с $\varprojlim_{\mathfrak{J}} (A/\mathfrak{J})$, в силу условия, ясно, что $\varphi_{n_1 \ldots n_p} = \varprojlim_{\mathfrak{J}} \varphi^{\mathfrak{J}}_{n_1 \ldots n_p}$ представляет собой непрерывный A-гомоморфизм из A' в A. Для любого элемента $S = (S_{\mathfrak{J}})_{\mathfrak{J} \in \mathscr{B}}$ кольца A' мы сейчас установим, что формальный ряд $T = \sum_{(n_i)} \varphi_{n_1 \ldots n_p}(S) X_1^{n_1} \ldots X_p^{n_p}$ ограничен и удовлетворяет равенству $\pi(T) = S$. В самом деле, для любого идеала $\mathfrak{J} \in \mathscr{B}$ и любого идеала $\mathfrak{J}' \in \mathscr{B}$, для которого $\mathfrak{J}' \subset \mathfrak{J}$, из соотношения $\varphi^{\mathfrak{J}}_{n_1 \ldots n_p}(S_{\mathfrak{J}}) = 0$ вытекает, что

$$\varphi^{\mathfrak{J}'}_{n_1 \ldots n_p}(S_{\mathfrak{J}'}) \in \mathfrak{J}/\mathfrak{J}';$$

так как $S_{\mathfrak{J}}$ представляет собой многочлен, то $\varphi_{n_1 \ldots n_p}(S) \in \mathfrak{J}$ для всех, кроме конечного числа, наборов $(n_1, \ldots, n_p)$, у которых $\varphi^{\mathfrak{J}}_{n_1 \ldots n_p}(S_{\mathfrak{J}}) \neq 0$; этим доказано наше первое утверждение; что касается второго, то оно следует из определений. Поскольку кольцо A отделимо, пересечение идеалов $N_{\mathfrak{J}}$ равно нулю, так что гомоморфизм π *биективен*, чем и заканчивается доказательство, ибо π — строгий морфизм.

Предложение 4. *Пусть A, B — два линейно топологизированных коммутативных кольца, причем B отделимо и полно, и u: $A \to B$ — некоторый непрерывный гомоморфизм. Для любого семейства $\mathfrak{b} = (b_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ элементов кольца B существует, и притом единственный, непрерывный гомоморфизм*

$$\tilde{u}\colon A\{X_1, \ldots, X_p\} \to B,$$

такой, что $\tilde{u}(a) = u(a)$ для любого $a \in A$ и $\tilde{u}(X_i) = b_i$ для $1 \leqslant i \leqslant p$.

Действительно, существует гомоморфизм v: $A[X_1, \ldots, X_p] \to B$, являющийся единственным при условии, что $v(a) = u(a)$

для $a \in A$ и $v(X_i) = b_i$ для $1 \leqslant i \leqslant p$. Кроме того, если $\mathfrak{H}$ — некоторая окрестность нуля в B, являющаяся идеалом, то $u^{-1}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{J}$ представляет собой идеал кольца A, являющийся окрестностью нуля, и для любого многочлена $P \in N_{\mathfrak{J}}$, очевидно, имеет место включение $v(P) \in \mathfrak{H}$, так что v непрерывно. Поскольку $A[X_1 \ldots X_p]$ плотно в $A\{X_1 \ldots X_p\}$, существование и единственность гомоморфизма $\tilde{u}$ следуют из предложения 5 в *Общей топологии*, 1969, гл. III, § 3, n° 3, и принципа продолжения тождеств.

• В частном случае, когда $A = B$ и u является тождественным отображением, мы будем писать $f(b_1, \ldots, b_p)$ или $f(\mathbf{b})$ вместо $\tilde{u}(f)$ для любого ограниченного формального ряда $f \in A\{X_1, \ldots, X_p\}$.

Замечания. 1) Предложение 4 доказывает, что для всякого *замкнутого* идеала $\mathfrak{a}$ некоторого кольца A, являющегося отделимым и полным, соотношения $b_i \in \mathfrak{a}$ при $1 \leqslant i \leqslant p$ влекут, что $f(b_1, \ldots, b_p) \in \mathfrak{a}$ для любого ограниченного формального ряда $f \in A\{X_1, \ldots, X_p\}$, свободный член которого содержится в $\mathfrak{a}$.

2) Предположим, что кольцо A линейно топологизировано. Пусть r — такое целое число, что $1 \leqslant r \leqslant p$, и наделим кольцо $A\{X_1, \ldots, X_r\}$ определенной выше топологией. Тогда топологическое кольцо $A\{X_1, \ldots, X_p\}$ отождествляется с кольцом ограниченных формальных рядов

$$(A\{X_1, \ldots, X_r\})\{X_{r+1}, \ldots, X_p\},$$

что следует непосредственно из определений.

3) В обозначениях замечания 2 предположим, кроме того, что A отделимо и полно и запишем ограниченный формальный ряд $f \in A\{X_1, \ldots, X_p\}$ в виде

$$f = \sum_{(n_i)} c_{n_{r+1} \ldots n_p}(X_1, \ldots, X_r) X_{r+1}^{n_{r+1}} \ldots X_p^{n_p},$$

где $c_{n_{r+1} \ldots n_p}$ — ограниченные формальные ряды. Для любой системы $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r)$ элементов кольца A пусть

$$b_{n_{r+1} \ldots n_p} = c_{n_{r+1} \ldots n_p}(x_1, \ldots, x_r).$$

Из замечания 1 немедленно следует, что $\sum_{(n_i)} b_{n_{r+1} \ldots n_p} X_{r+1}^{n_{r+1}} \ldots X_p^{n_p}$ является *ограниченным* формальным рядом, который обозначим через $f(x_1, \ldots, x_r, X_{r+1}, \ldots, X_p)$; говорят, что этот ряд получается *подстановкой* элементов x_i вместо X_i для $1 \leqslant i \leqslant r$ в ряд f.

3. *Лемма Гензеля*

Элемент x топологического кольца A называется *топологически нильпотентным*, если 0 является пределом последовательности $(x^n)_{n\geqslant 0}$. Если A представляет собой *линейно топологизированное* коммутативное кольцо, то высказывание, что $x\in A$ топологически нильпотентен, равносильно тому, что для всякого открытого идеала $\mathfrak{J}$ кольца A канонический образ элемента x в $A/\mathfrak{J}$ является *нильпотентным* элементом этого кольца. Если $\mathfrak{r}_{\mathfrak{J}}$ — нильрадикал кольца $A/\mathfrak{J}$, то очевидно, что $(\mathfrak{r}_{\mathfrak{J}})$ является проективной системой и множество $\mathfrak{r}$ топологически нильпотентных элементов кольца A представляет собой полный прообраз идеала $\mathfrak{r}=\varprojlim_{\mathfrak{J}}\mathfrak{r}_{\mathfrak{J}}$ при каноническом гомоморфизме $A\to\varprojlim A/\mathfrak{J}$; следовательно, это *замкнутый идеал* в A. Если, кроме того, A *отделимо и полно*, то этот идеал содержится в радикале кольца A, и, для того чтобы некоторый элемент $x\in A$ был обратим, необходимо и достаточно, чтобы его класс $\bmod\mathfrak{r}$ был обратим в $A/\mathfrak{r}$ (§ 2, п° 13, лемма 13).

Отметим, что если A — любое кольцо и $\mathfrak{m}$ — двусторонний идеал в нем, то элементы из $\mathfrak{m}$ топологически нильпотентны в $\mathfrak{m}$-*адической* топологии.

Теорема 1 (Гензель). *Пусть A — линейно топологизированное коммутативное кольцо, предполагаемое отделимым и полным. Пусть $\mathfrak{m}$ — замкнутый идеал в A, элементы которого топологически нильпотентны. Пусть $B=A/\mathfrak{m}$ — топологическое факторкольцо и $\varphi\colon A\to B$ — каноническое отображение. Пусть R — ограниченный формальный ряд из $A\{X\}$, $\overline{P}$ — унитарный многочлен из $B[X]$ и $\overline{Q}$ — ограниченный формальный ряд из $B\{X\}$. Предположим, что $\bar{\varphi}(R)=\overline{P}\cdot\overline{Q}$ и что $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ являются сильно взаимно простыми в кольце $B\{X\}$. Тогда существует, и притом единственная, пара (P, Q), образованная унитарным многочленом $P\in A[X]$ и ограниченным формальным рядом $Q\in A\{X\}$, для которой*

$$R=P\cdot Q,\quad \bar{\varphi}(P)=\overline{P},\quad \bar{\varphi}(Q)=\overline{Q}. \tag{4}$$

Кроме того, P и Q являются сильно взаимно простыми в $A\{X\}$, и если R — многочлен, то многочленом является и Q.

Доказательство проводится в четыре этапа. В первых трех кольцо A предполагается *дискретным*, и в этом случае R и $\overline{Q}$ являются многочленами.

1) $\mathfrak{m}^2=0$.

Пусть S, T — два многочлена из $A[X]$, причем S унитарен и $\bar{\varphi}(S)=\overline{P}$, $\bar{\varphi}(T)=\overline{Q}$; предложение 2 п° 1 показывает, что S и T

сильно взаимно просты. Следовательно (n° 1, предложение 1), существует единственная пара многочленов (S', T') из $A[X]$, такая, что

$$R - ST = ST' + TS' \text{ и } \deg(S') < \deg(S) = \deg(\overline{P}). \quad (5)$$

Многочлены $P = S + TS'$, $Q = T + T'$ отвечают тогда предъявленным требованиям; в самом деле,

$$\overline{P} \cdot \bar{\varphi}(T') + \overline{Q} \cdot \bar{\varphi}(S') = \bar{\varphi}(ST' + TS') = \bar{\varphi}(R - ST) = 0. \quad (6)$$

Поскольку $\overline{P}$ унитарен, многочлены $\overline{P}$ и $\overline{Q}$ — сильно взаимно просты и

$$\deg(\bar{\varphi}(S')) < \deg(\overline{P}),$$

предложение 1 n° 1 показывает, что $\bar{\varphi}(S') = \bar{\varphi}(T') = 0$, иначе говоря, коэффициенты многочленов S' и T' принадлежат $\mathfrak{m}$ и соотношение $\mathfrak{m}^2 = 0$ дает равенство $PQ = ST + ST' + TS' = R$, что удовлетворяет соотношениям (4). Так как $\bar{\varphi}(P) = \overline{P}$ и $\bar{\varphi}(Q) = \overline{Q}$, то P и Q сильно взаимно просты (n° 1, предложение 2); наконец, если P_1, Q_1 — два других многочлена, удовлетворяющих условиям (4), причем P_1 является унитарным, то, положив $S'_1 = P_1 - S$, $T'_1 = Q_1 - T$, обязательно получаем $\deg(S'_1) < \deg(S)$ и $R - ST = ST'_1 + TS'_1$, так как коэффициенты многочленов S'_1 и T'_1 лежат в $\mathfrak{m}$; но предложение 1 доказывает в этом случае, что $S' = S'_1$ и $T' = T'_1$, чем и устанавливается единственность пары (P, Q).

2) *Идеал $\mathfrak{m}$ нильпотентен.*

Пусть n — наименьшее целое число, для которого $\mathfrak{m}^n = 0$, и будем рассуждать индукцией по $n > 2$, учитывая, что теорема доказана для $n = 2$. Пусть $A' = A/\mathfrak{m}^{n-1}$, $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{n-1}$; поскольку $\mathfrak{m}'^{n-1} = 0$, существует единственная пара (P', Q') многочленов из $A'[X]$, такая, что многочлен P' унитарен, $R' = P'Q'$, $\bar{\psi}(P') = \overline{P}$ и $\bar{\psi}(Q') = \overline{Q}$, где через ψ обозначен канонический гомоморфизм $A' \to A'/\mathfrak{m}' = B$, через θ — канонический гомоморфизм $A \to A'$ и где $R' = \theta(R)$. С другой стороны, так как $(\mathfrak{m}^{n-1})^2 = 0$, то существует единственная пара (P, Q) многочленов из $A[X]$, такая, что P унитарен и $R = PQ$, $\bar{\theta}(P) = P'$, $\bar{\theta}(Q) = Q'$. Поскольку $\varphi = \psi \circ \theta$, то это доказывает существование и единственность многочленов P и Q, удовлетворяющих условиям (4). Кроме того, P' и Q' сильно взаимно просты, в силу предположения индукции, так что сильно взаимно просты и многочлены P и Q.

3) *Кольцо A дискретно.*

Следует заметить, что в этом случае идеал $\mathfrak{m}$ не обязан быть нильпотентным; однако, по условию, он непременно яв-

ляется *нильидеалом*. Пусть P_0, Q_0 — два многочлена из кольца $A[X]$, такие, что $\bar{\varphi}(P_0) = \bar{P}$, $\bar{\varphi}(Q_0) = \bar{Q}$, и при этом многочлен P_0 унитарен. Рассмотрим идеал $\mathfrak{n}$ кольца A, порожденный коэффициентами многочлена $R = P_0Q_0$; он является идеалом конечного типа и содержится в $\mathfrak{m}$; следовательно, $\mathfrak{n}$ — *нильпотентный* идеал (гл. II, § 2, n° 6, предложение 15) и, согласно определению, если $\psi\colon A \to A/\mathfrak{n}$ — каноническое отображение, то $\bar{\psi}(R) = \bar{\psi}(P_0)\bar{\psi}(Q_0)$. Кроме того, элементы $\bar{\psi}(P_0)$ и $\bar{\psi}(Q_0)$ сильно взаимно просты, что вытекает из предположений относительно $\bar{P}$ и $\bar{Q}$ и из предложения 2 n° 1, примененного к каноническому гомоморфизму $A/\mathfrak{n} \to A/\mathfrak{m}$, поскольку его ядро $\mathfrak{m}/\mathfrak{n}$ содержится в радикале кольца $A/\mathfrak{n}$. Согласно случаю 2), существует пара (P, Q) сильно взаимно простых многочленов кольца $A[X]$, в которой P унитарен и которая удовлетворяет соотношениям (4). Наконец, предположим, что P_1 и Q_1 — многочлены из $A[X]$, удовлетворяющие (4), причем P_1 унитарен, и пусть $\mathfrak{n}_1$ — идеал конечного типа в A, порожденный коэффициентами многочлена $P - P_1$ и многочлена $Q - Q_1$; поскольку идеал $\mathfrak{n}_1$ содержится в $\mathfrak{m}$, он нильпотентен. Если $\psi_1\colon A \to A/\mathfrak{n}_1$ — каноническое отображение, то $\bar{\psi}_1(P) = \bar{\psi}_1(P_1)$, $\bar{\psi}_1(Q) = \bar{\psi}_1(Q_1)$; из свойства единственности, рассмотренного в случае 2), следует, что $P = P_1$, $Q = Q_1$.

4) *Общий случай.*

Пусть $\mathscr{B}$ — фундаментальная система окрестностей нуля в кольце A, образованная идеалами этого кольца. Для любого $\mathfrak{J} \in \mathscr{B}$ обозначим через $f_{\mathfrak{J}}$ каноническое отображение $A \to A/\mathfrak{J}$, через $\varphi_{\mathfrak{J}}$ — каноническое отображение

$$A/\mathfrak{J} \to (A\mathfrak{J}/\mathfrak{J})/((\mathfrak{m}+\mathfrak{J})/\mathfrak{J}) = A/(\mathfrak{m}+\mathfrak{J}),$$

через $g_{\mathfrak{J}}$ — каноническое отображение $B = A/\mathfrak{m} \to A/(\mathfrak{m}+\mathfrak{J})$ и положим $R_{\mathfrak{J}} = \bar{f}_{\mathfrak{J}}(R)$, $\bar{P}_{\mathfrak{J}} = \bar{g}_{\mathfrak{J}}(\bar{P})$, $\bar{Q}_{\mathfrak{J}} = \bar{g}_{\mathfrak{J}}(\bar{Q})$. Поскольку каждое из колец $A/\mathfrak{J}$ дискретно, можно применить случай 3) и увидеть, что существует пара таких многочленов $(P_{\mathfrak{J}}, Q_{\mathfrak{J}})$ из $(A/\mathfrak{J})[X]$, что $P_{\mathfrak{J}}$ унитарен и $R_{\mathfrak{J}} = P_{\mathfrak{J}}Q_{\mathfrak{J}}$, $\bar{\varphi}_{\mathfrak{J}}(P_{\mathfrak{J}}) = \bar{P}_{\mathfrak{J}}$, $\bar{\varphi}_{\mathfrak{J}}(Q_{\mathfrak{J}}) = \bar{Q}_{\mathfrak{J}}$. Единственность этой пары означает, что если $\mathfrak{J}' \subset \mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}' \in \mathscr{B}$ и если $\bar{f}_{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}\colon A/\mathfrak{J}' \to A/\mathfrak{J}$ — каноническое отображение, то $P_{\mathfrak{J}} = \bar{f}_{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}(P_{\mathfrak{J}'})$, $Q_{\mathfrak{J}} = \bar{f}_{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}(Q_{\mathfrak{J}'})$. Следовательно, из канонического отождествления $A\{X\}$ и $\varprojlim_{\mathfrak{J}} (A/\mathfrak{J})[X]$ (n° 2, предложение 3) вытекает, что существуют $P \in A\{X\}$ и $Q \in A\{X\}$, такие, что $R = PQ$ и $\bar{f}_{\mathfrak{J}}(P) = P_{\mathfrak{J}}$, $\bar{f}_{\mathfrak{J}}(Q) = Q_{\mathfrak{J}}$ при любом $\mathfrak{J} \in \mathscr{B}$. Далее, имеют место равенства $\bar{g}_{\mathfrak{J}}(\bar{P} - \bar{\varphi}(P)) = 0$, $\bar{g}_{\mathfrak{J}}(\bar{Q} - \bar{\varphi}(Q)) = 0$ при любом $\mathfrak{J} \in \mathscr{B}$, а это означает, что при любом $\mathfrak{J} \in \mathscr{B}$ коэффициенты разностей $\bar{P} - \bar{\varphi}(P)$ и $\bar{Q} - \bar{\varphi}(Q)$ принадлежат идеалу $(\mathfrak{m}+\mathfrak{J})/\mathfrak{m}$. Но так как

идеал $\mathfrak{m}$ замкнут в A, то $\bigcap_{\mathfrak{J}}(\mathfrak{m}+\mathfrak{J})=\mathfrak{m}$, откуда следует, что $\overline{P}=\bar{\varphi}(P)$, $\overline{Q}=\bar{\varphi}(Q)$ и, следовательно, P и Q удовлетворяют соотношениям (4); далее, поскольку $P_{\mathfrak{J}}$ унитарны и имеют одинаковую степень, ограниченный формальный ряд P является унитарным многочленом. Если бы существовала другая пара (P', Q'), удовлетворяющая (4), в которой P' был бы унитарным многочленом, то получилось бы, что $R_{\mathfrak{J}}=\bar{f}_{\mathfrak{J}}(P')\bar{f}_{\mathfrak{J}}(Q')$, $\bar{\varphi}_{\mathfrak{J}}(\bar{f}_{\mathfrak{J}}(P'))=\overline{P}_{\mathfrak{J}}$ и $\bar{\varphi}_{\mathfrak{J}}(\bar{f}_{\mathfrak{J}}(Q'))=\overline{Q}_{\mathfrak{J}}$; в силу единственности из случая 3) $\bar{f}_{\mathfrak{J}}(P')=P_{\mathfrak{J}}$, $\bar{f}_{\mathfrak{J}}(Q')=Q_{\mathfrak{J}}$ при любом $\mathfrak{J}\in\mathscr{B}$, а потому $P=P'$ и $Q=Q'$. Наконец, покажем, что P и Q сильно взаимно просты. Согласно случаю 3) и предложению 1 n° 1, для любого $\mathfrak{J}\in\mathscr{B}$ существует единственная пара $(S_{\mathfrak{J}}, T_{\mathfrak{J}})$ многочленов из $(A/\mathfrak{J})[X]$, таких, что

$$1=P_{\mathfrak{J}}S_{\mathfrak{J}}+Q_{\mathfrak{J}}T_{\mathfrak{J}} \quad \text{и} \quad \deg(T_{\mathfrak{J}})<\deg(P_{\mathfrak{J}})=\deg(\overline{P}). \tag{7}$$

Единственность этой пары немедленно показывает, что для $\mathfrak{J}'\in\mathscr{B}$, $\mathfrak{J}'\subset\mathfrak{J}$ имеют место равенства $S_{\mathfrak{J}}=\bar{f}_{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}(S_{\mathfrak{J}'})$, $T_{\mathfrak{J}}=\bar{f}_{\mathfrak{J}\mathfrak{J}'}(T_{\mathfrak{J}'})$. Принимая во внимание предложение 3 n° 2, мы устанавливаем существование ограниченных формальных рядов S, T из $A\{X\}$, таких, что $S_{\mathfrak{J}}=\bar{f}_{\mathfrak{J}}(S)$, $T_{\mathfrak{J}}=\bar{f}_{\mathfrak{J}}(T)$ и $1=PS+QT$.

Остается проверить, что если R — некоторый многочлен, то многочленом является и Q. Но $Q_{\mathfrak{J}}$ представляют собой многочлены по построению, и, поскольку $P_{\mathfrak{J}}$ унитарны, из соотношения $R_{\mathfrak{J}}=P_{\mathfrak{J}}Q_{\mathfrak{J}}$ следует, что

$$\deg(Q_{\mathfrak{J}})\leqslant\deg(R_{\mathfrak{J}})\leqslant\deg(R)$$

для любого $\mathfrak{J}\in\mathscr{B}$; отсюда немедленно получается требуемое в силу определения ряда Q.

4. *Композиция систем формальных рядов*

Пусть A — коммутативное кольцо; мы будем говорить, что система

$$\mathbf{f}=(f_1, \ldots, f_p)\in(A[[X_1, \ldots, X_q]])^p \tag{8}$$

формальных рядов от переменных X_j $(1\leqslant j\leqslant q)$ с коэффициентами из A *не имеет свободного члена*, если не имеют свободного члена все ряды f_j. Для любой системы (8) формальных рядов и любой системы

$$\mathbf{g}=(g_1, \ldots, g_q)\in(A[[X_1, \ldots, X_r]])^q, \tag{9}$$

состоящей из q формальных рядов без свободного члена, мы будем обозначать через $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$ (или через $\mathbf{f}(\mathbf{g})$) систему формальных рядов $f_j(g_1, \ldots, g_q)$ $(1\leqslant j\leqslant p)$ из $(A[[X_1, \ldots, X_r]])^p$

(*Алгебра*, гл. IV, § 5, n° 5). Если

$$\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_r) \in (A[[X_1, \ldots, X_s]])^r$$

— какая-нибудь третья система без свободного члена, то

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) \circ \mathbf{h} = \mathbf{f} \circ (\mathbf{g} \circ \mathbf{h}). \tag{10}$$

В самом деле, для любого целого m

$$(\mathbf{f}^{(m)} \circ \mathbf{g}^{(m)}) \circ \mathbf{h}^{(m)} = \mathbf{f}^{(m)} \circ (\mathbf{g}^{(m)} \circ \mathbf{h}^{(m)}),$$

если через $\mathbf{f}^{(m)}$, $\mathbf{g}^{(m)}$, $\mathbf{h}^{(m)}$ обозначить системы многочленов, образованных слагаемыми полной степени $\leqslant m$ в системах формальных рядов $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$. Но очевидно, что члены полной степени $\leqslant m$ в рядах $(\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) \circ \mathbf{h}$ (соответственно $\mathbf{f} \circ (\mathbf{g} \circ \mathbf{h})$) являются теми же, что и в $(\mathbf{f}^{(m)} \circ \mathbf{g}^{(m)}) \circ \mathbf{h}^{(m)}$ (соответственно $\mathbf{f}^{(m)} \circ (\mathbf{g}^{(m)} \circ \mathbf{h}^{(m)})$), откуда и получается наше утверждение.

Для любой системы (8) мы будем обозначать через $M_{\mathbf{f}}$ или через $M_{\mathbf{f}}(X)$ якобиеву матрицу $\partial f_i / \partial X_j$ $(1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant q)$, где i является индексом строк, а j — индексом столбцов; для двух систем (8) и (9), где $\mathbf{g}$ — система без свободного члена, имеет место формула

$$M_{\mathbf{f} \circ \mathbf{g}} = (M_{\mathbf{f}}(\mathbf{g})) \cdot M_{\mathbf{g}}, \tag{11}$$

где $M_{\mathbf{f}}(\mathbf{g})$ — матрица, элементы которой получаются подстановкой рядов g_j на место переменных X_j $(1 \leqslant j \leqslant q)$ в каждом ряде, являющемся элементом матрицы $M_{\mathbf{f}}$; эта формула представляет собой не что иное, как перефразировку формулы (9) из *Алгебры*, гл. IV, § 5, n° 8. Мы будем обозначать через $M_{\mathbf{f}}(0)$ матрицу свободных членов матрицы $M_{\mathbf{f}}$; следовательно, из (11) получается, что

$$M_{\mathbf{f} \circ \mathbf{g}}(0) = M_{\mathbf{f}}(0) \cdot M_{\mathbf{g}}(0). \tag{12}$$

Считая заданным целое число $n > 0$, мы будем использовать такое обозначение:

$$\mathbf{1}_n = \mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \in (A[[X_1, \ldots, X_n]])^n; \tag{13}$$

этот набор будет рассматриваться как матрица, состоящая из одного столбца.

Для любой системы $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n) \in (A[[X_1, \ldots, X_n]])^n$ матрица $M_{\mathbf{f}}$ представляет собой квадратную матрицу порядка n; будем обозначать через $J_{\mathbf{f}}$ или через $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{X})$ ее определитель, а через $J_{\mathbf{f}}(0)$ — свободный член определителя $J_{\mathbf{f}}$, равный элементу $\det(M_{\mathbf{f}}(0))$; если $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ — некоторая система без свободного члена из $(A[[X_1, \ldots, X_n]])^n$, то, в силу формул (11) и (12), имеет место равенство

$$J_{\mathbf{f} \circ \mathbf{g}} = J_{\mathbf{f}}(g) \cdot J_{\mathbf{g}}, \tag{14}$$

а также равенство

$$J_{\mathbf{f}\circ\mathbf{g}}(0) = J_{\mathbf{f}}(0) \cdot J_{\mathbf{g}}(0). \tag{15}$$

Предложение 5. *Пусть A — коммутативное кольцо, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ — система без свободного члена из n рядов кольца $A[[X_1, \ldots, X_n]]$. Предположим, что элемент $J_{\mathbf{f}}(0)$ обратим в A. Тогда существует такая система без свободного члена $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ из n рядов кольца $A[[X_1, \ldots, X_n]]$, что*

$$\mathbf{f} \circ \mathbf{g} = \mathbf{1}_n. \tag{16}$$

Эта система единственна и

$$\mathbf{g} \circ \mathbf{f} = \mathbf{1}_n. \tag{17}$$

Существование и единственность системы $\mathbf{g}$ следуют из предложения 10 в *Алгебре*, гл. IV, § 5, n° 9, примененного к n формальным рядам

$$f_i(Y_1, \ldots, Y_n) - X_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Из равенств (15) и (16) следует что $J_{\mathbf{f}}(0) J_{\mathbf{g}}(0) = 1$, следовательно, элемент $J_{\mathbf{g}}(0)$ тоже обратим. Отсюда можно заключить, что существует система $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ из n рядов без свободного члена в $A[[X_1, \ldots, X_n]]$, для которой $\mathbf{g} \circ \mathbf{h} = \mathbf{1}_n$; из этого соотношения и из равенства (16) получается, благодаря формуле (10), что $h = \mathbf{1}_n \circ \mathbf{h} = (\mathbf{f} \circ \mathbf{g}) \circ \mathbf{h} = \mathbf{f} \circ (\mathbf{g} \circ \mathbf{h}) = \mathbf{f} \circ \mathbf{1}_n = \mathbf{f}$.

Предложение 5 и формулы (10) и (15) показывают, что множество систем $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ из n рядов без свободного члена кольца $A[[X_1, \ldots, X_n]]$, для которых $J_{\mathbf{f}}(0)$ обратим в A, относительно закона композиции $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \to \mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ является *группой*.

5. *Системы уравнений над полными кольцами*

Ради краткости мы будем говорить, что некоторое кольцо A *удовлетворяет условиям Гензеля*, если оно коммутативно, линейно топологизировано, отделимо и полно. Если задан какой-нибудь идеал $\mathfrak{m}$ в таком кольце, то мы будем говорить, что $\mathfrak{m}$ (или пара $(A, \mathfrak{m})$) *удовлетворяет условиям Гензеля*, если $\mathfrak{m}$ замкнут в A и если элементы этого идеала топологически нильпотентны. Идеал $\mathfrak{t}$ кольца A, образованный всеми топологическими нильпотентными элементами, удовлетворяет условиям Гензеля (n° 3).

В частности, если A — коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в A и если A отделимо и полно в $\mathfrak{m}$-*адической* топологии, то пара $(A, \mathfrak{m})$ удовлетворяет условиям Гензеля.

Предложение 6. *Пусть A — коммутативное кольцо, B — кольцо, удовлетворяющее условиям Гензеля и u: $A \to B$ — не-*

который гомоморфизм. Тогда для любого семейства $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *элементов кольца* B, *являющихся топологически нильпотентными, существует, и притом единственный, гомоморфизм* $\tilde{u}$ *кольца* $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ *в* B, *такой, что* $\tilde{u}(a) = u(a)$ *для всякого* $a \in A$ *и* $\tilde{u}(X_i) = x_i$ *при* $1 \leqslant i \leqslant n$. *Кроме того, если* $\mathfrak{m}$ — *идеал рядов без свободного члена в* $A[[X_1, \ldots, X_n]]$, *то* $\tilde{u}$ *является непрерывным отображением в* $\mathfrak{m}$-*адической топологии.*

Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал конечного типа, порожденный в кольце B элементами x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; для любого открытого идеала $\mathfrak{H}$ кольца B образы элементов x_i в $B/\mathfrak{H}$ нильпотентны, так что идеал $(\mathfrak{a} + \mathfrak{H})/\mathfrak{H}$ нильпотентен в кольце $B/\mathfrak{H}$ и существует такое целое число k, что для $\sum_{i=1}^{n} p_i \geqslant k$ имеет место включение $x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n} \in \mathfrak{H}$. Поскольку каждый элемент из $\mathfrak{m}^k$ представляет собой конечную сумму формальных рядов вида $X_1^{p_1} \ldots X_n^{p_n} g(X_1, \ldots, X_n)$, где $\sum_{i=1}^{n} p_i \geqslant k$, мы видим, что если гомоморфизм $\tilde{u}$ отвечает предъявленным требованиям, то $\tilde{u}(\mathfrak{m}^k) \subset \mathfrak{H}$, а это доказывает непрерывность гомоморфизма $\tilde{u}$. Далее, очевидно, что существует, и притом единственный, гомоморфизм $v\colon A[X_1, \ldots, X_n] \to B$, при котором $v(a) = u(a)$ для $a \in A$ и $v(X_i) = x_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$; предыдущие рассуждения показывают, что v непрерывен в топологии, индуцированной на $A[X_1, \ldots, X_n]$ $\mathfrak{m}$-адической топологией. Так как кольцо $A[X_1, \ldots, X_n]$ плотно в кольце $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии, а B отделимо и полно, то это доказывает существование и единственность отображения $\tilde{u}$.

Отметим, что это предложение снова дает нам в качестве частного случая утвержденне (i) из предложения 11 § 2, n° 9.

Когда кольцо A само является линейно топологизированным, ограничение отображения $\tilde{u}$ на кольцо $A\{X_1, \ldots, X_n\}$ *совпадает* с гомоморфизмом, определенным исходя из u в предложении 4 n° 2. Это немедленно следует из того, что кольцо $A[X_1, \ldots, X_n]$ *плотно* в кольце $A\{X_1, \ldots, X_n\}$, если последнее наделить топологией, фундаментальная система окрестностей нуля в которой состоит из идеалов $\mathfrak{m}^k \cap N_{\mathfrak{S}}$ (в обозначениях n° 2 эта топология является верхней границей топологии, индуцированной на $A\{X_1, \ldots, X_n\}$ $\mathfrak{m}$-адической топологией кольца формальных рядов $A[[X_1, \ldots, X_n]]$, и топологии, определенной в n° 2).

Когда $B = A$ и u является тождественным отображением, мы будем писать $f(x_1, \ldots, x_n)$ или $f(\mathbf{x})$ вместо элемента $\tilde{u}(f)$

для любого формального ряда $f \in A[[X_1, \ldots, X_n]]$; для всякой системы $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_r)$ формальных рядов из $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ мы будем обозначать через $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ элемент $(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_r(\mathbf{x}))$ из A^r и будем говорить, что этот элемент получен *подстановкой* элементов x_i вместо переменных X_i в $\mathbf{f}$. Если $n \leqslant m$ и F — формальный ряд из $A[[X_1, \ldots, X_m]]$, то F можно рассматривать как формальный ряд от $X_{n+1}, \ldots, X_m$ с коэффициентами из кольца $A[[X_1, \ldots, X_n]]$; через $F(x_1, \ldots, x_n, X_{n+1}, \ldots, X_m)$ будет обозначаться формальный ряд из $A[[X_{n+1}, \ldots, X_m]]$, полученный подстановкой x_i вместо X_i в коэффициенты ряда F при $1 \leqslant i \leqslant n$.

Возьмем в качестве B кольцо формальных рядов $A[[X_1, \ldots, X_r]]$ и положим $\mathfrak{n}$ равным идеалу рядов в B без свободного члена, так что пара $(B, \mathfrak{n})$ удовлетворяет условиям Гензеля (§ 2, n° 6, следствие из предложения 6). Мы можем применить предложение 6 к элементам $x_i \in B$, в качестве которых взяты ряды без свободного члена. Тогда для всякого ряда $f \in A[[X_1, \ldots, X_n]]$ элемент $\tilde{u}(f)$ представляет собой не что иное, как формальный ряд $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенный в *Алгебре*, гл. IV, § 5, n° 5. Это очевидно, если f — многочлен, а общий случай устанавливается с учетом того, что отображение $f \to f(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывно в $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии.

Следствие. *Пусть A — кольцо, удовлетворяющее условиям Гензеля и $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — некоторое семейство топологически нильпотентных элементов из A. Пусть $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_q)$ — система без свободного члена рядов из $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ и $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_p)$ — какая-нибудь система формальных рядов из кольца $A[[X_1, \ldots, X_q]]$. Тогда $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_q(\mathbf{x}))$ является семейством топологически нильпотентных элементов кольца A и имеет место равенство*

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})). \tag{18}$$

Тот факт, что элементы $g_i(\mathbf{x})$ топологически нильпотентны, немедленно вытекает из предложения 6 и замкнутости в A идеала топологически нильпотентных элементов. Соотношение (18) очевидно, когда ряды f_j являются многочленами; с другой стороны, если $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}'$ — идеалы рядов без свободного члена в $A[[X_1, \ldots, X_q]]$ и $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ соответственно, то очевидно, что из включения $f \in \mathfrak{m}^h$ следует включение $f(g_1, \ldots, g_q) \in \mathfrak{m}'^h$. Обе части равенства (18) являются непрерывными функциями аргумента $\mathbf{f}$ на множестве $(A[[X_1, \ldots, X_q]])^p$, когда кольцо $A[[X_1, \ldots, X_q]]$ наделено $\mathfrak{m}$-адической топологией (согласно предыдущему замечанию и предложению 6). Отсюда получается соотношение (18).

В дальнейшем для любого кольца A и любого идеала $\mathfrak{m}$ из A мы будем обозначать через $\mathfrak{m}^{\times n}$ произведение $\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i$, со-

держащееся в A^n, где для избежания путаницы мы положили $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}$ для $1 \leqslant i \leqslant n$.

Предложение 7. *Пусть A — кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в A, причем пара $(A, \mathfrak{m})$ удовлетворяет условиям Гензеля. Пусть $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ — некоторая система рядов без свободного члена из кольца $A[[X_1, \ldots, X_n]]$, для которой определитель $J_{\mathbf{f}}(0)$ обратим в A. Тогда для любого $\mathbf{x} \in \mathfrak{m}^{\times n}$ имеет место включение $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathfrak{m}^{\times n}$ и $\mathbf{x} \to \mathbf{f}(\mathbf{x})$ есть биективное отображение множества $\mathfrak{m}^{\times n}$ на себя, причем обратное отображение — это отображение $\mathbf{x} \to \mathbf{g}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{g}$ задается соотношением* (16) n° 4.

Включение $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathfrak{m}^{\times n}$ очевидно, когда ряды f_i являются многочленами, а в общем случае оно получается из предложения 6 и замкнутости идеала $\mathfrak{m}$ в A. Прочие утверждения данного предложения являются, таким образом, непосредственными следствиями соотношений (16), (17) и (18).

Следствие. *Пусть $\mathfrak{q}$ — замкнутый идеал в A, содержащийся в $\mathfrak{m}$. Тогда соотношение $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}' (\mathrm{mod}\, \mathfrak{q}^{\times n})$ эквивалентно соотношению $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}') (\mathrm{mod}\, \mathfrak{q}^{\times n})$.*

В самом деле, для любого формального ряда $f \in A[[X_1, \ldots, X_n]]$ имеет место равенство $f(X_1, \ldots, X_n) - f(Y_1, \ldots, Y_n) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - Y_i) \times$ $\times h_i(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)$, где ряды h_i принадлежат кольцу $A[[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n]]$ (*Алгебра*, гл. IV, § 5, n° 8, предложение 9); благодаря этому немедленно проверяется, что из $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}' (\mathrm{mod}\, \mathfrak{q}^{\times n})$ следует $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}') (\mathrm{mod}\, \mathfrak{q}^{\times n})$. Обратная импликация получается заменой $\mathbf{f}$ на „обратную систему“ $\mathbf{g}$.

Теорема 2. *Пусть A — кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в нем, причем пара $(A, \mathfrak{m})$ удовлетворяет условиям Гензеля. Пусть $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ — система из n элементов кольца $A\{X_1, \ldots, X_n\}$, и пусть $\mathbf{a} \in A^n$; положим $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) = e$. Тогда существует система $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ ограниченных формальных рядов без свободного члена из кольца $A\{X_1, \ldots, X_n\}$, такая, что*

(i) $M_g(0) = I_n$ (*единичная матрица*);

(ii) *для любого элемента $\mathbf{x} \in A^n$ имеет место равенство*

$$\mathbf{f}(\mathbf{a} + e\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + M_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \cdot e\mathbf{g}(\mathbf{x}); \tag{19}$$

(iii) *пусть $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ — система формальных рядов без свободного члена* (не обязательно ограниченных), *такая, что $\mathbf{g} \circ \mathbf{h} = \mathbf{1}_n$* (предложение 5). *Тогда для любого $\mathbf{y} \in \mathfrak{m}^{\times n}$ имеет место равенство*

$$\mathbf{f}(\mathbf{a} + e\mathbf{h}(\mathbf{y})) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + M_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \cdot e\mathbf{y}. \tag{20}$$

Для любого формального ряда $f \in A[[X_1, \ldots, X_n]]$

$$f(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) = f(\mathbf{X}) + M_f(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{Y} + \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} G_{ij}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) Y_i Y_j, \qquad (21)$$

где G_{ij} — однозначно определенные формальные ряды из $A[[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n]]$. Если ряд f *ограничен*, то ограниченными являются и элементы матрицы M_f, и ряды G_{ij}, ибо эти формальные ряды являются многочленами, когда f — многочлен, а из их единственности следует, что для всякого открытого идеала $\mathfrak{J}$ кольца A, если через $p_{\mathfrak{J}}$: $A \to A/\mathfrak{J}$ обозначить каноническое отображение, то образ ряда G_{ij} относительно $\bar{p}_{\mathfrak{J}}$ представляет собой коэффициент при Y_iY_j в ряде $\bar{p}_{\mathfrak{J}}(F)$, где F — формальный ряд $f(\mathbf{X}+\mathbf{Y})$ в кольце $A[[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n]]$; отсюда следует наше утверждение.

Учитывая это и выписывая формулу (21) для каждого ряда f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, мы получаем для любого $\mathbf{x} \in A^n$ (n° 2, предложение 4), что

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+e\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + M_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \cdot e\mathbf{x} + e^2\mathbf{r}(\mathbf{x}), \qquad (22)$$

где $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ — система ограниченных формальных рядов, каждый из которых имеет полный порядок $\geqslant 2$. По формуле (18) из *Алгебры*, гл. III, § 6, n° 5, следует, что существует квадратная матрица $M' \in \mathbf{M}_n(A)$, такая, что

$$M_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \cdot M' = eI_n, \qquad (23)$$

откуда, подставляя в (22), получаем

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+e\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + M_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \cdot e\mathbf{x} + M_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \cdot M' \cdot e\mathbf{r}(\mathbf{x}). \qquad (24)$$

Положив $\mathbf{g} = 1_n + M'\mathbf{r}$, мы видим, что $\mathbf{g}$ удовлетворяет условиям (i) и (ii); теперь достаточно заменить $\mathbf{x}$ на $\mathbf{h}(\mathbf{y})$, чтобы получить и (iii).

Следствие 1. *Пусть A — кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в A, причем пара $(A, \mathfrak{m})$ удовлетворяет условиям Гензеля. Пусть $f \in A\{X\}$, $a \in A$ и положим $e = f'(a)$. Если $f(a) \equiv 0 \pmod{e^2\mathfrak{m}}$, то существует такой элемент $b \in A$, что $f(b) = 0$ и $b \equiv a \pmod{e\mathfrak{m}}$. Если b' — второй такой элемент из A, что $f(b') = 0$ и $b' \equiv a \pmod{e\mathfrak{m}}$, то $e(b-b') = 0$. В частности, элемент b единствен, если e не является делителем нуля в кольце A.*

Действительно, пусть $f(a) = e^2c$, где $c \in \mathfrak{m}$; формула (20) при $n = 1$ дает $f(a + eh(y)) = e^2(c+y)$ и, следовательно, достаточно положить $y = -c$, $b = a + eh(-c)$. Кроме того, если $b = a + ex$, $b' = a + ex'$, $x \in \mathfrak{m}$, $x' \in \mathfrak{m}$, $f(b) = f(b') = 0$, то из (19), выводится, что $e^2(g(x) - g(x')) = 0$. Поскольку $g(X) - g(Y) = (X-Y)u(X, Y)$, где u — ограниченный ряд и $u(0, 0) = 1$,

имеем $g(x)-g(x')=(x-x')v$, где $v\in A$ — обратимый элемент, ибо, так как $\mathfrak{m}$ замкнут, $v-1=u(x,x')-1\in\mathfrak{m}$ и идеал $\mathfrak{m}$ содержится в радикале кольца A; отсюда получается соотношение $e(b-b')=0$.

Замечание. Это следствие применяется особенно тогда, когда элемент e обратим в кольце A; в этом случае можно вывести существование элемента b из теоремы Гензеля, так как канонический образ элемента $f(X)$ в кольце $(A/\mathfrak{m})\{X\}$ имеет вид $(X-\alpha)f_1(X)$, причем элементы $X-\alpha$ и $f_1(X)$ являются сильно взаимно простыми, ибо $f_1(\alpha)=f'(\alpha)$ — образ элемента e (n° 1, пример) [1]).

Примеры. 1) Пусть p — простое число, отличное от 2, и n — целое число, класс $\bmod p$ которого является отличным от нуля квадратом в простом поле $\mathbf{F}_p$. Если $\mathbf{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел (§ 2, n° 12, пример 3), то применение следствия 1 к многочлену X^2-n показывает, что n является квадратом в кольце $\mathbf{Z}_p$; например, число 7 является квадратом в $\mathbf{Z}_3$.

2) Пусть $A=K[[Y]]$ — кольцо формальных рядов от одной переменной с коэффициентами в поле K; наделенное (Y)-адической топологией, кольцо A отделимо и полно (§ 2, n° 6, следствие предложения 6), а отображение $f(Y)\to f(0)$ определяет при переходе к факторкольцам изоморфизм $A/(Y)$ на поле K. В силу следствия 1, если $F(Y,X)$ — многочлен от X с коэффициентами в A и если a — простой корень многочлена $F(0,X)$ в поле K, то существует, и притом единственный, формальный ряд $f(Y)$, такой, что $f(0)=a$ и $F(Y,f(Y))=0$.

Следствие 2. *Пусть A — кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в A, причем пара $(A,\mathfrak{m})$ удовлетворяет условиям Гензеля. Пусть r, n — такие целые числа, что $0\leqslant r<n$ и $\mathbf{f}=(f_{r+1},\ldots,f_n)$ — система из $n-r$ элементов кольца $A\{X_1,\ldots,X_n\}$. Обозначим через $J_{\mathbf{f}}^{(n-r)}(\mathbf{X})$ минор матрицы $M_{\mathbf{f}}(\mathbf{X})$, образованный столбцами с такими номерами j, что $r+1\leqslant j\leqslant n$. Пусть $\mathbf{a}\in A^n$ — такой элемент, что $J_{\mathbf{f}}^{(n-r)}(\mathbf{a})$ обратим в A и выполняется соотношение $\mathbf{f}(\mathbf{a})\equiv 0(\bmod \mathfrak{m}^{\times(n-r)})$. Тогда существует, и притом единственный, элемент $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in A^n$, такой, что $x_k=a_k$ при $1\leqslant k\leqslant r$, $\mathbf{x}\equiv a(\bmod \mathfrak{m}^{\times n})$ и $\mathbf{f}(\mathbf{x})=0$.*

Подставляя a_k вместо X_k при $1\leqslant k\leqslant r$ в ряды f_i (n° 2, замечание 3), мы видим, что для доказательства следствия можно ограничиться случаем, когда $r=0$. Теорема 2 и предложение 7

[1]) В этом примере речь шла о случае, когда $P(X)$ — многочлен; однако нетрудно убедиться, что теорема Безу остается справедливой и для ограниченных формальных рядов. — *Прим. ред.*

показывают тогда, что $\mathbf{f}$ определяет биективное отображение из $\mathbf{a}+\mathfrak{m}^{\times n}$ на $\mathbf{f}(\mathbf{a})+\mathfrak{m}^{\times n}=\mathfrak{m}^{\times n}$; следствие вытекает из того, что $0\in\mathfrak{m}^{\times n}$.

Следствие 3. *В обозначениях следствия 2 пусть* $\mathbf{a}\in A^n$; *положим* $e=J_{\mathbf{f}}^{(n-r)}(\mathbf{a})$ (*это не обязательно обратимый в* A *элемент*) *и допустим, что* $\mathbf{f}(\mathbf{a})\equiv 0 \pmod{e^2\mathfrak{m}^{\times(n-r)}}$. *Тогда существуют* $n-r$ *формальных рядов без свободного члена* φ_i $(r+1\leqslant i\leqslant n)$ *из* $A[[X_1, \ldots, X_r]]$, *таких, что для всякого* $\mathbf{t}=(t_1, \ldots, t_r)\in\mathfrak{m}^{\times r}$ *выполняется равенство*

$$f_i(a_1+e^2t_1, \ldots, a_r+e^2t_r, a_{r+1}+e\varphi_{r+1}(\mathbf{t}), \ldots, a_n+e\varphi_n(\mathbf{t}))=0 \quad (25)$$

при $r+1\leqslant i\leqslant n$.

Для $1\leqslant i\leqslant r$ положим $f_i(X)=X_i-a_i$, и пусть $\mathbf{u}=(f_1, \ldots, f_n)$; тогда $J_{\mathbf{u}}(a)=e$ и теорема 2 может быть применена к системе $\mathbf{u}$. Из предыдущих определений в обозначениях теоремы 2 следует, что $g_i(X)=X_i$ при $1\leqslant i\leqslant r$, откуда $h_i(X)=X_i$ при $1\leqslant i\leqslant r$. Далее, если $M'\in\mathbf{M}_n(A)$ — такая матрица, что $M_{\mathbf{u}}(\mathbf{a})\cdot M'=eI_n$, то M' является матрицей вида

$$\begin{pmatrix} eI_r & 0 \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Заменяя $\mathbf{y}$ на $M'\cdot\mathbf{z}$ (где $\mathbf{z}=(z_1, \ldots, z_n)\in\mathfrak{m}^{\times n}$) в формуле (20), мы получаем

$$f_i(a_1+e^2z_1, \ldots, a_r+e^2z_r, a_{r+1}+eh_{r+1}(M'\cdot z), \ldots, a_n+eh_n(M'\cdot z))=$$
$$=f_i(a)+e^2z_i \quad \text{для} \quad 1\leqslant i\leqslant n. \quad (26)$$

По условию $f_i(a)=e^2b_j$, где $b_j\in\mathfrak{m}$, для $r+1\leqslant j\leqslant n$. Положим $\psi_j(X_1, \ldots, X_r)=h_j(M'\cdot\mathbf{X})$ и

$$\varphi_j(X_1, \ldots, X_r)=\psi_j(X_1, \ldots, X_r, -b_{r+1}, \ldots, -b_n)$$

для $r+1\leqslant j\leqslant n$. Для $r+1\leqslant i\leqslant n$, подставляя t_j вместо z_j при $1\leqslant j\leqslant r$ и $-b_j$ вместо z_j при $r+1\leqslant j\leqslant n$ в формуле (26), мы получаем соотношения (25) для всякого набора $\mathbf{t}\in\mathfrak{m}^{\times r}$.

6. *Приложение к разложению колец*

Лемма 2. *Пусть* A — *кольцо и* $\mathfrak{m}$ — *идеал в* A, *такие, что пара* $(A, \mathfrak{m})$ *удовлетворяет условиям Гензеля. Пусть* B — *факторкольцо* $A/\mathfrak{m}$ *и* $\pi\colon A\to B$ — *канонический гомоморфизм. Тогда для всякого идемпотента с кольца* B *существует, и притом единственный, идемпотент* $e\in A$, *такой, что* $\pi(e)=c$.

Пусть $a\in A$ — такой элемент, что $\pi(a)=c$; мы можем воспользоваться следствием 1 теоремы 2 n° 5 применительно к многочлену $f(X)=X^2-X$ кольца $A[X]$ и элементу $a\in A$. Имеем

$f'(a) = 2a - 1$ и, поскольку $\pi(2a-1) = 2c - 1$ и $(2c-1)^2 = 1$ в кольце B, элемент $2c - 1$ обратим в B, так что элемент $2a - 1$ обратим в кольце A (§ 2, n° 13, лемма 3). Так как $f(a) \in \mathfrak{m}$, следствие 1 теоремы 2 n° 5 немедленно дает существование и единственность элемента e.

Предложение 8. *Пусть A — кольцо и $\mathfrak{m}$ — идеал в A, такие, что пара $(A, \mathfrak{m})$ удовлетворяет условиям Гензеля. Пусть B — факторкольцо $A/\mathfrak{m}$ и $\pi\colon A \to B$ — канонический гомоморфизм. Если кольцо B разлагается в прямое произведение конечного семейства идеалов $(\mathfrak{b}_i)_{i\in I}$, то существует, и притом единственное, такое семейство идеалов $(\mathfrak{a}_i)_{i\in I}$ кольца A, что $\pi(\mathfrak{a}_i) = \mathfrak{b}_i$ для любого $i \in I$, и при этом кольцо A разлагается в прямое произведение семейства $(\mathfrak{a}_i)$.*

Пусть $1 = \sum_i c_i$, где $c_i \in \mathfrak{b}_i$ при любом i; элементы c_i являются идемпотентами кольца B, для которых $c_i c_j = 0$ при $i \neq j$. В силу леммы 2, существуют идемпотенты e_i из A ($i \in I$), для которых $\pi(e_i) = c_i$ при любом i; поскольку $e_i e_j$ является идемпотентом, для которого $\pi(e_i e_j) = c_i c_j = 0$ при $i \neq j$, то имеет место равенство $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$ (лемма 2); так как разность $1 - \sum_i e_i$ представляет собой идемпотент, для которого $\pi\left(1 - \sum_i e_i\right) = 1 - \sum_i c_i = 0$, то имеем также, что $1 = \sum_i e_i$. Отсюда следует, что кольцо A разлагается в прямое произведение идеалов $\mathfrak{a}_i = e_i A$, а также то, что $\pi(\mathfrak{a}_i) = \pi(e_i)B = \mathfrak{b}_i$.

Остается установить единственность такого разложения. Предположим, что A разлагается в прямое произведение второго семейства идеалов $(\mathfrak{a}'_i)_{i\in I}$, обладающих тем свойством, что $\pi(\mathfrak{a}'_i) = \mathfrak{b}_i$ при всех i; тогда $1 = \sum_i e'_i$, причем $e'_i \in \mathfrak{a}'_i$, откуда в кольце B получается, что $1 = \sum_i \pi(e'_i)$, где $\pi(e'_i) \in \mathfrak{b}_i$; это означает, что $\pi(e'_i) = c_i$; поскольку e'_i и e_i — идемпотенты, обязательно имеем $e'_i = e_i$ (лемма 2), что завершает доказательство.

Замечание. Предложение 8 заново дает описание структуры полулокального кольца A, являющегося отделимым и полным в $\mathfrak{r}$-адической топологии ($\mathfrak{r}$ — радикал кольца A), которое уже было получено как следствие предложения 19 § 2, n° 13.

Упражнения

1) Пусть A — коммутативное кольцо, отделимое и полное относительно фильтрации $(\mathfrak{a}_n)_{n\geqslant 0}$, в которой $\mathfrak{a}_0 = A$. Пусть M, M', N — три A-модуля, каждый из которых наделен фильтрацией, порожденной фильтрацией кольца

A, и топологией, определенной этой фильтрацией. Положим $\overline{M} = M/\mathfrak{a}_1 M$, $\overline{M'} = M'/\mathfrak{a}_1 M'$, $\overline{N} = N/\mathfrak{a}_1 N$. Пусть $f\colon M \times M' \to N$ — билинейное отображение и $\overline{f}\colon \overline{M} \times \overline{M'} \to \overline{N}$ — $(A/\mathfrak{a}_1)$-билинейное отображение, определяемое отображением f при переходе к фактормодулям. Пусть $y \in N$, $\bar{x} \in \overline{M}$, $\bar{x}' \in \overline{M'}$ — такие элементы, что: 1° $\overline{f}(\bar{x}, \bar{x}')$ есть класс $\bar{y}$ элемента y в модуле $\overline{N}$; 2° любой элемент из $\overline{N}$ может быть записан в виде $\overline{f}(\bar{x}, \bar{z}') + \overline{f}(\bar{z}, \bar{x}')$, где $\bar{z} \in \overline{M}$ и $\bar{z}' \in \overline{M'}$. Показать, что если модуль N отделим, а модули M и M' полны, то существует такой элемент $x \in \bar{x}$ и такой элемент $x' \in \bar{x}'$, что $f(x, x') = y$ (воспользоваться индуктивным рассуждением подобно тому, как это было сделано при доказательстве леммы Гензеля). При каком условии элементы x и x' определяются единственным образом?

¶ 2) Пусть A — локальное кольцо, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал, $k = A/\mathfrak{m}$ — его поле вычетов и $f\colon A \to k$ — канонический гомоморфизм. Пусть $P \in A[X]$ — унитарный многочлен степени n. Положим $B = A[X]/PA[X]$ и обозначим через x канонический образ элемента X в кольце B.

а) Пусть Q, Q' — два сильно взаимно простых многочлена из $A[X]$, для которых $P = QQ'$. Показать, что кольцо B представляет собой прямую сумму идеалов $B \cdot Q(x)$ и $B \cdot Q'(x)$.

б) Обратно, пусть $B = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{b}'$ — разложение кольца B в прямую сумму двух идеалов. Показать, что существуют многочлены Q, Q' из $A[X]$, удовлетворяющие предположениям пункта а) и такие, что $\mathfrak{b} = B \cdot Q(x)$, $\mathfrak{b}' = B \cdot Q'(x)$. (Сначала показать, что $\mathfrak{b}/\mathfrak{m}\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{b}'/\mathfrak{m}\mathfrak{b}'$ порождаются в кольце $B/\mathfrak{m}B$ образами унитарных многочленов $Q_0 \in \overline{f}^{-1}(\mathfrak{b})$, $Q_0' \in \overline{f}^{-1}(\mathfrak{b}')$, для которых

$$\overline{f}(P) = \overline{f}(Q_0)\,\overline{f}(Q_0').$$

Пусть $r = \deg(Q_0)$, $s = \deg(Q_0')$. Показать, что $\mathfrak{b}$ является свободным A-модулем с базисом $Q_0(x)$, $xQ_0(x)$, ..., $x^{s-1}Q_0(x)$ (применить предложение 5 гл. II, § 3, n° 2); после этого можно будет записать $x^s Q_0(x) = a_0 Q_0(x) + a_1 x Q_0(x) + \ldots + a_{s-1}x^{s-1}Q_0(x)$, где $a_i \in A$ $(0 \leqslant i \leqslant s-1)$; положим

$$Q'(X) = X^s - (a_0 + a_1 X + \ldots + a_{s-1}X^{s-1});$$

показать, что $\overline{f}(P) = \overline{f}(Q_0)\,\overline{f}(Q')$ и $Q' \in \overline{f}^{-1}(\mathfrak{b}')$. Определить аналогичным образом многочлен Q исходя из Q' и Q_0 и показать, что Q и Q' отвечают сформулированным требованиям, воспользовавшись предложением 2 n° 1.)

¶ 3) Пусть A — локальное кольцо, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал, $k = A/\mathfrak{m}$ — его поле вычетов и $f\colon A \to k$ — канонический гомоморфизм. Показать, что следующие два условия эквивалентны:

(H) Для всякого унитарного многочлена $P \in A[X]$ и любого разложения $\overline{f}(P) \in k[X]$ в произведение $\overline{f}(P) = \overline{Q}\,\overline{Q}'$ унитарных взаимно простых многочленов существуют такие два многочлена Q, Q' в кольце $A[X]$, что $\overline{f}(Q) = \overline{Q}$, $\overline{f}(Q') = \overline{Q}'$ и $P = QQ'$.

(C) Любая коммутативная алгебра над кольцом A, являющаяся A-модулем конечного типа, представляет собой прямое произведение A-алгебр, являющихся *локальными* кольцами.

(Для доказательства того, что из (H) следует (C), надо рассуждать так же, как в предложении 8 n° 6, используя при этом упражнение 2а). Для доказательства того, что из (C) вытекает (H), показать сначала, что для всякой коммутативной A-алгебры B, являющейся A-модулем конечного типа, любое разложение кольца $B/\mathfrak{m}B$ в прямую сумму двух идеалов обязательно имеет вид $\mathfrak{b}/\mathfrak{m}\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{b}'/\mathfrak{m}\mathfrak{b}'$, где $B = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{b}'$ — разложение в прямую сумму двух идеалов кольца B; затем воспользоваться упражнением 2б).)

Кольцо A, удовлетворяющее условиям (H) и (C), называется *гензелевым*. Всякое *отделимое* и *полное* локальное кольцо является гензелевым. Если A — гензелево кольцо и B — коммутативная A-алгебра, представляющая собой локальное кольцо и A-модуль конечного типа, то B — гензелево кольцо.

4) а) Пусть $(A_\alpha, \varphi_{\alpha\beta})$ — индуктивная система гензелевых локальных колец, в которой гомоморфизмы $\varphi_{\alpha\beta}$ локальны. Показать, что локальное кольцо $A = \varinjlim A_\alpha$ (гл. II, § 3, упражнение 16) гензелево (воспользоваться критерием (H) из упражнения 3).

б) Пусть K — поле и L — некоторое его алгебранческое расширение. Получить из а), что кольцо $L \bigoplus_K K[[X_1, \ldots, X_n]]$ гензелево.

*в) Пусть A — гензелево локальное кольцо, а B — коммутативная A-алгебра, *целая* над A (гл. V) и являющаяся локальным кольцом. Показать, что B — гензелево кольцо (воспользоваться а)).*

¶ 5) Пусть A — гензелево локальное кольцо, B — некоторая A-алгебра (не обязательно коммутативная), являющаяся A-модулем конечного типа, $\mathfrak{b}$ — двусторонний идеал в B и $\overline{B} = B/\mathfrak{b}$.

а) Показать, что любой идемпотент ε из $\overline{B}$ является каноническим образом некоторого идемпотента из B (свести к коммутативному случаю, рассматривая подалгебру алгебры B, порожденную одним элементом).

б) Пусть $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ — бесконечная последовательность таких элементов кольца $\overline{B}$, что

$$\varepsilon_i\varepsilon_j = \delta_{ij}\varepsilon_j$$

для любой пары индексов (i, j). Показать, что в B существует ортогональная последовательность $(e_n)_{n\geqslant 1}$ идемпотентов, для которых при любом n элемент ε_n является каноническим образом элемента e_n. (Провести индукцию подобно тому, как это было сделано в упражнении 10 из *Алгебры*, гл. VIII, § 6; надо заметить, что если e, e' — такие два идемпотента из B, что $ee' = 0$, то $e' - e'e = e''$ является идемпотентом, для которого $ee'' = e''e = 0$.)

в) Предположим теперь, что $\mathfrak{b}$ является *радикалом* кольца B. Пусть n — целое число и $(\varepsilon_{ij})\,(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ — такое семейство элементов кольца $\overline{B}$, что $\varepsilon_{ij}\varepsilon_{hk} = \delta_{jh}\varepsilon_{ik}$ и $1 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{ii}$. Показать, что в кольце B существует семейство $(e_{ij})\,(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$, для которого $e_{ij}e_{hk} = \delta_{jh}e_{ik}$ и $1 = \sum_{i=1}^{n} e_{ii}$ и элемент ε_{ij} есть канонический образ элемента e_{ij} при любой паре индексов. (Использовать б), упражнение 11 из *Алгебры*, гл. VIII, § 6, и упражнение 9 из *Алгебры*, гл. VIII, § 1.) Вывести отсюда, что если кольцо $\overline{B}$ изоморфно кольцу матриц $\mathbf{M}_r(\overline{D})$, где $\overline{D}$ — тело, возможно некоммутативное, то кольцо B изоморфно кольцу матриц $\mathbf{M}_r(D)$, где D представляет собой A-алгебру, являющуюся A-модулем конечного типа и радикал $\mathfrak{b}$ которой таков, что $D/\mathfrak{b}$ изоморфно $\overline{D}$ (ср. упражнения 9 и 3 из *Алгебры*, гл. VIII, § 1). Показать, что если, кроме того, B является алгеброй Адзумайя над A (гл. II, § 5, упражнение 14), то таким же свойством обладает и кольцо D.

б) Привести пример артинова некоммутативного кольца A, фильтрованного последовательностью $(\mathfrak{a}_n)$ таких двусторонних идеалов, что $\mathfrak{a}_0 = A$ и $\mathfrak{a}_2 = 0$, для которой не имеет места предложение 8 п° 6 (ср. *Алгебра*, гл. VIII, § 2, упражнение 6).

¶ 7а) Пусть A — коммутативное кольцо, $\mathfrak{m}$ — такой идеал в A, что кольцо A отделимо и полно в $\mathfrak{m}$-адической топологии и $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ является A-модулем конечного типа. Показать, что топология кольца $A' = A\{X_1, \ldots, X_r\}$ есть

$\mathfrak{m}'$-адическая топология, где $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}A'$, и что $\mathfrak{m}'/\mathfrak{m}'^2$ является $(A'/\mathfrak{m}')$-модулем конечного типа (воспользоваться предложением 14 § 2, n° 11). В частности, если A нётерово, то нётерово и A'.

б) Пусть A — нётерово коммутативное кольцо и $\mathfrak{m}$ — такой идеал в A, что A отделимо и полно в $\mathfrak{m}$-адической топологии. Пусть $u\colon A \to B$ — непрерывный гомоморфизм кольца A в отделимое коммутативное топологическое кольцо B, превращающий B в A-алгебру. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) B нётерово, его топология является $\mathfrak{m}B$-адической, B полно и $B/\mathfrak{m}B$ является алгеброй конечного типа над $A/\mathfrak{m}$.

β) B топологически A-изоморфно кольцу $\varprojlim B_n$, где $(B_n)_{n\geqslant 1}$ — некоторая проективная система дискретных A-алгебр, для которой отображения $\varphi_{nm}\colon B_m \to B_n$ при $m \geqslant n$ сюръективны и для которой ядро гомоморфизма φ_{nm} равно $\mathfrak{m}^{n+1}B_m$, причем B_1 является алгеброй конечного типа над $A/\mathfrak{m}$.

γ) B топологически A-изоморфно факторалгебре алгебры вида $A\{X_1, \ldots, X_r\}$ по некоторому замкнутому идеалу.

(Чтобы показать, что из β) следует γ), надо воспользоваться предложением 14 § 2, n° 11, и теоремой 1 § 2, n° 8.)

8) Пусть A — линейно топологизированное коммутативное кольцо. Отождествим аддитивную группу $A[[X_1, \ldots, X_p]]$ с произведением групп $A^{\mathbf{N}^p}$ и наделим ее топологией произведения $\mathscr{T}$.

а) Показать, что $\mathscr{T}$ согласована со структурой кольца $A[[X_1, \ldots, X_p]]$ и является линейной топологией, в которой отображения $f \to \partial f/\partial X_i$ непрерывны.

б) Для любого элемента $P = \sum_{\mathbf{e}} \alpha_{\mathbf{e},p} X^{\mathbf{e}}$ кольца $A[[X_1, \ldots, X_p]]$ (обозначения взяты из § 1, n° 6) и любой топологической A-алгебры B (§ 2, упражнение 28), являющейся отделимой и полной, мы будем говорить, что элемент $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p) \in B^p$ *подставим* в P, если семейство $(\alpha_{\mathbf{e},p}\mathbf{x}^{\mathbf{e}})$ (где $\mathbf{x}^{\mathbf{e}} = x_1^{e_1} \ldots x_p^{e_p}$ для $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_p)$) сходится к нулю в B по фильтру дополнений к конечным подмножествам в $\mathbf{N}^p$. В этом случае указанное семейство суммируемо и его сумма обозначается через $P(\mathbf{x})$. Показать, что множество формальных рядов $P \in A[[X_1, \ldots, X_p]]$, в которые подставим элемент $\mathbf{x}$, является подкольцом $S_{\mathbf{x}}$ в $A[[X_1, \ldots, X_p]]$ и что отображение $P \to P(\mathbf{x})$ является гомоморфизмом из $S_{\mathbf{x}}$ в B.

в) Показать, что если $\mathbf{x}$ подставим в P и если $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_p)$ — такой элемент из B^p, что y_i топологически нильпотентны для $1 \leqslant i \leqslant p$, то $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ подставим в P.

В частности, если в B существует окрестность нуля, образованная топологически нильпотентными элементами, то при любом $P \in A[[X_1, \ldots, X_p]]$ множество D элементов $\mathbf{x} \in B^p$, подставимых в P, открыто, и отображение $\mathbf{x} \to P(\mathbf{x})$ из D в B непрерывно.

г) Будем в дальнейшем предполагать, что A *отделимо и полно*, а $A[[X_1, \ldots, X_p]]$ наделено топологией $\mathscr{T}$. Для того чтобы система из q формальных рядов $P_1, \ldots, P_q$ кольца $A[[X_1, \ldots, X_p]]$ была подставима в формальный ряд

$$Q \in A[[X_1, \ldots, X_q]],$$

необходимо и достаточно, чтобы система $(P_1(0), \ldots, P_q(0))$ была подставима в Q.

д) Предположим, что $\mathbf{x}$ подставим в каждый из рядов P_k $(1 \leqslant k \leqslant q)$ и что система $(P_1, \ldots, P_q)$ подставима в Q. Показать, что $\mathbf{x}$ подставим в $Q(P_1, \ldots, P_q)$, что система $(P_1(\mathbf{x}), \ldots, P_q(\mathbf{x}))$ подставима в Q и что имеет место равенство $Q(P_1(\mathbf{x}), \ldots, P_q(\mathbf{x})) = (Q(P_1, \ldots, P_q))(\mathbf{x})$, если дополнительно предположить, что выполнено *одно* из следующих условий: α) суще-

ствует такой идеал $\mathfrak{n}$ в кольце B, что пара $(B, \mathfrak{n})$ удовлетворяет условиям Гензеля и элементы x_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ принадлежат $\mathfrak{n}$; β) формальный ряд Q ограничен.

е) Положим $B = A = \mathbf{F}_2$, наделим это поле дискретной топологией, положим, далее, $P = X + X^2$, $Q = \sum_{n=0}^{\infty} X^{2^n}$; тогда P подставим в Q, элемент $x = 1$ подставим в P и в $Q(P)$ и элемент $P(x)$ подставим в Q, но $Q(P(x)) = 0$, а $(Q(P))(x) = 1$.

§ 5. Плоскостные свойства фильтрованных модулей

1. *Идеально отделимые модули*

Определение 1. *Пусть A — коммутативное кольцо и $\mathfrak{I}$ — какой-нибудь идеал в A. Говорят, что A-модуль M идеально отделим относительно $\mathfrak{I}$ (или просто идеально отделим, если это не приводит к путанице), если для любого идеала $\mathfrak{a}$ конечного типа в кольце A модуль $\mathfrak{a} \otimes_A M$ над кольцом A отделим в $\mathfrak{I}$-адической топологии.*

Полагая $\mathfrak{a} = A$ в этом определении, мы видим, что тогда сам модуль M обязательно *отделим* в $\mathfrak{I}$-адической топологии.

Примеры. 1) Если A нётерово и $\mathfrak{I}$ содержится в радикале кольца A (иначе говоря, если A — кольцо Зарисского относительно $\mathfrak{I}$-адической топологии), то любой A-модуль *конечного типа* идеально отделим (§ 3, n° 3, предложение 6).

2) Прямая сумма идеально отделимых модулей является идеально отделимым модулем, так как имеют место следующие соотношения:

$$\mathfrak{I}^n\Big(\mathfrak{a} \otimes_A \bigoplus_{\lambda \in L} M_\lambda\Big) = \mathfrak{I}^n \bigoplus_{\lambda \in L} (\mathfrak{a} \otimes_A M_\lambda) = \bigoplus_{\lambda \in L} \mathfrak{I}^n (\mathfrak{a} \otimes_A M_\lambda).$$

3) Если A-модуль M является *плоским* и *отделимым* в $\mathfrak{I}$-адической топологии, то он идеально отделим, так как в этом случае $\mathfrak{a} \otimes_A M$ отождествляется с подмодулем в M и $\mathfrak{I}$-адическая топология на модуле $\mathfrak{a} \otimes_A M$ является *более тонкой*, чем топология, индуцированная на $\mathfrak{a} \otimes_A M$ $\mathfrak{I}$-адической топологией модуля M, являющегося по условию отделимым.

2. *Формулировка критерия плоскостности*

Пусть A — некоторое кольцо, $\mathfrak{I}$ — какой-нибудь идеал в A, M — левый A-модуль, $\mathrm{gr}(A)$ и $\mathrm{gr}(M)$ — градуированное кольцо и градуированный $\mathrm{gr}(A)$-модуль, ассоциированные соответственно с кольцом A и модулем M, наделенными $\mathfrak{I}$-адическими

фильтрациями (§ 2, n° 3). Было показано (loc. cit), что для любого целого числа $n \geqslant 0$ имеет место сюръективный гомоморфизм $\mathbf{Z}$-модулей

$$\gamma_n' : (\mathfrak{J}^n/\mathfrak{J}^{n+1}) \otimes_{A/\mathfrak{J}} (M/\mathfrak{J}M) \to \mathfrak{J}^n M/\mathfrak{J}^{n+1} M,$$

а также градуированный гомоморфизм степени 0 градуированных $\mathrm{gr}(A)$-модулей

$$\gamma_M : \mathrm{gr}(A) \otimes_{\mathrm{gr}_0(A)} \mathrm{gr}_0(M) \to \mathrm{gr}(M),$$

ограничение которого на $\mathrm{gr}_n(A) \otimes_{\mathrm{gr}_0(A)} \mathrm{gr}_0(M)$ равно γ_n при любом n и который, следовательно, является *сюръективным*.

Теорема 1. *Пусть A — коммутативное кольцо. $\mathfrak{J}$ — идеал в A и M — некоторый A-модуль. Рассмотрим следующие свойства*:

(i) *Модуль M является плоским над кольцом A.*

(ii) $\mathrm{Tor}_1^A(N, M) = 0$ *для любого A-модуля N, аннулируемого идеалом $\mathfrak{J}$.*

(iii) *Модуль $M/\mathfrak{J}M$ является плоским над кольцом $A/\mathfrak{J}$ и каноническое отображение $\mathfrak{J} \otimes_A M \to \mathfrak{J}M$ биективно (это последнее условие эквивалентно равенству $\mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{J}, M) = 0$, что получается из соотношения $\mathrm{Tor}_1^A(A, M) = 0$ и точной последовательности $\mathrm{Tor}_1^A(A, M) \to \mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{J}, M) \to \mathfrak{J} \otimes_A M \to M$).*

(iv) *Модуль $M/\mathfrak{J}M$ является плоским над кольцом $A/\mathfrak{J}$ и канонический гомоморфизм $\gamma_M : \mathrm{gr}(A) \otimes_{\mathrm{gr}_0(A)} \mathrm{gr}_0(M) \to \mathrm{gr}(M)$ биективен* (это свойство (GR) из § 2, n° 8).

(v) *Для любого $n \geqslant 1$ модуль $M/\mathfrak{J}^n M$ является плоским над кольцом $A/\mathfrak{J}^n$.*

Тогда имеют место следующие импликации: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v).

Если, кроме того, идеал $\mathfrak{J}$ нильпотентен или кольцо A является нётеровым, а модуль M идеально отделимым, то свойства (i), (ii), (iii), (iv) и (v) *эквивалентны.*

Замечание. Когда факторкольцо $A/\mathfrak{J}$ является полем (случай, часто встречающийся в приложениях), условие «модуль $M/\mathfrak{J}M$ является плоским над кольцом $A/\mathfrak{J}$» автоматически выполняется для любого A-модуля M, что упрощает формулировку свойств (iii) и (iv); далее, в этом случае свойство (v) эквивалентно тому, что модуль $M/\mathfrak{J}^n M$ является *свободным* над кольцом $A/\mathfrak{J}^n$ при любом $n \geqslant 1$ (гл. II, § 3, n° 2, следствие 2 предложения 5).

3. Доказательство критерия плоскостности

А) *Импликации* (i)$\Rightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii)

Импликация (i)$\Rightarrow$(ii) получается немедленно (гл. I, § 4). Эквивалентность (ii)$\Leftrightarrow$(iii) является частным случаем предложения 2, гл. I, § 4, примененного к $R = A$, $S = A/\mathfrak{J}$, $F = M$, $E = N$, если принять во внимание, что задание структуры $(A/\mathfrak{J})$-модуля на N эквивалентно заданию структуры A-модуля, при которой N аннулируется идеалом $\mathfrak{J}$.

Замечание. 1) Условие (ii) эквивалентно также следующему:

(ii′) $\operatorname{Tor}_1^A(N, M) = 0$ *для любого* A*-модуля* N*, аннулируемого некоторой степенью идеала* $\mathfrak{J}$.

Действительно, очевидно, что из (ii′) следует (ii). Обратно, если выполнено (ii), то, в частности, $\operatorname{Tor}_1^A(\mathfrak{J}^n N/\mathfrak{J}^{n+1}N, M) = 0$ при любом n; из точной последовательности

$$0 \to \mathfrak{J}^{n+1}N \to \mathfrak{J}^n N \to \mathfrak{J}^n N/\mathfrak{J}^{n+1}N \to 0$$

получается точная последовательность

$$\operatorname{Tor}_1^A(\mathfrak{J}^{n+1}N, M) \to \operatorname{Tor}_1^A(\mathfrak{J}^n N, M) \to \operatorname{Tor}_1^A(\mathfrak{J}^n N/\mathfrak{J}^{n+1}N, M),$$

и поскольку существует такое целое m, что $\mathfrak{J}^m N = 0$, то индукцией вниз по n показывается, что $\operatorname{Tor}_1^A(\mathfrak{J}^n N, M) = 0$ для любого $n \leqslant m$ и, в частности, для $n = 0$.

Из этого следует, что при *нильпотентном* идеале $\mathfrak{J}$ имеет место импликация (ii)$\Rightarrow$(i), так как (ii′) означает тогда, что $\operatorname{Tor}_1^A(N, M) = 0$ для *любого* A-модуля N; следовательно, модуль M является плоским (гл. I, § 4).

Б) Докажем следующее предложение:

Предложение 1. *Пусть* A *— коммутативное кольцо,* $\mathfrak{J}$ *— идеал в* A *и* M *— некоторый* A*-модуль. Следующие условия эквивалентны*:

а) *для любого* $n \geqslant 1$ *имеет место равенство* $\operatorname{Tor}_1^A(A/\mathfrak{J}^n, M) = 0$;

б) *для любого* $n \geqslant 1$ *канонический гомоморфизм*

$$\theta_n\colon \mathfrak{J}^n \otimes_A M \to \mathfrak{J}^n M$$

биективен.

Кроме того, эти условия влекут за собой, что

в) *канонический гомоморфизм* $\gamma_M\colon \operatorname{gr}(A) \otimes_{\operatorname{gr}_0(A)} \operatorname{gr}_0(M) \to \operatorname{gr}(M)$ *биективен.*

Обратно, если идеал $\mathfrak{J}$ *нильпотентен, из* в) *следуют* а) *и* б).

Эквивалентность условий а) и б) вытекает из точной последовательности

$$0 = \mathrm{Tor}_1^A(A, M) \to \mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{J}^n, M) \to \mathfrak{J}^n \otimes_A M \to M.$$

Рассмотрим, далее, диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{J}^{n+1} \otimes_A M & \to & \mathfrak{J}^n \otimes_A M & \to & (\mathfrak{J}^n/\mathfrak{J}^{n+1}) \otimes_A (M/\mathfrak{J}M) & \to & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_n} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_n} & & \\ 0 \to \mathfrak{J}^{n+1}M & & \to \mathfrak{J}^n M & \longrightarrow & \mathrm{gr}_n(M) & \longrightarrow & 0 \end{array} \qquad (1)$$

при написании которой принято во внимание, что $(\mathfrak{J}^n/\mathfrak{J}^{n+1}) \otimes_A \otimes_A (M/\mathfrak{J}M)$ канонически отождествляется с $(\mathfrak{J}^n/\mathfrak{J}^{n+1}) \otimes_{A/\mathfrak{J}} \otimes_{A/\mathfrak{J}} (M/\mathfrak{J}M)$. Эта диаграмма коммутативна по определению отображения γ_n и ее строки точны. Если выполнено б), то θ_n и θ_{n+1} представляют собой биективные отображения и, следовательно, таким же является γ_n, согласно определению коядра; следовательно, из б) вытекает в). Обратно, предположим, что идеал $\mathfrak{J}$ нильпотентен, и покажем, что из в) следует б). Будем вести рассуждения индукцией вниз по n, так как $\mathfrak{J}^n \otimes_A M = \mathfrak{J}^n M = 0$ при достаточно большом n. Предположим, таким образом, что в диаграмме (1) отображения γ_n и θ_{n+1} биективны; биективным является, следовательно, и отображение θ_n, согласно следствию 1 предложения 2 гл. I, § 1, n° 4.

В) *Импликация* (ii)$\Rightarrow$(iv)

Если выполнено (ii), то выполнено и (ii′), в силу замечания 1). Предложение 1 показывает, следовательно, что отображение γ_M является изоморфизмом. С другой стороны, уже известно, что из (ii) вытекает (iii), следовательно, $M/\mathfrak{J}M$ является плоским $(A/\mathfrak{J})$-модулем, а это завершает доказательство того, что из (ii) вытекает (iv).

Замечание. 2) Предложение 1 показывает, что когда идеал $\mathfrak{J}$ нильпотентен, из (iv) следует (iii). Принимая во внимание замечание 1), в этом случае мы, таким образом, уже доказали эквивалентность свойств (i), (ii), (iii) и (iv).

Г) *Эквивалентность* (iv) $\Leftrightarrow$ (v)

Для всякого $n \geqslant 1$ A-модуль $M/\mathfrak{J}^n M$ каноническим образом наделен структурой $(A/\mathfrak{J}^n)$-модуля. Если его профильтровать посредством $(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^n)$-адической фильтрации, то немедленно получится, что $\mathrm{gr}_m(M/\mathfrak{J}^n M) = \mathrm{gr}_m(M)$, если $m < n$, и $\mathrm{gr}_m(M/\mathfrak{J}^n M) = 0$, если $m \geqslant n$. Для всякого $k \geqslant 1$ положим $A_k = A/\mathfrak{J}^k$, $\mathfrak{J}_k = \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^k$, $M_k = M/\mathfrak{J}^k M$; обозначим через $(\mathrm{iv})_k$ (соответственно через $(\mathrm{v})_k$) утверждение, полученное из (iv) (соответственно из (v)) заменой A, $\mathfrak{J}$, M на A_k, $\mathfrak{J}_k$, M_k. Из сказанного следует, что свойство (iv) эквивалентно выполнению свойства $(\mathrm{iv})_k$ при

всех $k \geqslant 1$ и, очевидно, что свойство (v) эквивалентно выполнению свойства $(v)_k$ при всех $k \geqslant 1$. Следовательно, достаточно установить эквивалентность $(iv)_k \Leftrightarrow (v)_k$ при всех k или, что то же самое, эквивалентность (iv) $\Leftrightarrow$ (v) в том случае, когда идеал $\mathfrak{J}$ *нильпотентен*. Однако (замечание 2) уже было показано, что в такой ситуации (iv) эквивалентно (i). Поскольку модуль $M/\mathfrak{J}^n M$ изоморфен $M \otimes_A (A/\mathfrak{J}^n)$, из (i) следует (v) (гл .I, § 2, n° 7, следствие 2 предложения 8); кроме того, ясно, что из (v) вытекает (i). Таким образом, мы доказали эквивалентность (iv) $\Leftrightarrow$ (v) для всех случаев, а также эквивалентность всех свойств, перечисленных в теореме, для нильпотентного идеала $\mathfrak{J}$.

Д) *Импликация* (v)$\Rightarrow$(i), *когда A нётерово и M идеально отделим.*

Достаточно доказать, что для любого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A каноническое отображение $j\colon \mathfrak{a} \otimes_A M \to M$ *инъективно* (гл. I, § 2, n° 3, предложение 1). Пусть $x \in \operatorname{Ker} j$; поскольку модуль $\mathfrak{a} \otimes_A M$ отделим в $\mathfrak{J}$-адической топологии, достаточно убедиться, что для всякого целого числа $n > 0$ имеет место включение $x \in \mathfrak{J}^n(\mathfrak{a} \otimes_A M)$. Пусть $f\colon \mathfrak{J}^n\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}$ — каноническое вложение; достаточно показать, что $x \in \operatorname{Im}(f \otimes 1_M)$; в самом деле, если $b \in \mathfrak{J}^n$, $a \in \mathfrak{a}$ и $m \in M$, то образ при отображении $f \otimes 1_M$ элемента $(ba) \otimes m$ из $(\mathfrak{J}^n\mathfrak{a}) \otimes_A M$ есть элемент $(ba) \otimes m = b(a \otimes m)$ модуля $\mathfrak{a} \otimes_A M$, так что $\operatorname{Im}(f \otimes 1_M) \subset \mathfrak{J}^n(\mathfrak{a} \otimes_A M)$. Согласно теореме Крулля (§ 3, n° 2, теорема 2), существует такое целое число k, что $\mathfrak{a}_k = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{J}^k \subset \mathfrak{J}^n\mathfrak{a}$; если $i\colon \mathfrak{a}_k \to \mathfrak{a}$ — каноническое вложение, то, следовательно, будет достаточно показать, что $x \in \operatorname{Im}(i \otimes 1_M)$. Обозначив через $p\colon \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}/\mathfrak{a}_k$ и $h\colon \mathfrak{a}/\mathfrak{a}_k \to A/\mathfrak{J}^k$ канонические отображения, мы получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{a}_k \otimes_A M & \xrightarrow{i \otimes 1_M} & \mathfrak{a} \otimes_A M & \xrightarrow{p \otimes 1_M} & (\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_k) \otimes_A M \to 0 \\ & & \downarrow j & & \downarrow h \otimes 1_M \\ & & M & \longrightarrow & (A/\mathfrak{J}^k) \otimes_A M \end{array}$$

первая строка которой точна. Достаточно доказать, что $x \in \operatorname{Ker}(p \otimes 1_M)$, а ввиду того, что $x \in \operatorname{Ker} j$ по условию, для этого достаточно убедиться, что отображение $h \otimes 1_M$ инъективно. Но оно может быть также записано как отображение:

$$h \otimes 1_{M/\mathfrak{J}^k M}\colon (\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_k) \otimes_{A/\mathfrak{J}^k} (M/\mathfrak{J}^k M) \to M/\mathfrak{J}^k M,$$

(*Algèbre*, chap. II, 3e éd., § 3, n° 6, corollaire 3 de la proposition 6), которое инъективно, так как инъективно h, и, согласно (v), $M/\mathfrak{J}^k M$ является *плоским* $A/\mathfrak{J}^k$-модулем; это завершает доказательство.

4. Приложения

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть A — коммутативное кольцо, $\mathfrak{J}$ — идеал в A и B — такая нётерова коммутативная A-алгебра, что $\mathfrak{J}B$ содержится в радикале кольца B. Тогда любой B-модуль M конечного типа является идеально отделимым A-модулем относительно $\mathfrak{J}$.*

Мы установим даже более общий факт: для любого A-модуля N конечного типа модуль $N\otimes_A M$ отделим в $\mathfrak{J}$-адической топологии. Действительно, $N_{(B)} = N\otimes_A B$ представляет собой B-модуль конечного типа и B-модуль $N\otimes_A M$ канонически отождествляется с $N_{(B)}\otimes_B M$ в силу ассоциативности тензорного произведения. Пусть $\mathfrak{L}$ — радикал кольца B. Поскольку $\mathfrak{J}B\subset\mathfrak{L}$, $\mathfrak{J}$-адическая топология на $N\otimes_A M$ при этом отождествлении дает топологию, более тонкую, чем $\mathfrak{L}$-адическая топология на $N_{(B)}\otimes_B M$; но эта последняя топология отделима, так как $N_{(B)}\otimes_B M$ является B-модулем конечного типа (n° 1, пример 1); отсюда следует требуемый результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть A — коммутативное кольцо, B — коммутативная A-алгебра, $\mathfrak{J}$ — идеал в кольце A и M — некоторый B-модуль. Предположим, что B — нётерово кольцо и представляет собой плоский A-модуль и что модуль M идеально отделим относительно $\mathfrak{J}B$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *M является плоским B-модулем;*

б) *M является плоским A-модулем и $M/\mathfrak{J}M = M/(\mathfrak{J}B)M$ представляет собой плоский $(B/\mathfrak{J}B)$-модуль.*

Если, кроме того, канонический гомоморфизм $A/\mathfrak{J}\to B/\mathfrak{J}B$ биективен, то условия а) *и* б) *эквивалентны также условию*

в) *M является плоским A-модулем.*

Условие б) следует из условия а) в силу следствий 2 и 3 предложения 8 гл. I, § 2, n° 7, и в силу того, что модуль $M/\mathfrak{J}M$ изоморфен модулю $M\otimes_B(B/\mathfrak{J}B)$. Предположим, что выполнено условие б). Чтобы показать, что M является плоским B-модулем, мы применим теорему 1 n° 2, в которой заменим A на B и $\mathfrak{J}$ на $\mathfrak{J}B$. Достаточно, следовательно, доказать, что каноническое отображение f: $\mathfrak{J}B\otimes_A M\to\mathfrak{J}B$ инъективно. Пусть f_1 — каноническое отображение $\mathfrak{J}\otimes_A B\to\mathfrak{J}B$ и f_2 — канонический изоморфизм $\mathfrak{J}\otimes_A M\to(\mathfrak{J}\otimes_A B)\otimes_B M$; композиция $f\circ(f_1\otimes 1_M)\circ f_2$ представляет собой каноническое отображение f': $\mathfrak{J}\otimes_A M\to\mathfrak{J}M$, что легко проверяется. Но f' является изоморфизмом, так как модуль M плоский над кольцом A, и f_1 — изоморфизм, так как B — плоский модуль над A. Следовательно, f является изоморфизмом.

Пусть ρ: $A/\mathfrak{J} \to B/\mathfrak{J}B$ — канонический гомоморфизм; структура $(A/\mathfrak{J})$-модуля на $M/\mathfrak{J}M$, определенная с помощью отображения ρ исходя из его структуры $(B/\mathfrak{J}B)$-модуля, изоморфна структуре $(A/\mathfrak{J})$-модуля на $M \otimes_A (A/\mathfrak{J})$. Отсюда следует, что если M — плоский A-модуль, то $M/\mathfrak{J}M$ — плоский $(A/\mathfrak{J})$-модуль, так что он является и плоским $(B/\mathfrak{J}B)$-модулем, если ρ — изоморфизм. Таким образом, в этом случае доказано, что в) $\Rightarrow$ б).

Следствие. *Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, $\mathfrak{J}$ — идеал в A, $\hat{A}$ — отделимое пополнение кольца A относительно $\mathfrak{J}$-адической топологии, M — идеально отделимый $\hat{A}$-модуль относительно идеала $\mathfrak{J}\hat{A}$. Для того чтобы M был плоским A-модулем, необходимо и достаточно, чтобы M был плоским $\hat{A}$-модулем.*

Действительно, известно, что $\hat{A}$ — нётерово кольцо (§ 3 n° 4, предложение 8), являющееся плоским A-модулем (§ 3, n° 4, теорема 3); известно также, что $\mathfrak{J}\hat{A} = \hat{\mathfrak{J}}$ (§ 2, n° 12, предложение 16) и что канонический гомоморфизм $A/\mathfrak{J} \to \hat{A}/\hat{\mathfrak{J}}$ биективен (§ 2, n° 12, предложение 15); таким образом, мы можем воспользоваться предложением 3.

Предложение 4. *Пусть A и B — два нётеровых коммутативных кольца, h: $A \to B$ — гомоморфизм колец, $\mathfrak{J}$ — идеал в A, а $\mathfrak{L}$ — идеал в B, содержащий $\mathfrak{J}B$ и содержащийся в радикале кольца B. Пусть $\hat{A}$ — отделимое пополнение кольца A относительно $\mathfrak{J}$-адической топологии и $\hat{B}$ — отделимое пополнение кольца B относительно $\mathfrak{L}$-адической топологии; гомоморфизм h непрерывен в этих топологиях и, следовательно, отображение $\hat{h}$: $\hat{A} \to \hat{B}$ превращает $\hat{B}$ в некоторую $\hat{A}$-алгебру. Пусть M — какой-нибудь B-модуль конечного типа и $\hat{M}$ — его отделимое пополнение относительно $\mathfrak{L}$-адической топологии; тогда следующие свойства эквивалентны:*

а) *модуль M является плоским над кольцом A;*

б) *модуль $\hat{M}$ является плоским над кольцом A;*

в) *модуль $\hat{M}$ является плоским над кольцом $\hat{A}$.*

Поскольку кольцо B, наделенное $\mathfrak{L}$-адической топологией, представляет собой кольцо Зарисского, кольцо $\hat{B}$ является строго плоским B-модулем (§ 3, n° 5, предложение 9) и модуль $\hat{M}$ канонически изоморфен модулю $M \otimes_B \hat{B}$ (§ 3, n° 4, теорема 3); немедленно проверяется, что этот канонический изоморфизм является изоморфизмом структуры A-модуля на $\hat{M}$ на

структуру A-модуля на $M\otimes_B\widehat{B}$, определяемую структурой A-модуля на M. Воспользуемся предложением 4 гл. I, § 3, n° 2, заменив R на B, S — на A, E — на $\widehat{B}$ и F — на M; мы видим, что, для того чтобы M был плоским A-модулем, необходимо и достаточно, чтобы модуль $\widehat{M}$ был плоским над кольцом A. Однако $\widehat{M}$ представляет собой $\widehat{B}$-модуль конечного типа и идеал $\mathfrak{J}\widehat{B}$ содержится в $\widehat{\mathfrak{L}}=\mathfrak{L}\widehat{B}$, так что $\mathfrak{J}\widehat{B}$ содержится и в радикале $\widehat{B}$ (§ 3, n° 4, предложение 8). Следовательно, $\widehat{M}$ является A-модулем, идеально отделимым относительно идеала $\mathfrak{J}\widehat{A}$ (предложение 2). Условия б) и в), таким образом, оказываются эквивалентными в силу следствия предложения 3.

Упражнения

1) Пусть A — коммутативное кольцо и $\mathfrak{J}$ — идеал в нем. Говорят, что A-модуль M *абсолютно отделим* относительно идеала $\mathfrak{J}$, если для любого A-модуля N конечного типа A-модуль $N\otimes_A M$ отделим в $\mathfrak{J}$-адической топологии; абсолютно отделимый A-модуль идеально отделим.

а) Для того чтобы M был абсолютно отделимым относительно идеала $\mathfrak{J}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого A-модуля конечного типа N и любого подмодуля N' в N модуль $\mathrm{Im}(N'\otimes_A M)$ был замкнут в $N\otimes_A M$ относительно $\mathfrak{J}$-адической топологии.

б) Пусть B — коммутативная A-алгебра, и пусть $\mathfrak{L}$ — идеал в B, содержащий $\mathfrak{J}B$. Если M — абсолютно отделимый B-модуль относительно $\mathfrak{L}$, то M является абсолютно отделимым A-модулем относительно $\mathfrak{J}$.

2) Показать, что любой $\mathbf{Z}$-модуль, отделимый в p-адической топологии (p — простое число), идеально отделим, но привести пример $\mathbf{Z}$-модуля конечного типа, отделимого, но не являющегося абсолютно отделимым относительно p (воспользоваться упражнением 1а)).

3) Пусть обозначения будут те же, что и в упражнении 11 из § 3, и пусть N — подмодуль в $\widehat{E}$, являющийся замыканием в $\widehat{E}$ подмодуля из $\widehat{E}$, порожденного векторами $pe_{2n-1}-p^n e_{2n}$ ($n\geqslant 1$) и пусть $M=\widehat{E}/N$. Показать, что в p-адической топологии подмодуль pM из M не замкнут в M, и вывести отсюда, что M представляет собой идеально отделимый $\mathbf{Z}_p$-модуль, не являющийся, однако, абсолютно отделимым относительно p.

¶ 4) Пусть A — коммутативное кольцо, $\mathfrak{J}$ — идеал в нем и $S=1+\mathfrak{J}$. Показать, что если M — абсолютно отделимый A-модуль относительно $\mathfrak{J}$, то $S^{-1}M=M$, иначе говоря, для любого $a\in S$ отображение $x\to ax$ является биективным отображением модуля M на себя. (Показать сначала, что предположение об отделимости модуля M в $\mathfrak{J}$-адической топологии влечет за собой инъективность отображения $x\to ax$; после этого доказать, что подмодуль aM из M плотен в M относительно $\mathfrak{J}$-адической топологии, и применить упражнение 1а)).

5) Положим $A=\mathbf{Z}$, $\mathfrak{J}=p\mathbf{Z}$, где p — простое число.

а) Показать, что если q — простое число, отличное от p, то $\mathbf{Z}$-модуль $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ удовлетворяет условию (ii) из теоремы 1, но не удовлетворяет условию (i).

б) Показать, что $\mathbf{Z}$-модуль $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ обладает свойством (iv) из теоремы 1, но не обладает свойством (ii).

6) Пусть A — нётерово коммутативное кольцо, $\mathfrak{J}$ — идеал в A и M — некоторый A-модуль. Показать, что условие (v) из теоремы 1 эквивалентно следующему:

(v′) Для любого A-модуля конечного типа N и любого подмодуля N' в N каноническое отображение $(M\otimes_A N')\hat{} \to (M\otimes_A N)\hat{}$ (где оба модуля являются отделимыми пополнениями относительно $\mathfrak{J}$-адических топологий модулей $M\otimes_A N'$ и $M\otimes_A N$ соответственно) инъективно. (Для того чтобы доказать, что из (v) следует (v′), рассуждать так же, как и в частн Д) доказательства теоремы 1. Для того чтобы показать, что из (v′) следует (v), рассмотреть A-модули N, аннулируемые некоторой степенью идеала $\mathfrak{J}$.)

¶ 7) Пусть $(A_\lambda, f_{\mu\lambda})$ — фильтрующаяся индуктивная система нётеровых локальных колец; если $\mathfrak{m}_\lambda$ — максимальный идеал в кольце A_λ, то предположим, что при $\lambda \leqslant \mu$ имеет место равенство $\mathfrak{m}_\mu = \mathfrak{m}_\lambda A_\mu$ и что A_μ является плоским A_λ-модулем. Показать, что в этом случае кольцо $A = \varinjlim A_\lambda$ нётерово и является плоским A_λ-модулем при любом λ. (Если $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_\lambda A$ — максимальный идеал в A (гл. II, § 3, упражнение 16), то показать, что $\mathfrak{m}$-адическая топология на A отделима, приняв во внимание, что кольцо A является строго плоским A_λ-модулем при любом λ. После этого доказать, что если $\hat{A}$ — пополнение кольца A относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии, то $\hat{A}$ нётерово, используя при этом следствие 5 теоремы 2, § 2, n° 10; наконец, доказать, что для любого λ кольцо $\hat{A}$ является плоским A_λ-модулем, используя для этого теорему 1 n° 2 и предложение 2 n° 3.)

¶ 8) Пусть A — нётерово локальное кольцо, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал и $k = A/\mathfrak{m}$ — его поле вычетов. Пусть K — расширение поля k; показать, что существует локальный гомоморфизм из A в такое нётерово локальное кольцо B, что $B/\mathfrak{m}B$ изоморфно K и B является плоским A-модулем. (Рассмотреть сначала случай, когда $K = k(t)$, различая два случая соответственно тому, t алгебраично или трансцендентно над k; после этого рассмотреть семейство (K_λ) подполей поля K, содержащих k, вполне упорядоченное по включению и такое, что если K_λ непосредственно предшествует K_μ, то $K_\lambda = K_\mu(t_\mu)$ при некотором $t_\mu \in K_\mu$. Наконец, применить упражнение 7.)

ГЛАВА IV[1])

АССОЦИИРОВАННЫЕ ПРОСТЫЕ ИДЕАЛЫ И ПРИМАРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Все рассматриваемые в этой главе кольца предполагаются коммутативными и обладающими единичным элементом; относительно всех гомоморфизмов колец предполагается, что они переводят единичный элемент в единичный. Под подкольцом кольца A подразумевается подкольцо, содержащее единичный элемент из A.

Напомним, что для любого A-модуля E и любого элемента $x \in E$ через $\mathrm{Ann}(x)$ обозначается аннулятор элемента x, представляющий собой множество таких элементов $a \in A$, что $ax = 0$.

§ 1. Простые идеалы, ассоциированные с модулем

1. Определение ассоциированных простых идеалов

Определение 1. *Пусть M — модуль над кольцом A. Говорят, что простой идеал $\mathfrak{p}$ кольца A ассоциирован с M, если существует такой элемент $x \in M$, что $\mathfrak{p}$ равен аннулятору элемента x. Через $\mathrm{Ass}_A(M)$ или просто через $\mathrm{Ass}(M)$ обозначается множество простых идеалов, ассоциированных с модулем M.*

Пример. Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал кольца многочленов $A = \mathbf{C}[X_1, \ldots, X_r]$, V — соответствующее аффинное алгебраическое многообразие и $V_1, \ldots, V_p$ — неприводимые компоненты многообразия V. Если в качестве M взять кольцо $A/\mathfrak{a}$ регулярных функций на V, то простые идеалы, ассоциированные с модулем M, будут идеалами многообразий $V_1, \ldots, V_p$.

Поскольку аннулятором нуля является само кольцо A, элемент $x \in M$, аннулятор которого равен некоторому простому идеалу, обязательно отличен от 0. Утверждение, что простой идеал $\mathfrak{p}$ ассоциирован с модулем M, равносильно утверждению, что M содержит подмодуль, *изоморфный* $A/\mathfrak{p}$ (и равный Ax, где $x \in M$ — любой элемент, для которого $\mathfrak{p}$ служит аннулятором).

Если A-модуль M является объединением семейства $(M_\iota)_{\iota \in I}$ подмодулей, то очевидно, что

$$\mathrm{Ass}(M) = \bigcup_{\iota \in I} \mathrm{Ass}(M_\iota). \qquad (1)$$

[1]) Результаты этой главы не зависят ни от какой другой книги второй части, а также от § 4 гл. I и § 5 гл. III.

Предложение 1. *Для любого простого идеала* $\mathfrak{p}$ *кольца* A *и любого подмодуля* $M \neq 0$ *модуля* $A/\mathfrak{p}$ *имеет место равенство* $\operatorname{Ass}(M) = \{\mathfrak{p}\}$.

Действительно, поскольку кольцо $A/\mathfrak{p}$ целостное, аннулятор любого отличного от нуля элемента в $A/\mathfrak{p}$ равен $\mathfrak{p}$.

Предложение 2. *Пусть* M *— модуль над кольцом* A. *Любой максимальный элемент множества идеалов* $\operatorname{Ann}(x)$ *кольца* A, *где* x *пробегает множество ненулевых элементов из* M, *принадлежит множеству* $\operatorname{Ass}(M)$.

Действительно, пусть $\mathfrak{a} = \operatorname{Ann}(x)$ $(x \in M, x \neq 0)$ — такой максимальный элемент; достаточно показать, что идеал $\mathfrak{a}$ прост. Поскольку $x \neq 0$, имеем $\mathfrak{a} \neq A$. Пусть b, c — такие элементы из A, что $bc \in \mathfrak{a}$ и $c \notin \mathfrak{a}$. Тогда $cx \neq 0$, $b \in \operatorname{Ann}(cx)$ и $\mathfrak{a} \subset \operatorname{Ann}(cx)$. Поскольку $\mathfrak{a}$ максимален, имеет место равенство $\operatorname{Ann}(cx) = \mathfrak{a}$, откуда $b \in \mathfrak{a}$, в силу чего идеал $\mathfrak{a}$ прост.

Следствие 1. *Пусть* M *— модуль над нётеровым кольцом* A. *Тогда условие* $M \neq \{0\}$ *эквивалентно условию* $\operatorname{Ass}(M) \neq \varnothing$.

Если $M = \{0\}$, то очевидно, что множество $\operatorname{Ass}(M)$ пусто (для любого кольца A). Если $M \neq \{0\}$, то множество идеалов вида $\operatorname{Ann}(x)$, где $x \in M$ и $x \neq 0$, непусто и состоит из идеалов, отличных от A; поскольку A нётерово, это множество обладает максимальным элементом. Достаточно, таким образом, воспользоваться предложением 2.

Следствие 2. *Пусть* A *— нётерово кольцо,* M *— некоторый* A*-модуль и* a *— элемент кольца* A. *Для того чтобы гомотетия модуля* M, *соответствующая* a, *была инъективна, необходимо и достаточно, чтобы элемент* a *не принадлежал ни одному идеалу, ассоциированному с модулем* M.

Если a принадлежит некоторому простому идеалу $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$, то $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}(x)$ при $x \in M$, $x \neq 0$; отсюда $ax = 0$ и гомотетия, соответствующая элементу a, не инъективна. Обратно, если $ax = 0$ при $x \in M$, таком, что $x \neq 0$, то $Ax \neq \{0\}$, откуда $\operatorname{Ass}(Ax) \neq \varnothing$ (следствие 1). Пусть $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(Ax)$; очевидно, что $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$ и $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}(bx)$ при $b \in A$; отсюда $a \in \mathfrak{p}$, так как $abx = 0$.

Следствие 3. *Множество делителей нуля в нётеровом кольце* A *представляет собой объединение идеалов* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(A)$.

Предложение 3. *Пусть* A *— кольцо,* M *— некоторый* A*-модуль и* N *— подмодуль в* M. *Тогда*

$$\operatorname{Ass}(N) \subset \operatorname{Ass}(M) \subset \operatorname{Ass}(N) \cup \operatorname{Ass}(M/N). \qquad (2)$$

Включение $\operatorname{Ass}(N) \subset \operatorname{Ass}(M)$ очевидно. Пусть $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$, E — подмодуль в M, изоморфный $A/\mathfrak{p}$, и $F = E \cap N$. Если $F = \{0\}$,

то модуль E изоморфен подмодулю модуля M/N, откуда $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M/N)$. Если $F \neq \{0\}$, то аннулятор каждого элемента, отличного от нуля, в модуле F равен $\mathfrak{p}$ (предложение 1); следовательно, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(F) \subset \mathrm{Ass}(N)$.

Следствие 1. *Пусть A-модуль M является прямой суммой семейства подмодулей $(M_\iota)_{\iota \in I}$; тогда* $\mathrm{Ass}(M) = \bigcup_{\iota \in I} \mathrm{Ass}(M_\iota)$.

При помощи (1) доказательство сводится к случаю конечного I, а затем, на основе индукции по $\mathrm{Card}(I)$, к случаю $\mathrm{Card}(I) = 2$. Пусть, таким образом, $I = \{i, j\}$, $i \neq j$; поскольку модуль M/M_i изоморфен M_j, то $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(M_i) \cup \mathrm{Ass}(M_j)$ (предложение 3); кроме того, множества $\mathrm{Ass}(M_i)$ и $\mathrm{Ass}(M_j)$ содержатся в $\mathrm{Ass}(M)$ (предложение 3), откуда вытекает утверждение.

Следствие 2. *Пусть M — некоторый A-модуль, $(Q_i)_{i \in I}$ — конечное семейство подмодулей в M. Если $\bigcap_{i \in I} Q_i = \{0\}$, то*

$$\mathrm{Ass}(M) \subset \bigcup_{i \in I} \mathrm{Ass}(M/Q_i).$$

Действительно, каноническое отображение $M \to \bigoplus_{i \in I} (M/Q_i)$ инъективно; следовательно, достаточно применить предложение 3 и его следствие 1.

Предложение 4. *Пусть M — некоторый A-модуль и Φ — некоторое подмножество в* $\mathrm{Ass}(M)$. *Тогда существует такой подмодуль N модуля M, что* $\mathrm{Ass}(N) = \mathrm{Ass}(M) - \Phi$ *и* $\mathrm{Ass}(M/N) = \Phi$.

Пусть $\mathfrak{E}$ — множество таких подмодулей P модуля M, что $\mathrm{Ass}(P) \subset \mathrm{Ass}(M) - \Phi$. Формула (1) показывает, что множество $\mathfrak{E}$, упорядоченное по включению, *индуктивно*; кроме того, $\{0\} \in \mathfrak{E}$, так что $\mathfrak{E} \neq \varnothing$. Пусть N — максимальный элемент множества $\mathfrak{E}$. Тогда $\mathrm{Ass}(N) \subset \mathrm{Ass}(M) - \Phi$. Мы сейчас увидим, что $\mathrm{Ass}(M/N) \subset \Phi$ и этим, в силу предложения 3, доказательство будет закончено. Пусть $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M/N)$; тогда M/N содержит подмодуль F/N, изоморфный $A/\mathfrak{p}$. В силу предложений 1 и 3 имеем $\mathrm{Ass}(F) \subset \mathrm{Ass}(N) \cup \{\mathfrak{p}\}$. Так как элемент N максимален в множестве $\mathfrak{E}$, то $F \notin \mathfrak{E}$ и, следовательно, $\mathfrak{p} \in \Phi$.

2. *Локализация ассоциированных простых идеалов*

Предложение 5. *Пусть A — кольцо, S — некоторая мультипликативная система в A, Φ — множество тех простых идеалов кольца A, которые не пересекаются с S, и M — некоторый A-модуль. Тогда:*

(i) *Отображение* $\mathfrak{p} \to S^{-1}\mathfrak{p}$ *множества* $\mathrm{Ass}_A(M) \cap \Phi$ *на некоторое подмножество в* $\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$ *биективно.*

(ii) *Если* $\mathfrak{p} \in \Phi$ *— идеал конечного типа и если*

$$S^{-1}\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M),$$

то $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)$.

Напомним (гл. II, § 2, п° 5, предложение 11), что $\mathfrak{p} \to S^{-1}\mathfrak{p}$ является биективным отображением множества Φ на множество всех простых идеалов кольца $S^{-1}A$. Если $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M) \cap \Phi$, то $\mathfrak{p}$ является аннулятором некоторого моногенного подмодуля N из M; тогда $S^{-1}\mathfrak{p}$ является аннулятором моногенного подмодуля $S^{-1}N$ модуля $S^{-1}M$ (гл. II, § 2, п° 4, формула (9)), следовательно, $S^{-1}\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$. Обратно, предположим, что идеал $\mathfrak{p} \in \Phi$ имеет конечный тип и таков, что $S^{-1}\mathfrak{p}$ ассоциирован с модулем $S^{-1}M$; тогда существуют такие элементы $x \in M$ и $t \in S$, что идеал $S^{-1}\mathfrak{p}$ представляет собой аннулятор элемента x/t. Пусть $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — система образующих идеала $\mathfrak{p}$; тогда $(a_i/1)(x/t) = 0$ и, следовательно, существует такой элемент $s_i \in S$, что $s_i a_i x = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Положим $s = s_1 s_2 \ldots s_n$; для всякого $a \in \mathfrak{p}$ имеет место равенство $sax = 0$, откуда $\mathfrak{p} \subset \mathrm{Ann}(sx)$; с другой стороны, если элемент $b \in A$ таков, что $bsx = 0$, то $b/1 \in S^{-1}\mathfrak{p}$ по определению, откуда $b \in \mathfrak{p}$. Следовательно, $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(sx)$ и $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)$.

Следствие. *Если кольцо* A *нётерово, то* $\mathfrak{p} \to S^{-1}\mathfrak{p}$ *является биективным отображением из* $\mathrm{Ass}(M) \cap \Phi$ *на* $\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$.

Если кольцо A не является нётеровым, отображение $\mathfrak{p} \to S^{-1}\mathfrak{p}$ множества $\mathrm{Ass}_A(M) \cap \Phi$ в $\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$ не обязано быть сюръективным (упражнение 1).

Предложение 6. *Пусть* A *— нётерово кольцо,* M *— некоторый* A*-модуль,* S *— мультипликативная система в* A *и* Ψ *— множество тех элементов из* $\mathrm{Ass}_A(M)$, *которые не пересекают* S. *Тогда ядро* N *канонического отображения* $M \to S^{-1}M$ *является единственным подмодулем в* M, *который удовлетворяет соотношениям*

$$\mathrm{Ass}(N) = \mathrm{Ass}(M) - \Psi, \quad \mathrm{Ass}(M/N) = \Psi. \tag{3}$$

В силу предложения 4 п° 1, в модуле M существует подмодуль N', который удовлетворяет соотношениям $\mathrm{Ass}(N') = \mathrm{Ass}(M) - \Psi$ и $\mathrm{Ass}(M/N') = \Psi$. Мы докажем, что $N' = N$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{p} & M/N' \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ S^{-1}M & \xrightarrow[S^{-1}p]{} & S^{-1}(M/N') \end{array}$$

где p, u, v — канонические гомоморфизмы. Покажем, что гомоморфизмы $S^{-1}p$ и v инъективны, из чего будет следовать равенство ядер гомоморфизмов u и p, т. е. что $N' = N$.

Поскольку $\mathrm{Ass}(N') \cap \Psi = \varnothing$, всякий элемент из $\mathrm{Ass}(N')$ пересекает S. Значит, $\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}N') = \varnothing$ (следствие предложения 5), откуда $S^{-1}N' = \{0\}$ (n° 1, следствие 1 предложения 2), так что гомоморфизм $S^{-1}p$ инъективен (гл. II, § 2, n° 4, теорема 1). С другой стороны, если элемент x принадлежит ядру K гомоморфизма v, то $\mathrm{Ann}(x) \cap S \neq \varnothing$ (гл. II, § 2, n° 2, предложение 4); следовательно, $\mathrm{Ass}(K) = \varnothing$, так как $\mathrm{Ass}(K) \subset \subset \mathrm{Ass}(M/N') = \Psi$; отсюда получается, что $K = \{0\}$ (n° 1, следствие 1 предложения 2) и гомоморфизм v инъективен.

3. *Связь с носителем*

Пусть M — модуль над кольцом A. Напомним, что носителем модуля M называется обозначаемое через $\mathrm{Supp}(M)$ множество тех простых идеалов $\mathfrak{p}$ кольца A, для которых $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ (гл. II, § 4, n° 4, определение 5).

Предложение 7. *Пусть A — кольцо и M — некоторый A-модуль.*

(i) *Всякий простой идеал $\mathfrak{p}$ кольца A, содержащий какой-нибудь элемент из* $\mathrm{Ass}(M)$, *принадлежит носителю* $\mathrm{Supp}(M)$.

(ii) *Обратно, если A — нётерово кольцо, то каждый идеал $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$ содержит некоторый элемент из* $\mathrm{Ass}(M)$.

Если $\mathfrak{p}$ содержит $\mathfrak{q}$ из $\mathrm{Ass}(M)$, то $\mathfrak{q} \cap (A - \mathfrak{p}) = \varnothing$, следовательно, если положить, $S = A - \mathfrak{p}$, то $S^{-1}\mathfrak{q}$ является простым идеалом, ассоциированным с модулем $S^{-1}M = M_{\mathfrak{p}}$ (n° 2, предложение 5), так что *тем более* $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ и потому $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$. Обратно, если A — нётерово, то нётеровым будет и кольцо $A_{\mathfrak{p}}$ (гл. II, § 2, n° 6, следствие 2 предложения 10). Если $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$, то следовательно, $\mathrm{Ass}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq \varnothing$ (n° 1, следствие 1 предложения 2); поэтому существует такой идеал $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_A(M)$, что $\mathfrak{q} \cap (A - \mathfrak{p}) = \varnothing$ (n° 2, следствие предложения 5).

Следствие 1. *Если M — модуль над нётеровым кольцом, то* $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Supp}(M)$, *и оба эти множества имеют одни и те же минимальные элементы.*

Следствие 2. *Нильрадикал нётерова кольца A равен пересечению идеалов $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A)$.*

Действительно, нам уже известно, что нильрадикал кольца A равен пересечению минимальных элементов множества $\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Supp}(A)$ (гл. II, § 2, п° 6, предложение 13).

4. Случай модулей конечного типа над нётеровым кольцом

Теорема 1. *Пусть A — нётерово кольцо и M — некоторый A-модуль конечного типа. Существует композиционный*[1]) *ряд $(M_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ модуля M, каждый фактор M_i/M_{i+1} которого при $0 \leqslant i \leqslant n-1$ изоморфен $A/\mathfrak{p}_i$, где $\mathfrak{p}_i$ — некоторый простой идеал кольца A.*

Пусть, в самом деле, $\mathfrak{E}$ — множество подмодулей модуля M, которые обладают композиционным рядом, имеющим указанное в формулировке свойство. Поскольку $\mathfrak{E}$ непусто ($\{0\}$ принадлежит $\mathfrak{E}$), а M — нётеров модуль, множество $\mathfrak{E}$ обладает максимальным элементом N. Если $M \neq N$, то $M/N \neq 0$, так что $\mathrm{Ass}(M/N) \neq \varnothing$ (п° 1, следствие 1 предложения 2); следовательно, модуль M/N содержит подмодуль N'/N, изоморфный некоторому A-модулю вида $A/\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ — простой идеал. Тогда по определению $N' \in \mathfrak{E}$, а это противоречит максимальности N. Таким образом, обязательно $N = M$.

Теорема 2. *Пусть M — модуль конечного типа над нётеровым кольцом A и $(M_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ — такой композиционный ряд модуля M, что для $0 \leqslant i \leqslant n-1$ фактор M_i/M_{i+1} изоморфен $A/\mathfrak{p}_i$, где $\mathfrak{p}_i$ — простой идеал из A. Тогда*

$$\mathrm{Ass}(M) \subset \{\mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}\} \subset \mathrm{Supp}(M); \tag{4}$$

кроме того, у этих трех множеств одни и те же минимальные элементы, которые совпадают с минимальными элементами множества простых идеалов, содержащих $\mathrm{Ann}(M)$.

Включение $\mathrm{Ass}(M) \subset \{\mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}\}$ немедленно следует из предложений 1 из 3 п° 1. Для $0 \leqslant i \leqslant n-1$

$$\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Supp}(A/\mathfrak{p}_i) = \mathrm{Supp}(M_i/M_{i+1})$$

(гл. II, § 4, п° 4, пример), откуда $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Supp}(M_i) \subset \mathrm{Supp}(M)$ (гл. II, § 4, п° 4, предложение 16), чем устанавливается включение $\{\mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}\} \subset \mathrm{Supp}(M)$. Следствие 1 предложения 7 п° 3 показывает, что $\mathrm{Ass}(M)$ и $\mathrm{Supp}(M)$ имеют одни и те же минимальные элементы, а (4) показывает, что они же служат и

[1]) См. *Алгебра*, гл. I, § 6, п° 14. — *Прим. ред.*

минимальными элементами множества $\{\mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}\}$. Последнее утверждение следует теперь из предложения 17 гл. II, § 4, n° 4.

Следствие. *Если M — модуль конечного типа над нётеровым кольцом A, то множество $\mathrm{Ass}(M)$ конечно.*

В условиях теоремы 2 множество $\{\mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}\}$ не обязательно однозначно определяется модулем M; в частности, оно может отличаться от $\mathrm{Ass}(M)$ (упражнение 6).

Предложение 8. *Пусть A — нётерово кольцо, $\mathfrak{a}$ — идеал в A и M — некоторый A-модуль конечного типа. Следующие условия эквивалентны:*

а) *существует такой элемент $x \neq 0$ из M, что $\mathfrak{a}x = 0$;*

б) *для всякого $a \in \mathfrak{a}$ существует такой элемент $x \neq 0$ из M, что $ax = 0$;*

в) *существует такой идеал $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, что $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$.*

Очевидно, что из а) следует б). В силу следствия 2 предложения 2 n° 1, условие б) означает, что идеал $\mathfrak{a}$ содержится в объединении простых идеалов, ассоциированных с M, следовательно, в одном из них, ибо множество $\mathrm{Ass}(M)$ конечно (гл. II, § 1, n° 1, предложение 2); таким образом, из б) следует в). Наконец, если существует такой идеал $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, что $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, то $\mathfrak{p}$ является аннулятором некоторого элемента $x \neq 0$ из M (n° 1, определение 1) и $\mathfrak{a}x = 0$; следовательно, из в) вытекает а).

Предложение 9. *Пусть A — нётерово кольцо, $\mathfrak{a}$ — идеал в A и M — некоторый A-модуль конечного типа. Для того чтобы существовало такое целое число $n > 0$, что $\mathfrak{a}^n M = 0$, необходимо и достаточно, чтобы идеал $\mathfrak{a}$ содержался в пересечении простых идеалов, ассоциированных с модулем M.*

Действительно, это пересечение равно пересечению минимальных элементов множества $\mathrm{Supp}(M)$ (n° 3, следствие 1 из предложения 7) и высказывание, что $\mathfrak{a}$ содержится в этом пересечении, равносильно тому, что $V(\mathfrak{a}) \supset \mathrm{Supp}(M)$ в обозначениях гл. II, § 4; утверждение получается теперь из следствия 2 предложения 17 гл. II, § 4, n° 4.

Определение 2. *Пусть задан A-модуль M. Эндоморфизм u модуля M называется почти нильпотентным, если для любого $x \in M$ существует такое целое $n(x) > 0$, что $u^{n(x)}(x) = 0$.*

Если M — модуль конечного типа, то всякий почти нильпотентный эндоморфизм нильпотентен.

Следствие. *Пусть A — нётерово кольцо, M — некоторый A-модуль и a — элемент из A. Для того чтобы гомоморфизм a_M: $x \to ax$ модуля M был почти нильпотентным, необходимо и*

достаточно, чтобы элемент a принадлежал любому идеалу множества $\mathrm{Ass}(M)$.

Действительно, сформулированное условие эквивалентно тому, что для всякого $x \in M$ существует такое $n(x) > 0$, что $(Aa)^{n(x)}(Ax) = 0$; в силу предложения 9 это означает, что a принадлежит всем простым идеалам, ассоциированным с подмодулем Ax модуля M; таким образом, следствие вытекает из того, что $\mathrm{Ass}(M)$ представляет собой объединение множеств $\mathrm{Ass}(Ax)$, когда x пробегает модуль M (n° 1, формула (1)).

Предложение 10. *Пусть A — нётерово кольцо, E — некоторый A-модуль конечного типа и F — некоторый A-модуль. Тогда имеет место равенство*

$$\mathrm{Ass}(\mathrm{Hom}_A(E, F)) = \mathrm{Ass}(F) \cap \mathrm{Supp}(E). \qquad (5)$$

По условию, модуль E изоморфен некоторому A-модулю вида A^n/R; следовательно, $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ изоморфен подмодулю модуля $\mathrm{Hom}_A(A^n, E)$, а этот последний изоморфен F^n; но $\mathrm{Ass}(F^n) = \mathrm{Ass}(F)$ (n° 1, следствие 1 из предложения 3); значит, имеет место $\mathrm{Ass}(\mathrm{Hom}_A(E, F)) \subset \mathrm{Ass}(F)$. С другой стороны, $\mathrm{Supp}(\mathrm{Hom}_A(E, F)) \subset \mathrm{Supp}(E)$: действительно, для всякого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A модуль $\mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(E_\mathfrak{p}, F_\mathfrak{p})$ изоморфен модулю $(\mathrm{Hom}_A(E, F))_\mathfrak{p}$ (гл. II, § 2, n° 7, предложение 19), откуда немедленно следует наше утверждение. Таким образом, из предложения 7 (i) мы заключаем, что $\mathrm{Ass}(\mathrm{Hom}_A(E, F)) \subset \mathrm{Supp}(E)$.

Обратно, пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца A, принадлежащий $\mathrm{Ass}(F) \cap \mathrm{Supp}(E)$. По определению F содержит подмодуль, изоморфный модулю $A/\mathfrak{p}$. С другой стороны, так как E — модуль конечного типа и $E_\mathfrak{p} \neq 0$, известно, что существует некоторый гомоморфизм $w \neq 0$ модуля E в $A/\mathfrak{p}$ (гл. II, § 4, n° 4, предложение 20). Поскольку существует инъективный гомоморфизм j модуля $A/\mathfrak{p}$ в F, имеет место включение $j \circ w \in \mathrm{Hom}(E, F)$ и $j \circ w \neq 0$. С другой стороны, соотношение $aw = 0$ для некоторого $a \in A$ эквивалентно тому, что $a \in \mathfrak{p}$, ибо аннулятор всякого ненулевого элемента из $a \in A/\mathfrak{p}$ равен $\mathfrak{p}$; следовательно, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{Hom}_A(E, F))$.

Упражнения

1) а) Пусть A — абсолютно плоское кольцо (гл. I, § 2, упражнение 17). Показать, что $\mathrm{Ass}(A)$ является множеством *изолированных* точек пространства $\mathrm{Spec}(A)$ (заметить, что $\mathrm{Ass}(A)$ является множеством простых идеалов, аннулирующих некоторый идемпотент в A).

б) Вывести из а) пример такого кольца A, что $A \neq 0$ и $\mathrm{Ass}(A) = \varnothing$ (ср. гл. II, § 4, упражнение 17) и для которого не выполняется утверждение следствия 2 из предложения 2 n° 1.

в) Получить из б) пример кольца A и мультипликативной системы S в нем, таких, что отображение $\mathfrak{p} \to S^{-1}\mathfrak{p}$ множества $\mathrm{Ass}(A) \cap \Phi$ в $\mathrm{Ass}(S^{-1}A)$ (n° 2, предложение 5) не сюръективно.

2) Пусть K — поле, A — кольцо нормирования, группа порядков которого равна $\mathbf{Q}$, образованное «формальными рядами» $\sum_r c_r T^r$, где $c_r \in K$, $r \in \mathbf{Q}_+$ и множество тех r, для которых $c_r \neq 0$, вполне упорядочено. Пусть α — иррациональное число $\geqslant 0$, $\mathfrak{a}$ — идеал кольца A, образованный элементами с нормированием $> \alpha$, и C — кольцо $A/\mathfrak{a}$. Тогда $\mathrm{Spec}(C)$ состоит из одной точки $\mathfrak{p}$; для всякого $x \neq 0$ из кольца C произведение $\mathfrak{p}x$ отлично от нуля, но для каждого $\lambda \in \mathfrak{p}$ существует такой $y \neq 0$ из C, что $\lambda y = 0$. В частности, $\mathrm{Ass}(C) = \varnothing$, хотя $\mathrm{Supp}(C) = \mathrm{Spec}(C) = \{\mathfrak{p}\}$.

3) Пусть M — некоторый A-модуль и N — подмодуль в M. Показать, что любой простой идеал $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M/N)$, не содержащий $\mathrm{Ann}(N)$, ассоциирован с M. Привести пример идеала $\mathfrak{p}$, принадлежащего множеству $\mathrm{Ass}(M/N)$, но не принадлежащего множеству $\mathrm{Ass}(M)$ (взять A целостным и $M = A$).

4) Привести пример такого кольца A, что модуль $M = A$ не удовлетворяет утверждению теоремы 1 n° 4 (ср. упражнение 1б)).

5) Пусть $A = K[X, Y]$ — алгебра многочленов от двух переменных над полем K и $\mathfrak{a} = AX + AY$ — максимальный идеал в A. Показать, что $\mathrm{Supp}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Spec}(A)$ — бесконечное множество, но $\mathrm{Ass}(\mathfrak{a}) = \{0\}$. Доказать, что не существует композиционного ряда модуля $\mathfrak{a}$, факторы которого изоморфны A. (Из существования такого ряда следовало бы, что $\mathfrak{a}$ изоморфно модулю типа A^n; отсюда обязательно следовало бы, что $n = 1$, а это уже противоречие.)

¶ 6) Пусть A — кольцо и E — некоторый A-модуль.

а) Показать, что, для того чтобы простой идеал $\mathfrak{p}$ кольца A принадлежал множеству $\mathrm{Supp}(E)$, необходимо и достаточно существование такого подмодуля F модуля E, что $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(E/F)$ (для доказательства необходимости рассмотреть подмодуль F модуля E вида $\mathfrak{p}x$, где $x \in E$; для доказательства достаточности воспользоваться предложением 7 n° 3).

б) Предположнм, что A нётерово и E — модуль конечного типа. Показать, что для всякого простого идеала $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(E)$ существует такой композиционный ряд $(E_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ модуля E, что для $0 \leqslant i \leqslant n-1$ факторы E_i/E_{i+1} изоморфны модулям $A/\mathfrak{p}_i$, где $\mathfrak{p}_i$ — простые идеалы и где один из идеалов $\mathfrak{p}_i$ равен $\mathfrak{p}$.

¶ 7) Пусть A — нётерово кольцо, M — некоторый A-модуль конечного типа и $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}(M)$.

а) Показать, что если идеал $\mathfrak{a}$ прост, то $\mathfrak{a}$ является наименьшим элементом множества $\mathrm{Ass}(M)$. (Заметить, что $\mathfrak{a} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} \mathfrak{p}$.)

б) Показать, что любой простой идеал, ассоциированный с модулем $A/\mathfrak{a}$, ассоциирован и с модулем M. (Заметить, что если $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца A, аннулирующий класс в $A/\mathfrak{a}$ некоторого элемента $\alpha \in A$, то $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(\alpha M)$, и воспользоваться пунктом а).)

в) Пусть $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ — два различных простых идеала кольца A, причем $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$. Показать, что если $M = (A/\mathfrak{p}) \oplus (A/\mathfrak{q})$, то $\mathrm{Ass}(A/\mathfrak{a}) = \mathrm{Ass}(M)$.

8) Пусть A — нётерово кольцо, $\mathfrak{a}$ — идеал в A и M — некоторый A-модуль конечного типа; пусть P — подмодуль модуля M, образованный такими $x \in M$, что $\mathfrak{a}x = 0$. Показать, что $\mathrm{Ass}(M/P) \subset \mathrm{Ass}(M)$ (заметить, что для всякого $x \in M$ аннулятор модуля $(Ax + P)/P$ является аннулятором и $\mathfrak{a}x$, и воспользоваться упражнением 7а)).

9) Пусть A — нётерово кольцо и $\mathfrak{a}$ — идеал из A.

а) Для того чтобы идеал $\mathfrak{b}$ кольца A был таким, что $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} \neq \mathfrak{a}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{b}$ содержался в некотором простом идеале $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A/\mathfrak{a})$.

б) Пусть A — алгебра $K[X, Y, Z]$ многочленов от трех переменных над полем K. Пусть $\mathfrak{n} = AX$, $\mathfrak{m} = AX + AY + AZ$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{m}^2$. Показать, что суще-

ствует простой идеал $\mathfrak{p}$, содержащий $\mathfrak{a}$ и такой, что $\mathfrak{a} : \mathfrak{p} \neq \mathfrak{a}$, но который не является простым идеалом, ассоциированным с кольцом A.

10) а) Привести пример такого $\mathbf{Z}$-модуля M, что $\mathrm{Ass}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, M))$ не содержится в $\mathrm{Supp}(M)$ (ср. гл. II, § 4, упражнение 24в)).

б) Привести пример таких $\mathbf{Z}$-модулей E, F, что

$$\mathrm{Ass}\,(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(E, F)) = \emptyset,$$

но $\mathrm{Ass}(F) \cap \mathrm{Supp}(E) \neq \emptyset$ (взять $F = \mathbf{Z}$).

11) а) Пусть A — нётерово кольцо и E — некоторый A-модуль. Показать, что канонический гомоморфизм модуля E в произведение $\prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\,(E)} E_{\mathfrak{p}}$ инъективен (если N — ядро этого гомоморфизма, то показать, что $\mathrm{Ass}(N) = \emptyset$).

б) Возьмем в качестве A кольцо многочленов $K[X, Y, Z]$ над полем K; пусть $\mathfrak{p}_1 = AX + AY$, $\mathfrak{p}_2 = AX + AZ$ — простые идеалы, $\mathfrak{a}$ — идеал $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$. Множество $\mathrm{Ass}(A/\mathfrak{a})$ образовано идеалами $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ и максимальным идеалом $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$; показать, что канонический гомоморфизм из $E = A/\mathfrak{a}$ в $E_{\mathfrak{p}_1} \times E_{\mathfrak{p}_2}$ не инъективен.

12) Пусть A — нётерово кольцо и P — проективный A-модуль. Показать, что если для каждого $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(P)$ модуль $P_{\mathfrak{p}}$ является $A_{\mathfrak{p}}$-модулем конечного типа, то P также является A-модулем конечного типа (погрузить A в произведение $\prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\,(A)} A_{\mathfrak{p}}$ (упражнение 11) и воспользоваться *Algébre*, chap. II, 3e éd., § 5, n° 5, proposition 9).

¶ 13) Пусть A — нётерово кольцо, E — некоторый A-модуль конечного типа, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ — два таких простых идеала кольца A, что $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, и a — некоторый элемент из $\mathfrak{q}$. Предположим, что $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(E)$ и что гомотетия a_E инъективна. Показать, что существует простой идеал $\mathfrak{n} \in \mathrm{Ass}(E/aE)$, для которого $\mathfrak{p} + Aa \subset \mathfrak{n} \subset \mathfrak{q}$. (Заменив A на $A_{\mathfrak{q}}$, можно предположить, что A — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{q}$. Пусть $F \neq 0$ — подмодуль модуля E, образованный такими x, что $\mathfrak{p}x = 0$. Показать, что из включения $F \subset aE$ следует равенство $F = aF$ и получить отсюда противоречие с леммой Накаямы. Далее воспользоваться предложением 8 n° 4.)

14) Пусть A — целостное кольцо, $a \neq 0$ — элемент из A и $\mathfrak{p}$ — элемент из $\mathrm{Ass}(A/aA)$. Показать, что $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A/bA)$ для всякого элемента $b \neq 0$ из $\mathfrak{p}$ (если $c \in A$ — такой элемент, что включение $xc \in aA$ эквивалентно включению $x \in \mathfrak{p}$, то показать, что существует такой $d \in A$, что $xd \in bA$ эквивалентно $xc \in aA$).

15) Пусть A — нётерово кольцо, E — некоторый A-модуль конечного типа, F — подмодуль в E и $\mathfrak{m}$ — некоторый идеал в A. Для того чтобы подмодуль F был замкнут в E относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{p} + \mathfrak{m} \neq A$ для каждого идеала $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(E/F)$. (Свести к случаю $F = 0$, воспользоваться следствием предложения 5 гл. III, § 3, n° 2, и применить следствие 2 предложения 2 n° 1 к элементу $1 + m$, где $m \in \mathfrak{m}$.)

16) Пусть A — нётерово кольцо. Для того чтобы A было изоморфно произведению конечного числа целостных колец, необходимо и достаточно, чтобы для всякого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A локальное кольцо $A_{\mathfrak{p}}$ было целостным. (Для доказательства достаточности заметить сначала, что из условия следует редуцированность кольца; отсюда получить, что $\{0\} = \bigcap_i \mathfrak{p}_i$, где $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — минимальные простые идеалы кольца A. Показать, что для $i \neq j$ обязательно $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j = A$; для этого заметить, что если бы существовал максимальный идеал $\mathfrak{m}$, содержащий $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j$, то кольцо $A_{\mathfrak{m}}$ не было бы целостным, для чего воспользоваться следствием 3 предложения 2 n° 1 и следствием предложения 5 n° 2.)

¶ 17) [1]) Пусть A — кольцо и M — некоторый A-модуль. Говорят, что простой идеал $\mathfrak{p}$ кольца A *слабо ассоциирован* с модулем M, если существует такой элемент $x \in M$, что $\mathfrak{p}$ представляет собой минимальный элемент множества простых идеалов, содержащих $\mathrm{Ann}(x)$; обозначим через $\mathrm{Ass}_f(M)$ множество идеалов, слабо ассоциированных с M. Тогда $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}_f(M)$.

а) Показать, что соотношение $M \neq 0$ эквивалентно соотношению $\mathrm{Ass}_f(M) \neq \varnothing$.

б) Для того чтобы элемент $a \notin A$ задавал инъективное отображение a_M, необходимо и достаточно, чтобы a не принадлежал ни одному элементу множества $\mathrm{Ass}_f(M)$. (Для доказательства необходимости этого условия рассмотреть кольцо $A/\mathrm{Ann}(x)$ и свести все к доказательству того, что в кольце A любой элемент, принадлежащий некоторому простому идеалу $\mathfrak{p}$, минимальному среди всех простых идеалов в A, обязательно является делителем нуля (гл. II, § 2, п° 6, предложение 12).)

Для того чтобы элемент $a \in A$ определял почти нильпотентное отображение a_M, необходимо и достаточно, чтобы a принадлежал всем элементам множества $\mathrm{Ass}_f(M)$.

в) Если N — подмодуль модуля M, то

$$\mathrm{Ass}_f(N) \subset \mathrm{Ass}_f(M) \subset \mathrm{Ass}_f(N) \cup \mathrm{Ass}_f(M/N).$$

(Заметить, что если $\mathfrak{p}$ — простой идеал, $a \notin \mathfrak{p}$ и $x \in M$, такой, что $ax \in N$ и $\mathrm{Ann}(x) \subset \mathfrak{p}$, то $\mathrm{Ann}(ax) \subset \mathfrak{p}$.)

г) Пусть S — мультипликативная система кольца A, Φ — множество простых идеалов в A, не пересекающих S. Показать, что $\mathfrak{p} \to S^{-1}\mathfrak{p}$ является биективным отображением из $\mathrm{Ass}_f(M) \cap \Phi$ на $\mathrm{Ass}_f(S^{-1}M)$. (Обратить внимание на то, что прообраз относительно отображения $A \to S^{-1}A$ аннулятора некоторого элемента x/s, где $x \in M$, $s \in S$, представляет собой насыщение относительно S модуля $\mathrm{Ann}(x)$.)

д) Пусть S — мультипликативная система кольца A. Показать, что если N — ядро канонического гомоморфизма $M \to S^{-1}M$, то $\mathrm{Ass}_f(N)$ представляет собой множество тех $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_f(M)$, которые пересекают S, и множество $\mathrm{Ass}_f(M/N)$ состоит из тех $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_f(M)$, которые не пересекают S. (Для доказательства последнего пункта рассмотреть простой идеал $\mathfrak{q}$, минимальный в множестве идеалов, содержащих $\mathrm{Ann}(\bar{y})$, где $\bar{y} \in M/N$; заметить, что если $y \in \bar{y}$ и $t \in \mathfrak{q}$, то существует $c \notin \mathfrak{q}$ и целое $n > 0$, такие, что $ct^n y \in N$ (гл. II, § 2, п° 6, предложение 12); отсюда прежде всего вывести, что $\mathfrak{q} \cap S = \varnothing$. Существует такой $s \in S$, что $sct^n y = 0$; установить на основе этого, что не может быть такого простого идеала $\mathfrak{q}' \neq \mathfrak{q}$, что $\mathrm{Ann}(y) \subset \mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}$.)

е) Для того чтобы некоторый простой идеал кольца A принадлежал множеству $\mathrm{Supp}(M)$, необходимо и достаточно, чтобы он содержал некоторый элемент из $\mathrm{Ass}_f(M)$.

ж) Показать, что если кольцо A нётерово, то $\mathrm{Ass}_f(M) = \mathrm{Ass}(M)$.

з) Если A — абсолютно плоское кольцо, то $\mathrm{Ass}_f(A) = \mathrm{Spec}(A)$.

и) Для всякого A-модуля E канонический гомоморфизм из E в произведение $\prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_f(E)} E_{\mathfrak{p}}$ инъективен. Другими словами, пересечение насыщений подмодуля $\{0\}$ в E относительно идеалов $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_f(E)$ равно нулю. Обобщить аналогичным образом упражнение 12.

к) Пусть M — некоторый A-модуль конечного типа. Показать, что минимальные элементы множества простых идеалов, содержащих $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}(M)$, принадлежат $\mathrm{Ass}_f(M)$ (если $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — система образующих модуля M, то

---

[1]) Доказательства утверждений, содержащихся в этом упражнении, можно найти в статье Merker J., Ideaux faiblement associés. *Bull. Soc. Math. France.* **93** (1969), № 1—2, 15—21. — *Прим. ред.*

показать, что такой идеал содержит один из $\mathrm{Ann}(x_i)$). Вывести отсюда, что множество $\mathrm{Ass}_f(A/\mathfrak{a})$ содержится в $\mathrm{Ass}_f(M)$ (если простой идеал $\mathfrak{p}$ содержит аннулятор класса $\mathrm{mod}\,\mathfrak{a}$ некоторого элемента $\alpha \in A$, то заметить, что $\mathfrak{p}$ содержит и аннулятор подмодуля αM в M). Показать, что $\mathrm{Ass}_f(A/\mathfrak{a})$, $\mathrm{Ass}_f(M)$ и множество простых идеалов, содержащих $\mathfrak{a}$, имеют одни и те же минимальные элементы.

18) Пусть A — кольцо и M — некоторый A-модуль. Для того чтобы элемент $c \in A$ обладал тем свойством, что для всякого элемента $a \in A$, которому соответствует инъективная гомотетия a_M, гомотетия b_M для любого элемента b вида $a + \lambda c$, где $\lambda \in A$, также была инъективной, достаточно, чтобы c принадлежал пересечению максимальных элементов множества $\mathrm{Ass}_f(M)$ (воспользоваться упражнением 17б). Необходимо ли это условие?

19) Пусть A — кольцо нормирования ранга 2, Γ — группа порядков, Γ_1 — единственная изолированная подгруппа в Γ, отличная от Γ и от $\{0\}$, и $\gamma > 0$ — некоторый элемент из Γ, не принадлежащий Γ_1. Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал таких элементов $x \in A$, что $v(x) \geqslant \gamma$, и $\mathfrak{b}$ — идеал таких $x \in A$, что $v(x) > \gamma$; пусть $E = A/\mathfrak{a}$, $F = A/\mathfrak{b}$. Показать, что множество $\mathrm{Ass}_f(\mathrm{Hom}_A(E, F))$ отличается от множества $\mathrm{Ass}_f(F) \cap \mathrm{Supp}(E)$.

§ 2. Примарное разложение

1. Примарные подмодули

Предложение 1. *Пусть A — нётерово кольцо и M — некоторый A-модуль.*

Следующие условия эквивалентны:

а) *множество $\mathrm{Ass}(M)$ состоит из одного элемента;*

б) *модуль M отличен от нуля и любая гомотетия модуля M или инъективна, или почти нильпотентна* (§ 1, n° 4).

Если эти условия выполнены и $\mathfrak{p}$ является множеством таких $a \in A$, что гомотетии a_M почти нильпотентны, то $\mathrm{Ass}(M) = \{\mathfrak{p}\}$.

Это немедленно вытекает из следствия предложения 9 § 1, n° 4, и следствия 2 предложения 2 n° 1.

Определение 1. *Пусть A — нётерово кольцо, N — некоторый A-модуль и Q — подмодуль в N. Если модуль $M = N/Q$ удовлетворяет условиям предложения* 1, *то говорят, что модуль Q $\mathfrak{p}$-примарен относительно N* (или *в модуле N*).

Когда не может возникнуть путаницы, говорят просто, что Q $\mathfrak{p}$-примарен или примарен; ясно, что для любого подмодуля $N' = Q$ модуля N, содержащего Q, модуль Q $\mathfrak{p}$-примарен в N'.

Определение 1 применимо, в частности, к случаю $N = A$; в этой ситуации подмодули модуля N представляют собой *идеалы* кольца A, и, следовательно, говорят, что идеал $\mathfrak{q}$ в A *примарен*, если $\mathrm{Ass}(A/\mathfrak{q})$ состоит из одного элемента или, что то же самое, если $A \neq \mathfrak{q}$ и любой делитель нуля кольца $A/\mathfrak{q}$ *нильпотентен*. Если идеал $\mathfrak{q}$ $\mathfrak{p}$-примарен, то из определения 1 следует, что $\mathfrak{p}$ является *корнем* этого идеала (гл. II, § 2, n° 6).

Замечание. Пусть Q — некоторый $\mathfrak{p}$-примарный подмодуль A-модуля N. Если N/Q — модуль *конечного типа*, то существует такое целое $k>0$, что $\mathfrak{p}^k N \subset Q$, в силу предложения 9 § 1, n° 4.

Примеры. 1) Если $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца A, то $\mathfrak{p}$ является $\mathfrak{p}$-примарным (§ 1, n° 1, предложение 1).

2) Пусть $\mathfrak{q}$ — такой идеал кольца A, что существует *единственный* простой идеал $\mathfrak{m}$ (обязательно максимальный), содержащий $\mathfrak{q}$. Тогда если M — такой A-модуль, что $\mathfrak{q}M \neq M$, то $\mathfrak{q}M$ будет $\mathfrak{m}$-*примарен* относительно M. Действительно, любой элемент из $\mathrm{Ass}(M/\mathfrak{q}M)$ содержит $\mathfrak{q}$, а потому он равен $\mathfrak{m}$ и $\mathrm{Ass}(M/\mathfrak{q}M) \neq \varnothing$ (§ 1, n° 1, следствие 1 предложения 2). В частности, $\mathfrak{q}$ является $\mathfrak{m}$-*примарным* идеалом в A.

3) Пусть $\mathfrak{m}$ — *максимальный* идеал кольца A; тогда $\mathfrak{m}$-примарные идеалы — это те идеалы $\mathfrak{q}$ кольца A, для которых существует целое число $n \geqslant 1$ со следующим свойством: $\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$. Действительно, если $\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$, то $\mathfrak{m}$ — единственный простой идеал, содержащий $\mathfrak{q}$ (гл. II, § 1, n° 1, следствие предложения 1) и утверждение следует из примера 2. Обратно, если идеал $\mathfrak{q}$ является $\mathfrak{m}$-примарным, то $\mathfrak{m}$ — корень идеала $\mathfrak{q}$ и, следовательно, существует такое $n \geqslant 1$, что $\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{q}$ (гл. II, § 2, n° 6, предложение 15).

4) В кольце *главных идеалов* A примарные идеалы исчерпываются идеалом (0) и идеалами вида Ap^n, где p — экстремальный элемент и $n \geqslant 1$; это немедленно вытекает из примера 3.

5) Степени произвольного простого идеала не обязаны быть примарными (упражнение 1). С другой стороны, существуют примарные идеалы, которые не являются степенью простого (упражнение 1).

Предложение 2. *Пусть M — модуль над нётеровым кольцом A, $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A и $(Q_i)_{i\in I}$ — непустое конечное семейство подмодулей модуля M, являющихся $\mathfrak{p}$-примарными относительно M. Тогда подмодуль $\bigcap_{i\in I} Q_i$ является $\mathfrak{p}$-примарным относительно M.*

Действительно, модуль $M\Big/\Big(\bigcap_{i\in I} Q_i\Big)$ изоморфен ненулевому подмодулю прямой суммы $\bigoplus_{i\in I}(M/Q_i)$. Но

$$\mathrm{Ass}\Big(\bigoplus_{i\in I}(M/Q_i)\Big) = \bigcup_{i\in I}\mathrm{Ass}(M/Q_i) = \{\mathfrak{p}\}$$

(§ 1, n° 1, следствие 1 предложения 3). Следовательно, $\mathrm{Ass}\left(M\middle/\left(\bigcap_{i\in I} Q_i\right)\right)=\{\mathfrak{p}\}$ (§ 1, n° 1, предложение 3 и следствие 1 предложения 2).

Предложение 3. *Пусть A — нётерово кольцо, S — мультипликативная система в A, $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A, M — некоторый A-модуль, N — подмодуль в M и $i=i_M^S$ — каноническое отображение модуля M в модуль частных $S^{-1}M$.*

(i) *Предположим, что $\mathfrak{p}\cap S\neq\varnothing$. Если N $\mathfrak{p}$-примарен относительно M, то $S^{-1}N=S^{-1}M$.*

(ii) *Предположим, что $\mathfrak{p}\cap S=\varnothing$. Для того чтобы N был $\mathfrak{p}$-примарен относительно M, необходимо и достаточно, чтобы N был модулем вида $i^{-1}(N')$, где N' — некоторый $(S^{-1}A)$-подмодуль модуля $S^{-1}M$, являющийся $(S^{-1}\mathfrak{p})$-примарным относительно $S^{-1}M$; тогда $N'=S^{-1}N$.*

(i) Если $\mathfrak{p}\cap S\neq\varnothing$ и если N $\mathfrak{p}$-примарен относительно M, то $\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}(M/N))=\varnothing$ (§ 1, n° 2, следствие предложения 5), так что $S^{-1}(M/N)=0$ (§ 1, n° 1, следствие 1 предложения 2), откуда $S^{-1}M/S^{-1}N=0$.

(ii) Предположим, что $\mathfrak{p}\cap S=\varnothing$. Если модуль N $\mathfrak{p}$-примарен относительно M, то $\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}(M/N))=\{S^{-1}\mathfrak{p}\}$ (§ 1, n° 2, следствие предложения 5), так что подмодуль $N'=S^{-1}N$ модуля $S^{-1}M$ является $(S^{-1}\mathfrak{p})$-примарным; кроме того, если $s\in S$ и $m\in M$ — такие элементы, что $sm\in N$, то $m\in N$, ибо гомотетия модуля M/N, соответствующая элементу s, инъективна; отсюда $N=i^{-1}(N')$ (гл. II, § 2, n° 4, предложение 10). Обратно, пусть N' — подмодуль модуля $S^{-1}M$, являющийся $(S^{-1}\mathfrak{p})$-примарным относительно $S^{-1}M$; положим $N=i^{-1}(N')$; тогда $N'=S^{-1}N$ (гл. II, § 2, n° 4, предложение 10) и $\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}(M/N))=\mathrm{Ass}_{S^{-1}A}((S^{-1}M)/N'=\{S'\mathfrak{p}\}$. Поскольку каноническое отображение $M/N\to S^{-1}(M/N)$ инъективно, любой простой идеал кольца A, ассоциированный с модулем M/N, не пересекает S (§ 1, n° 2, предложение 6); отсюда получается, что $\mathrm{Ass}(M/N)=\{\mathfrak{p}\}$ (§ 1, n° 2, следствие из предложения 5), так что модуль N является $\mathfrak{p}$-примарным относительно M.

2. Существование примарного разложения

Определение 2. *Пусть A — нётерово кольцо, M — некоторый A-модуль и N — подмодуль в M. Примарным разложением подмодуля N в модуле M называется конечное семейство $(Q_i)_{i\in I}$ подмодулей модуля M, примарных относительно M и таких, что $N=\bigcap_{i\in I} Q_i$.*

Пример. Возьмем $A=\mathbf{Z}$, $M=\mathbf{Z}$, $N=n\mathbf{Z}$ для некоторого целого $n>0$. Если $n=p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$ — разложение числа n на простые множители, то $n\mathbf{Z}=\left(p_1^{\alpha_1}\mathbf{Z}\right)\cap\dots\cap\left(p_k^{\alpha_k}\mathbf{Z}\right)$ — примарное разложение подмодуля $n\mathbf{Z}$ в модуле $\mathbf{Z}$ в соответствии с примером 4 n° 1.

Краткости ради говорят, что соотношение $N=\bigcap_{i\in I}Q_i$ есть примарное разложение подмодуля N в модуле M. Равносильное утверждение состоит в том, что $\{0\}=\bigcap_{i\in I}(Q_i/N)$ есть примарное разложение $\{0\}$ в модуле M/N. Если $(Q_i)_{i\in I}$ — примарное разложение модуля N в M, то каноническое отображение из M/N в $\bigoplus_{i\in I}(M/Q_i)$ инъективно. Обратно, пусть N — подмодуль в M и f — инъективный гомоморфизм модуля M/N в некоторую конечную прямую сумму $P=\bigoplus_{i\in I}P_i$, где каждое множество $\mathrm{Ass}(P_i)$ состоит из одного элемента $\mathfrak{p}_i$; пусть f_i — гомоморфизм $M/N\to P_i$, полученный как композиция f и проекции $P\to P_i$, и пусть Q_i/N — ядро гомоморфизма f_i; тогда подмодули Q_i, отличные от M, примарны относительно M (n° 1, определение 1) и $N=\bigcap_{i\in I}Q_i$. Кроме того, $\mathrm{Ass}(M/N)\subset\bigcup_{i\in I}\{\mathfrak{p}_i\}$ в силу предложения 3 § 1, n° 1.

Теорема 1. *Пусть M — модуль конечного типа над нётеровым кольцом, и пусть N — подмодуль в M. Тогда существует примарное разложение модуля N в модуле M, имеющее вид*

$$N=\bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M/N)}Q(\mathfrak{p}), \tag{1}$$

где для каждого $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M/N)$ модуль $Q(\mathfrak{p})$ является $\mathfrak{p}$-примарным относительно M.

Можно считать, что $N=0$, так как при необходимости M заменяется на M/N. В силу следствия теоремы 2 § 1, n° 4, множество $\mathrm{Ass}(M)$ конечно; в силу предложения 4 § 1, n° 1, для каждого $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M)$ существует такой подмодуль $Q(\mathfrak{p})$ модуля M, что $\mathrm{Ass}(M/Q(\mathfrak{p}))=\{\mathfrak{p}\}$ и $\mathrm{Ass}(Q(\mathfrak{p}))=\mathrm{Ass}(M)-\{\mathfrak{p}\}$. Положим $P=\bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M)}Q(\mathfrak{p})$. Для произвольного $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M)$ имеет место включение $\mathrm{Ass}(P)\subset\mathrm{Ass}(Q(\mathfrak{p}))$; следовательно, $\mathrm{Ass}(P)=\varnothing$, откуда $P=0$ (§ 1, n° 1, следствие 1 предложения 2), и теорема, таким образом, доказана.

3. Свойства единственности в примарном разложении

Определение 3. *Пусть M — модуль над нётеровым кольцом и N — подмодуль в M. Говорят, что примарное разложение*

$N = \bigcap_{i \in I} Q_i$ *подмодуля* N *в модуле* M *является редуцированным, если выполняются следующие условия*:

а) *не существует индекса* $i \in I$, *для которого* $\bigcap_{j \neq i} Q_j \subset Q_i$;

б) *если* $\mathrm{Ass}(M/Q_i) = \{\mathfrak{p}_i\}$, *то идеалы* $\mathfrak{p}_i (i \in I)$ *попарно различны.*

Из любого примарного разложения $N = \bigcap_{i \in I} Q_i$ подмодуля N в M следующим способом можно получить *редуцированное* примарное разложение: пусть J — минимальный элемент множества таких подмножеств I' множества I, что $N = \bigcap_{i \in I'} Q_i$. Ясно, что семейство $(Q_i)_{i \in J}$ удовлетворяет условию а). Пусть, далее, Φ — множество идеалов $\mathfrak{p}_i$ для $i \in J$; для любого $\mathfrak{p} \in \Phi$ пусть $H(\mathfrak{p})$ обозначает множество $i \in J$, таких, что $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}$, и пусть $Q(\mathfrak{p}) = \bigcap_{i \in H(\mathfrak{p})} Q_i$. Из предложения 2 n° 1 следует, что $Q(\mathfrak{p})$ является $\mathfrak{p}$-примарным модулем относительно M. Кроме того, $N = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \Phi} Q(\mathfrak{p})$ и, следовательно, семейство $(Q(\mathfrak{p}))_{\mathfrak{p} \in \Phi}$ есть редуцированное примарное разложение подмодуля N в M.

Мы сейчас увидим, что примарное разложение, определенное в теореме 1 n° 2, *редуцировано*; это получится из следующего предложения:

Предложение 4. *Пусть* M — *модуль над нётеровым кольцом,* N — *подмодуль в* M, $N = \bigcap_{i \in I} Q_i$ — *примарное разложение* N *в* M, *и для любого* $i \in I$ *пусть* $\{\mathfrak{p}_i\} = \mathrm{Ass}(M/Q_i)$. *Для того чтобы это разложение было редуцированным, необходимо и достаточно, чтобы идеалы* $\mathfrak{p}_i$ *были попарно различны и принадлежали множеству* $\mathrm{Ass}(M/N)$. *В этом случае имеют место равенства*

$$\mathrm{Ass}(M/N) = \bigcup_{i \in I} \{\mathfrak{p}_i\}, \tag{2}$$

$$\mathrm{Ass}(Q_i/N) = \bigcup_{j \neq i} \{\mathfrak{p}_j\} \text{ для каждого } i \in I. \tag{3}$$

Если выполнено сформулированное условие, то не может выполняться равенство $N = \bigcap_{j \neq i} Q_j$, так как из него следовало бы, что $\mathrm{Ass}(M/N) \subset \bigcup_{j \neq i} \{\mathfrak{p}_j\}$ (§ 1, n° 1, следствие 2 предложения 3), а это противоречит условию; следовательно, примарное разложение $(Q_i)_{i \in I}$ модуля N редуцировано. Обратно,

всегда имеет место включение $\mathrm{Ass}(M/N) \subset \bigcup_{i \in I} \{\mathfrak{p}_i\}$ (§ 1, n° 1, следствие 2 предложения 3); с другой стороны, для всякого $i \in I$ положим $P_i = \bigcap_{j \neq i} Q_j$; в этих обозначениях $P_i \cap Q_i = N$ и $P_i \neq N$, если разложение $(Q_i)_{i \in I}$ редуцировано; следовательно, модуль P_i/N отличен от нуля и изоморфен подмодулю $(P_i + Q_i)/Q_i$ модуля M/Q_i, откуда $\{\mathfrak{p}_i\} = \mathrm{Ass}(P_i/N)$ (§ 1, n° 1, предложение 3 и следствие 1 предложения 2). Поскольку $P_i/N \subset M/N$, имеет место включение $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Ass}(M/N)$, чем и завершается доказательство необходимости рассматриваемого условия и формулы (2). Наконец, так как $N = \bigcap_{j \neq i} (Q_j \cap Q_i)$, то $\mathrm{Ass}(Q_i/N) \subset \bigcup_{j \neq i} \mathrm{Ass}(Q_i/(Q_j \cap Q_i))$ (§ 1, n° 1, следствие 2 предложения 3). Но модуль $Q_i/(Q_j \cap Q_i)$ изоморфен подмодулю $(Q_i + Q_j)/Q_j$ модуля M/Q_j. Следовательно, $\mathrm{Ass}(Q_i/(Q_j \cap Q_i)) \subset \subset \{\mathfrak{p}_j\}$ и $\mathrm{Ass}(Q_i/N) \subset \bigcup_{j \neq i} \{\mathfrak{p}_j\}$; с учетом формулы (2) и предложения 3 § 1, n° 1, мы получаем формулу (3).

Следствие. *Пусть A — нётерово кольцо, M — некоторый A-модуль, N — подмодуль в M и $(Q_i)_{i \in I}$ — примарное разложение подмодуля N в M. Тогда* $\mathrm{Card}(I) \geqslant \mathrm{Card}(\mathrm{Ass}(M/N))$; *для того чтобы $(Q_i)_{i \in I}$ было редуцированным примарным разложением, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathrm{Card}(I) = \mathrm{Card}(\mathrm{Ass}(M/N))$.

Из замечаний, предшествующих предложению 4, следует, что существует редуцированное примарное разложение $(R_j)_{j \in J}$ подмодуля N в модуле M, такое, что $\mathrm{Card}(J) \leqslant \mathrm{Card}(I)$. Таким образом, первое утверждение вытекает из второго, а второе является следствием предложения 4.

Предложение 5. *Пусть A — нётерово кольцо, M — некоторый A-модуль, N — подмодуль в M, $N = \bigcap_{i \in I} Q_i$ — редуцированное примарное разложение N в M, и для каждого $i \in I$ пусть $\{\mathfrak{p}_i\} = \mathrm{Ass}(M/Q_i)$. Если $\mathfrak{p}_i$ — минимальный элемент множества* $\mathrm{Ass}(M/N)$, *то модуль Q_i равен насыщению подмодуля N относительно $\mathfrak{p}_i$* (гл. II, § 2, n° 4) (ср. упражнение 2).

Очевидно, можно ограничиться случаем $N = 0$, заменяя при необходимости M на M/N. Если $\mathfrak{p}_i$ — минимальный элемент множества $\mathrm{Ass}(M)$, то множество тех элементов из $\mathrm{Ass}(M)$, которые не пересекают множество $A - \mathfrak{p}_i$, состоит только из идеала $\mathfrak{p}_i$. Данное предложение вытекает теперь из выведенной выше формулы (3) и из предложения 6 § 1, n° 2, так как ядро

канонического отображения $M \to M_{\mathfrak{p}_i}$ равно насыщению 0 относительно $\mathfrak{p}_i$ (гл. II, § 2, n° 4).

Замечание. Простые идеалы $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Ass}(M/N)$, не являющиеся минимальными в этом множестве, иногда называют *вложенными* простыми идеалами, ассоциированными с модулем M/N; когда M/N — модуль конечного типа, идеал $\mathfrak{p}_0 \in \mathrm{Ass}(M/N)$ является вложенным, если и только если множество $V(\mathfrak{p}_0)$ *не является* неприводимой компонентой пространства $\mathrm{Supp}(M/N)$ (гл. II, § 4, n° 3, следствие 2 предложения 14); если $(Q(\mathfrak{p}))_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M/N)}$ и $(Q'(\mathfrak{p}))_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M/N)}$ — два редуцированных примарных разложения подмодуля N в M, то можно сделать так, чтобы $Q'(\mathfrak{p}_0) \neq Q(\mathfrak{p}_0)$ (упражнение 24в)). Однако можно определить *каноническое* редуцированное примарное разложение подмодуля N в M, наложив дополнительные условия на участвующие в нем примарные подмодули (упражнение 4).

4. *Локализация примарного разложения*

Пусть задан подмодуль N в модуле M над нётеровым кольцом A; для упрощения мы будем обозначать через $D_I(M/N)$ в этом n° множество редуцированных примарных разложений подмодуля N в модуле M, множеством индексов для которых служит I (равномощное $\mathrm{Ass}(M/N)$).

Предложение 6. *Пусть A — нётерово кольцо, M — некоторый A-модуль, N — подмодуль в M и $I = \mathrm{Ass}(M/N)$. Пусть S — мультипликативная система в A, J — подмножество множества I, образованное такими индексами i, что $S \cap \mathfrak{p}_i = \varnothing$. Пусть N' — насыщение модуля N относительно S в модуле M. Тогда*

(i) *если $(Q_i)_{i \in I}$ — некоторый элемент из $D_I(M/N)$, то семейство $(Q_i)_{i \in J}$ является элементом множества $D_J(M/N')$, а семейство $(S^{-1}Q_i)_{i \in J}$ — элемент множества $D_J(S^{-1}M/S^{-1}N)$;*

(ii) *отображение $(Q_i)_{i \in J} \to (S^{-1}Q)_{i \in J}$ множества $D_J(M/N')$ на множество $D_J(S^{-1}M/S^{-1}N)$ биективно;*

(iii) *если $(Q_i)_{i \in J}$ — элемент множества $D_J(M/N')$ и $(R_i)_{i \in I}$ — элемент множества $D_I(M/N)$, то семейство $(T_i)_{i \in I}$, в котором $T_i = Q_i$ при $i \in J$ и $T_i = R_i$ при $i \in I - J$, является элементом из $D_I(M/N)$.*

(i) Известно (n° 1, предложение 3), что для $i \in J$ модуль $S^{-1}Q_i$ примарен относительно $S^{-1}\mathfrak{p}_i$ и что для $i \in I - J$ имеет место равенство $S^{-1}Q_i = S^{-1}M$. Так как $S^{-1}N = \bigcap_{i \in J} S^{-1}Q_i$ (гл. II, § 2, n° 4), выполняется также равенство $S^{-1}N = \bigcap_{i \in J} S^{-1}Q_i$. Идеалы $S^{-1}\mathfrak{p}_i$

при $i \in J$ попарно различны и составляют множество $\mathrm{Ass}(S^{-1}M/S^{-1}N)$ (§ 1, п° 2, следствие предложения 5); следовательно (предложение 4), $(S^{-1}Q_i)_{i\in J}$ представляет собой редуцированное примарное разложение модуля $S^{-1}N$. Кроме того, $Q_i = (i_M^S)^{-1}(S^{-1}Q_i)$ (п° 1, предложение 3), так что $N' = (i_M^S)^{-1}(S^{-1}N) = \bigcap_{i\in J} Q_i$ и семейство $(Q_i)_{i\in J}$ является, очевидно, редуцированным примарным разложением подмодуля N' в модуле M.

(ii) Поскольку $S^{-1}N' = S^{-1}N$, можно заменить N на N', т. е. предположить, что $J = I$. Пусть $(P_i)_{i\in I}$ — редуцированное примарное разложение подмодуля $S^{-1}N$ в модуле $S^{-1}M$, и положим $Q_i = (i_M^S)^{-1}(P_i)$. Из предложения 3 п° 1 следует, что модуль Q_i примарен относительно $\mathfrak{p}_i$ $(i \in I)$ и, следовательно, семейство $(Q_i)_{i\in I}$ является редуцированным примарным разложением подмодуля N в M, согласно следствию предложения 4 п° 3. Наконец, поскольку для любого индекса $i \in I$ и любого подмодуля Q_i' модуля M, являющегося $\mathfrak{p}_i$-примарным относительно M, в силу предложения 3 п° 1, а также условия $J = I$, выполняется равенство $Q_i' = (i_M^S)(S^{-1}Q_i')$, мы видим, что определены два отображения $D_I(M/N) \to D_I(S^{-1}M/S^{-1}N)$ и $D_I(S^{-1}M/S^{-1}N) \to D_I(M/N)$, композиции которых являются тождественными отображениями на $D_I(M/N)$ и $D_I(S^{-1}M/S^{-1}N)$, чем и доказано утверждение (ii).

(iii) В силу утверждения (i) имеет место равенство $N' = \bigcap_{i\in J} R_i$, откуда $N = N' \cap \bigcap_{i\in I-J} R_i = \Big(\bigcap_{i\in J} Q_i\Big) \cap \Big(\bigcap_{i\in I-J} R_i\Big)$, и из следствия предложения 4 п° 3 немедленно вытекает, что это разложение примарно и редуцировано.

Следствие. *Отображения* $D_I(M/N) \to D_J(M/N')$ *и* $D_I(M/N) \to D_J(S^{-1}M/S^{-1}N)$, *определенные в предложении* 6 (i), *сюръективны.*

Действительно, предложение 6 (iii) показывает, что отображение $D_I(M/N) \to D_J(M/N')$ сюръективно, а предложение 6 (ii),— что сюръективно отображение $D_I(M/N) \to D_J(S^{-1}M/S^{-1}N)$.

5. *Кольца и модули конечной длины*

Если A-модуль M имеет конечную длину, то мы будем ее обозначать через $\mathrm{long}_A(M)$ или через $\mathrm{long}(M)$. Напомним, что всякое артиново кольцо нётерово (*Алгебра*, гл. VIII, § 6, п° 5,

следствие 3 предложения 12) и что любой модуль конечного типа над артиновым кольцом имеет конечную длину (*там же*, следствие 1 предложения 12). Кроме того, всякое целостное артиново кольцо является полем (*Алгебра*, гл. VIII, § 6, n° 4, предложение 9).

Предложение 7. *Пусть M — модуль конечного типа над нётеровым кольцом A. Следующие свойства эквивалентны:*

а) *M — модуль конечной длины;*

б) *любой идеал $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ является максимальным идеалом кольца A;*

в) *любой идеал $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$ является максимальным идеалом в A.*

Пусть $(M_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ — такой композиционный ряд модуля M, что для $0 \leqslant i \leqslant n-1$ модуль M_i/M_{i+1} изоморфен $A/\mathfrak{p}_i$, где $\mathfrak{p}_i$ — простой идеал (§ 1, n° 4, теорема 1). Если M — модуль конечной длины, то таким же будет и каждый из A-модулей $A/\mathfrak{p}_i$, откуда следует, что каждое из колец $A/\mathfrak{p}_i$ артиново. Но так как кольцо $A/\mathfrak{p}_i$ *целостное, то оно является полем, другими словами*, $\mathfrak{p}_i$ — максимальный идеал. Следовательно, из а) вытекает б) (§ 1, n° 4, теорема 2). Из б) следует в) в силу предложения 7 § 1, n° 3. Наконец, если все идеалы из $\mathrm{Supp}(M)$ максимальны, то максимален и идеал $\mathfrak{p}_i$ (§ 1, n° 4, теорема 2); следовательно, $A/\mathfrak{p}_i$ — простые A-модули и M — модуль конечной длины. Доказательство окончено.

Следствие 1. *Для модуля конечной длины M над нётеровым кольцом A имеет место равенство* $\mathrm{Ass}(M) = \mathrm{Supp}(M)$.

Действительно, любой элемент из $\mathrm{Supp}(M)$ в этом случае минимален в $\mathrm{Supp}(M)$ и утверждение следует из следствия 1 предложения 7 § 1, n° 3.

Следствие 2. *Пусть M — модуль конечного типа над нётеровым кольцом A и $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A. Для того чтобы $M_\mathfrak{p}$ был $A_\mathfrak{p}$-модулем конечной длины, отличным от нуля, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{p}$ был минимальным элементом в* $\mathrm{Ass}(M)$.

В силу следствия предложения 5 § 1, n° 2, множество $\mathrm{Ass}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ состоит из идеалов $\mathfrak{q}_\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{q}$ пробегает множество идеалов из $\mathrm{Ass}(M)$, содержащихся в $\mathfrak{p}$. С другой стороны, $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ — единственный максимальный идеал в $A_\mathfrak{p}$; в силу предложения 7, для того чтобы $M_\mathfrak{p}$ был $A_\mathfrak{p}$-модулем конечной длины, необходимо и достаточно, чтобы ни один элемент из $\mathrm{Ass}(M)$ не был строго содержащимся в $\mathfrak{p}$. С другой стороны, для того чтобы

$M_{\mathfrak{p}} \neq 0$, необходимо и достаточно, согласно определению, чтобы $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$ (гл. II, § 4, n° 4), т. е. чтобы $\mathfrak{p}$ содержал некоторый элемент из $\mathrm{Ass}(M)$ (§ 1, n° 3, предложение 7). Этим следствие доказано.

Замечание. 1) Пусть M — модуль конечного типа над нётеровым кольцом A; пусть $(M_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ — такой композиционный ряд модуля M, что при $0 \leqslant i \leqslant n-1$ фактор M_i/M_{i+1} изоморфен $A/\mathfrak{p}_i$, где $\mathfrak{p}_i$ — простой идеал из A (§ 1, n° 4, теорема 1). Если $\mathfrak{p}$ — миннимальный элемент из $\mathrm{Ass}(M)$, то длина $\mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ равна *числу таких индексов* i, *что* $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}$. Действительно, модули $(M_i)_{\mathfrak{p}}$ образуют композиционный ряд модуля $M_{\mathfrak{p}}$ и модуль $(M_i)_{\mathfrak{p}}/(M_{i+1})_{\mathfrak{p}}$ изоморфен $(A/\mathfrak{p}_i)_{\mathfrak{p}}$, следовательно, каждый такой фактор изоморфен $\{0\}$, если $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}$ (так как $\mathfrak{p}$ минимален в множестве идеалов $\mathfrak{p}_i$ в силу § 1, n° 4, теорема 2), или кольцу $(A/\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}}$, являющемуся полем, если $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}$.

Предложение 8. *Пусть* M *— модуль конечной длины над нётеровым кольцом* A.

(i) *Существует только одно примарное разложение модуля* $\{0\}$ *относительно модуля* M, *индексированное элементами из* $\mathrm{Ass}(M)$ (*оно обязательно редуцировано*); *пусть* $\{0\} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} Q(\mathfrak{p})$ — *это разложение, где* $Q(\mathfrak{p})$ *является* $\mathfrak{p}$*-примарным относительно* M.

(ii) *Существует такое целое число* n_0, *что для любого* $n \geqslant n_0$ *и любого* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ *имеет место равенство* $Q(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^n M$.

(iii) *Для любого идеала* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ *каноническое отображение из* M *в* $M_{\mathfrak{p}}$ *сюръективно и его ядро равно* $Q(\mathfrak{p})$.

(iv) *Каноническое вложение модуля* M *в прямую сумму* $\bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} (M/Q(\mathfrak{p}))$ *биективно.*

Поскольку всякий элемент $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ минимален в $\mathrm{Ass}(M)$ (предложение 7), утверждение (i) вытекает из предложения 5 n° 3. Так как M — модуль конечного типа, существует такое число n_0, что $\mathfrak{p}^n M \subset Q(\mathfrak{p})$ при любом $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ и любом $n \geqslant n_0$ (n° 1, замечание); но так как $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал, модуль $\mathfrak{p}^n M$ будет $\mathfrak{p}$-примарным относительно M (n° 1, примеры 2 и 3) и, поскольку $\bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} \mathfrak{p}^n M = \{0\}$, из утверждения (i) следует, что $\mathfrak{p}^n M = Q(\mathfrak{p})$ для любого $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$; отсюда следует (ii). Так как $\mathfrak{p}^n$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, попарно взаимно просты (гл. II, § 1, n° 2, предложение 3), каноническое отображение $M \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} (M/\mathfrak{p}^n M)$ сюръективно (гл. II, § 1, n° 2, предложение 6), откуда получается (iv). Мы знаем, что $\mathrm{Ass}(Q(\mathfrak{p})) = \mathrm{Ass}(M) - \{\mathfrak{p}\}$ и $\mathrm{Ass}(M/Q(\mathfrak{p})) = \{\mathfrak{p}\}$ (n° 3, предложение 4); поскольку элементы множества $\mathrm{Ass}(M)$ являются максимальными идеалами, идеал $\mathfrak{p}$ — единственный элемент в $\mathrm{Ass}(M)$, не пере-

секающийся с $A - \mathfrak{p}$, следовательно, $Q(\mathfrak{p})$ — ядро канонического отображения j: $M \to M_{\mathfrak{p}}$ (§ 1, n° 2, предложение 6). Если $s \in A - \mathfrak{p}$, то гомотетия модуля $M/Q(\mathfrak{p})$, соответствующая элементу s, инъективна в силу соотношения $\mathrm{Ass}(M/Q(\mathfrak{p})) = \{\mathfrak{p}\}$ (n° 1, предложение 1). Так как $M/Q(\mathfrak{p})$ — артинов модуль, эта гомотетия биективна (*Алгебра*, гл. VIII, § 2, n° 2, лемма 3). Каноническое отображение $M \to M/Q(\mathfrak{p})$ записывается, следовательно, в виде $f \circ j$, где $f: M_{\mathfrak{p}} \to M/Q(\mathfrak{p})$ — некоторый A-гомоморфизм (гл. II, § 2, n° 2, предложение 3); поскольку $\mathrm{Ker}(j) = \mathrm{Ker}(f \circ j) = Q(\mathfrak{p})$, гомоморфизм f инъективен; отсюда следует, что гомоморфизм j сюръективен, а f биективен.

Следствие. *Если M — модуль конечной длины над нётеровым кольцом A, то*

$$\mathrm{long}_A(M) = \sum_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} \mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}). \tag{4}$$

Это вытекает из предложения 8 (iv), если только доказать, что $\mathrm{long}_A(M/Q(\mathfrak{p})) = \mathrm{long}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$. Но из предложения 1 n° 1 следует, что для всякого $s \in A - \mathfrak{p}$ гомотетия модуля $M/Q(\mathfrak{p})$, соответствующая элементу s, инъективна; гомотетия, соответствующая s, любого подмодуля R модуля $M/Q(\mathfrak{p})$, следовательно, также инъективна, и поскольку R — артинов модуль, то эта гомотетия биективна (*Алгебра*, гл. VIII, § 2, n° 2, лемма 3). Отсюда мы заключаем, что A-подмодули модуля $M/Q(\mathfrak{p})$ являются образами $A_{\mathfrak{p}}$-подмодулей модуля $M_{\mathfrak{p}}$ при биективном отображении f: $M_{\mathfrak{p}} \to M/Q(\mathfrak{p})$ (гл. II, § 2, n° 3), а отсюда следует наше утверждение.

Предложение 9. *Пусть A — нётерово кольцо. Следующие условия эквивалентны*:

а) *кольцо A артиново*;

б) *все простые идеалы кольца A являются максимальными*;

в) *все элементы множества $\mathrm{Ass}(A)$ являются максимальными идеалами.*

Если эти условия выполнены, то A обладает лишь конечным числом простых идеалов, причем все они максимальны и ассоциированы с A-модулем A; кроме того, кольцо A полулокальное и его радикал нильпотентен.

Действительно, условие, что кольцо A артиново, равносильно тому, что A является A-модулем конечной длины. Следовательно, а) и в) эквивалентны в силу предложения 7. Очевидно, что из б) следует в). Наконец, из а) следует б), так как любое целостное артиново кольцо есть поле. Таким образом, свойства а), б) и в) эквивалентны.

Допустим, что эти свойства выполнены. Поскольку всякий простой идеал кольца A принадлежит $\mathrm{Supp}(A)$, а любой элемент из $\mathrm{Supp}(A)$ содержит некоторый элемент из $\mathrm{Ass}(A)$, из в) следует, что $\mathrm{Ass}(A)$ представляет собой множество всех простых идеалов кольца A. Следовательно, A обладает лишь конечным числом простых идеалов, которые все максимальны и ассоциированы с A-модулем A. Отсюда, очевидно, следует, что кольцо A полулокально. Наконец, известно, что радикал артинова кольца нильпотентен (*Алгебра*, гл. VIII, § 6, n° 4, теорема 3).

Замечание. 2) Условия предложения 9 применительно к *нётерову* кольцу A означают, что спектр кольца A *конечен* и *дискретен*, ибо каждая точка из $\mathrm{Spec}(A)$ замкнута (гл. II, § 4, n° 3, следствие 6 из предложения 11). Обратно, для любого *нётерова* кольца A утверждение, что *каждая точка из* $\mathrm{Spec}(A)$ *замкнута*, означает, что любой простой идеал из A максимален (*там же*), так что это условие эквивалентно условиям предложения 9.

Следствие 1. *Всякое артиново кольцо A изоморфно прямому произведению некоторого конечного семейства локальных артиновых колец.*

Действительно, из предложения 9 и из предложения 8 (iii) и (iv) следует, что если $(\mathfrak{m}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — семейство максимальных идеалов кольца A, то каноническое отображение $A\to\prod_i A_{\mathfrak{m}_i}$ биективно.

Замечание. 3) Это следствие может быть также выведено из того факта, что спектр $\mathrm{Spec}(A)$ конечен и дискретен, и из предложения 15 гл. II, § 4, n° 3.

Следствие 2. *Пусть A — нётерово кольцо и $\mathfrak{m}$ — некоторый идеал в A. Следующие условия эквивалентны:*

а) *кольцо A полулокально и $\mathfrak{m}$ — идеал определения для A;*

б) *кольцо A является кольцом Зарисского относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии и кольцо $A/\mathfrak{m}$ артиново.*

Действительно, если выполнено а), то A — кольцо Зарисского относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии (гл. III, § 3, n° 3, пример 3); кроме того, поскольку, по предположению, $\mathfrak{m}$ содержит некоторую степень радикала $\mathfrak{r}$ кольца A, любой простой идеал из A, содержащий $\mathfrak{m}$, содержит также и $\mathfrak{r}$ (гл. II, § 1, n° 1, предложение 1), следовательно, этот идеал максимален, так как $\mathfrak{r}$ представляет собой конечное пересечение максимальных идеалов (*loc. cit*); предложение 9 показывает, таким образом, что кольцо $A/\mathfrak{m}$ артиново. Обратно, если выполнено условие б), то

всякий максимальный идеал $\mathfrak{p}$ кольца A содержит радикал кольца A, так что он содержит и $\mathfrak{m}$ (гл. III, § 3, n° 3, предложение 6). Поскольку кольцо $A/\mathfrak{m}$ артиново, идеалов $\mathfrak{p}/\mathfrak{m}$ конечное число (предложение 9), так что A содержит только конечное число максимальных идеалов, откуда получается, что рассматриваемое кольцо полулокально.

Следствие 3. *Пусть A, A' — два кольца, h — некоторый гомоморфизм кольца A в A'. Предположим, что кольцо A полулокально и нётерово и что A' является A-модулем конечного типа. Тогда кольцо A' полулокально и нётерово. Если $\mathfrak{m}$ — идеал определения кольца A, то $\mathfrak{m}A'$ — идеал определения кольца A'.*

Действительно, известно, что A' — кольцо Зарисского относительно $\mathfrak{m}A'$-адической топологии (гл. III, § 3, n° 3, предложение 7). Поскольку $A/\mathfrak{m}$ — артиново кольцо (следствие 2) и $A'/\mathfrak{m}A'$ является $(A/\mathfrak{m})$-модулем конечного типа, кольцо $A'/\mathfrak{m}A'$ артиново, так что A' полулокально и $\mathfrak{m}A'$ — идеал определения кольца A' (следствие 2).

Следствие 4. *Пусть A — нётерово кольцо, полулокальное и полное, $\mathfrak{m}$ — идеал определения кольца A, E — некоторый A-модуль конечного типа и (F_n) — такая убывающая последовательность подмодулей модуля E, что $\bigcap_n F_n = 0$. Тогда для любого $p > 0$ существует $n > 0$, такое, что $F_n \subset \mathfrak{m}^p E$.*

Поскольку A — кольцо Зарисского, модуль E отделим и подмодули F_n замкнуты в $\mathfrak{m}$-адической топологии. С другой стороны, модуль E полон (гл. III, § 2, n° 12, следствие 1 предложения 16). Наконец, $E/\mathfrak{m}^p E$ представляет собой модуль конечного типа над кольцом $A/\mathfrak{m}^p$, которое артиново (следствие 2). Следовательно, $E/\mathfrak{m}^p E$ есть артинов $(A/\mathfrak{m}^p)$-модуль, а потому также артинов A-модуль. Следствие вытекает теперь из предложения 8 гл. III, § 2, n° 7.

Следствие 5. *В полном полулокальном нётеровом кольце любая убывающая последовательность идеалов, пересечение которых равно нулю, является базисом фильтра, который сходится к нулю.*

Достаточно применить следствие 4 к A-модулю A.

Предложение 10. *Пусть A — нётерово кольцо и $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ — простые идеалы, ассоциированные с A-модулем A, причем $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$ при $i \neq j$.*

(i) *Множество $S = \bigcap_{i=1}^{n} (A - \mathfrak{p}_i)$ представляет собой множество неделителей нуля кольца A.*

(ii) *Если все идеалы* $\mathfrak{p}_i$ *являются минимальными элементами в множестве* $\mathrm{Ass}(A)$, *то полное кольцо частных* $S^{-1}A$ *кольца* A *артиново.*

(iii) *Если кольцо* A *редуцировано, то все идеалы* $\mathfrak{p}_i$ *являются минимальными элементами множества* $\mathrm{Ass}(A)$ (*и, следовательно, они являются минимальными элементами множества* $\mathrm{Spec}(A)$) *и каждое из колец* $A_{\mathfrak{p}_i}$ *есть поле. Для каждого индекса* i *канонический гомоморфизм* $S^{-1}A \to A_{\mathfrak{p}_i}$ (гл. II, § 2, n° 1, следствие 1 предложения 2) сюръективен и его ядро равно $S^{-1}\mathfrak{p}_i$; *наконец, канонический гомоморфизм кольца* $S^{-1}A$ *в* $\prod_{i=1}^{n}(S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{p}_i)$ *биективен.*

Тот факт, что S представляет собой множество неделителей нуля кольца A, уже был установлен выше (§ 1, n° 1, следствие 3 предложения 2). Простые идеалы кольца частных $S^{-1}A$ имеют вид $S^{-1}\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ — некоторый простой идеал из A, содержащийся в $\bigcup_{i=1}^{n}\mathfrak{p}_i$ (гл. II, § 2, n° 5, предложение 10), а потому в одном из $\mathfrak{p}_i$ (гл. II, § 1, n° 1, предложение 2). Если $\mathfrak{p}_i$ — минимальный элемент в $\mathrm{Ass}(A)$, то он минимален и в $\mathrm{Spec}(A)$ (§ 1, n° 3, следствие предложения 7); если каждый из идеалов $\mathfrak{p}_i$ является минимальным элементом множества $\mathrm{Ass}(A)$, то, следовательно, простые идеалы в $S^{-1}A$ имеют вид $S^{-1}\mathfrak{p}_i$ и, таким образом, они максимальны, из чего вытекает, что $S^{-1}A$ — артиново кольцо (предложение 9).

Наконец, предположим, что кольцо A редуцировано. Тогда $\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{p}_i = \{0\}$ (§ 1, n° 3, следствие 2 предложения 7). Отсюда получается, что $\{0\} = \bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{p}_i$ есть *редуцированное* примарное разложение идеала $\{0\}$ (n° 3, следствие предложения 4); в частности, никакой из идеалов $\mathfrak{p}_i$ не может содержать идеалы $\mathfrak{p}_j$ при $j \neq i$ и, следовательно, $\mathfrak{p}_i$ являются минимальными элементами множества $\mathrm{Ass}(A)$. Кольцо $S^{-1}A$, таким образом, артиново в силу (ii). Идеалы $S^{-1}\mathfrak{p}_i$ представляют собой простые идеалы, ассоциированные с $S^{-1}A$-модулем S^{-1} (§ 1, n° 2, следствие предложения 5) и $\{0\} = S^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{p}_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n}S^{-1}\mathfrak{p}_i$ (гл. II, § 2, n° 4); поскольку идеалы $S^{-1}\mathfrak{p}_i$ попарно различны, набор $(S^{-1}\mathfrak{p}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ является редуцированным примарным разложением идеала $\{0\}$ в кольце $S^{-1}A$ (n° 3, следствие предложения 4). Предложение

8 показывает теперь, что канонический гомоморфизм g_i: $S^{-1}A \to (S^{-1}A)_{\mathfrak{p}_i}$ сюръективен и его ядро равно $S^{-1}\mathfrak{p}_i$, а канонический гомоморфизм $S^{-1}A \to \prod_{i=1}^{n}(S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{p}_i)$ биективен. Кроме того, известно, что канонический гомоморфизм $S^{-1}A \to A_{\mathfrak{p}_i}$ является композицией гомоморфизма g_i и изоморфизма $(S^{-1}A)_{S^{-1}\mathfrak{p}_i} \to A_{\mathfrak{p}_i}$ (гл. II, § 2, n° 3, предложение 7). Наконец, из предложения 8 следует, что $(S^{-1}A)_{S^{-1}\mathfrak{p}_i}$ изоморфно $S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{p}_i$, в силу чего оно является полем: ведь идеал $S^{-1}\mathfrak{p}_i$ максимален.

6. *Примарное разложение и расширение скаляров*

В этом n° через A и B обозначаются два кольца; здесь рассматривается некоторый гомоморфизм колец ρ: $A \to B$, который превращает B в A-алгебру; напомним, что для всякого B-модуля F через $\rho_*(F)$ обозначается коммутативная группа F, наделенная структурой A-модуля по следующему правилу: $a \cdot y = \rho(a) \cdot y$ для $a \in A$ и $y \in F$.

Лемма 1. *Пусть* ρ: $A \to B$ *— гомоморфизм колец,* E *— некоторый* A*-модуль, такой* A*-модуль, что его аннулятор содержит некоторую степень идеала* $\mathfrak{p}$ *и* $\mathrm{Ass}(E) = \{\mathfrak{p}\}$; *пусть* F *— такой* B*-модуль, что* $\rho_*(F)$ *является плоским* A*-модулем. Тогда из условия* $\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}_B(E \otimes_A F)$ *следует, что* $\rho^{-1}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}$.

Если n — такое число, что $\mathfrak{p}^n E = 0$, то $\mathfrak{p}^n B \subset \mathrm{Ann}(E \otimes_A F)$, откуда $\mathfrak{p}^n B \subset \mathfrak{P}$; в силу чего $\mathfrak{p}^n \subset \rho^{-1}(\mathfrak{P})$ и, следовательно, $\mathfrak{p} \subset \rho^{-1}(\mathfrak{P})$, так как идеал $\rho^{-1}(\mathfrak{P})$ простой. В то же время если $a \in A - \mathfrak{p}$, то гомотетия h модуля E, соответствующая элементу a, инъективна (§ 1, n° 1, следствие 2 предложения 2). Поскольку отображение $h \otimes 1_F$ является гомотетией h' модуля $E \otimes_A F$, соответствующей элементу $\rho(a)$, а модуль $\rho_*(F)$ — плоский, h' инъективна (гл. I, § 2, n° 2, определение 2). Этим доказывается, что $\rho(a) \notin \mathfrak{P}$, откуда $\rho^{-1}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}$.

Теорема 2. *Пусть* ρ: $A \to B$ *— гомоморфизм колец,* E *— некоторый* A*-модуль,* F *— такой* B*-модуль, что модуль* $\rho_*(F)$ *— плоский над кольцом* A. *Тогда*

$$\mathrm{Ass}_B(E \otimes_A F) \supset \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(E)} \mathrm{Ass}_B(F/\mathfrak{p}F). \tag{5}$$

Если кольцо A *нётерово, то обе части соотношения* (5) *равны.*

Пусть $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(E)$. По определению, существует точная последовательность

$$0 \to A/\mathfrak{p} \to E.$$

Так как A-модуль F — плоский, отсюда получается точная последовательность

$$0 \to F/\mathfrak{p}F \to E \otimes_A F,$$

откуда $\mathrm{Ass}_B(F/\mathfrak{p}F) \subset \mathrm{Ass}_B(E \otimes_A F)$, чем и доказывается соотношение (5).

Теперь предположим, что кольцо A *нётерово* и докажем обратное включение.

Проведем рассуждения поэтапно:

(i) Сначала предположим, что E является A-модулем *конечного типа* и что множество $\mathrm{Ass}_A(E)$ состоит *из одного элемента* $\mathfrak{p}$. В силу теоремы 1 § 1, n° 4, существует композиционный ряд $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ модуля E, каждый фактор E_i/E_{i+1} которого изоморфен модулю $A/\mathfrak{p}_i$, где $\mathfrak{p}_i$ — некоторый простой идеал в A. Кроме того (§ 1, n° 4, теорема 2, n° 3, предложение 7), все идеалы $\mathfrak{p}_i$ содержат $\mathfrak{p}$. Поскольку F является плоским A-модулем, модули $E_i \otimes_A F$ образуют композиционный ряд модуля $E \otimes_A F$ и факторы $(E_i \otimes_A F)/(E_{i+1} \otimes_A F)$ отождествляются с $(A/\mathfrak{p}_i) \otimes_A F = F/\mathfrak{p}_i A$. В силу предложения 3 § 1, n° 1, мы, таким образом, получаем, что

$$\mathrm{Ass}_B(E \otimes_A F) \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} \mathrm{Ass}_B(F/\mathfrak{p}_i F).$$

Известно, что модуль E аннулируется некоторой степенью идеала $\mathfrak{p}$ (n° 1, замечание). Лемма 1 показывает, следовательно, что для любого $\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}_B(E \otimes_A F)$ имеет место равенство $\rho^{-1}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}$. Так как фактор $F/\mathfrak{p}_i F$ изоморфен $(A/\mathfrak{p}_i) \otimes_A F$, мы получаем равенство $\rho^{-1}(\mathfrak{P}') = \mathfrak{p}_i$ для всякого $\mathfrak{P}' \in \mathrm{Ass}_B(F/\mathfrak{p}_i F)$ в силу леммы 1, откуда $\mathrm{Ass}_B(E \otimes_A F) \cap Ass(F/\mathfrak{p}_i F) = \varnothing$, если $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}$; это доказывает теорему в рассматриваемом случае.

(ii) Теперь предположим лишь, что модуль E является A-модулем *конечного типа*. Пусть $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — элементы множества $\mathrm{Ass}_A(E)$ и $\{0\} = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ — соответствующее редуцированное примарное разложение (n° 3); следовательно, модуль E изоморфен некоторому подмодулю прямой суммы модулей $E_i = E/Q_i$ и, поскольку F — плоский A-модуль, модуль $E \otimes_A F$ изоморфен некоторому подмодулю прямой суммы B-модулей $E_i \otimes_A F$. От-

сюда выводится (§ 1, n° 1, предложение 3 и следствие 1 предложения 3), что

$$\mathrm{Ass}_B(E \otimes_A F) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Ass}_B(E_i \otimes_A F).$$

Но E_i является таким A-модулем конечного типа, что множество $\mathrm{Ass}_A(E_i)$ сводится к одному элементу $\mathfrak{p}_i$ (n° 1, определение 1). В силу (i), мы имеем равенство $\mathrm{Ass}_B(E_i \otimes_A F) = \mathrm{Ass}_B(F/\mathfrak{p}_i F)$, откуда следует теорема в рассматриваемом случае.

(iii) *Общий случай.* Модуль $E \otimes_A F$ над кольцом B представляет собой объединение подмодулей $E' \otimes_A F$, где E' пробегает множество подмодулей конечного типа A-модуля E. Если идеал $\mathfrak{P}$ принадлежит множеству $\mathrm{Ass}_B(E \otimes_A F)$, то существует такой подмодуль E' конечного типа в модуле E, что $\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}_B(E' \otimes_A F)$. В силу (ii), существует такой идеал $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(E')$, что $\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}_B(F/\mathfrak{p}F)$. Так как $\mathrm{Ass}_A(E') \subset \mathrm{Ass}_A(E)$, то завершается доказательство теоремы 2.

Следствие 1. *Если A — нётерово кольцо и $\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}_B(E \otimes_A F)$, то $\rho^{-1}(\mathfrak{P}) \in \mathrm{Ass}_A(E)$ и $\rho^{-1}(\mathfrak{P})$ есть единственный простой идеал $\mathfrak{p}$ кольца A, удовлетворяющий условию $\mathfrak{P} \in \mathrm{Ass}_B(F/\mathfrak{p}F)$.*

Это вытекает из теоремы 2 и леммы 1, примененной к случаю $E = A/\mathfrak{p}$.

Следствие 2. *Предположим, что A и B — нётеровы кольца и B — плоский A-модуль. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A, $Q \subset E$ — некоторый $\mathfrak{p}$-примарный подмодуль и $\mathfrak{P}$ — простой идеал в B. Для того чтобы $Q \otimes_A B$ представлял собой $\mathfrak{P}$-примарный подмодуль модуля $E \otimes_A B$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{p}B$ был $\mathfrak{P}$-примарным идеалом кольца B.*

Применим теорему 2 к A-модулю E/Q и B-модулю B; тогда имеет место равенство $\mathrm{Ass}_A(E/Q) = \{\mathfrak{p}\}$ и $(E/Q) \otimes_A B$ является модулем, изоморфным модулю $(E \otimes_A B)/(Q \otimes_A B)$, так что $\mathrm{Ass}_B((E \otimes_A B)/(Q \otimes_A B)) = \mathrm{Ass}_B(B/\mathfrak{p}B)$. Утверждение, что $Q \otimes_A B$ является $\mathfrak{P}$-примарным в $E \otimes_A B$, равносильно, следовательно, тому, что $\mathrm{Ass}_B(B/\mathfrak{p}B)$ состоит из одного идеала $\mathfrak{P}$, откуда вытекает следствие.

Замечание. Предположим, что A и B *нётеровы.* Пусть $\mathfrak{P}$ — простой идеал кольца B, и пусть $\mathfrak{p} = \rho^{-1}(\mathfrak{P})$. Положим $S = A - \mathfrak{p}$, и пусть $k(\mathfrak{p}) = S^{-1}(A/\mathfrak{p})$ — поле частных кольца $A/\mathfrak{p}$. Так как $\mathfrak{P}$ содержит $\mathfrak{p}B$, идеал $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}B$ является простым в $B/\mathfrak{p}B$. Если ρ' обозначает композицию гомоморфизмов $A \xrightarrow{\rho} B \to B/\mathfrak{p}B$, то известно, что $S^{-1}(B/\mathfrak{p}B)$ отождествляется с кольцом $(\rho'(S))^{-1}(B/\mathfrak{p}B)$ и $\mathfrak{P}' = S^{-1}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}B)$ — с некоторым идеалом в этом

кольце (гл. II, § 2, n° 2, предложение 6); так как $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}B$ не пересекается с $\rho'(S)$, $\mathfrak{P}'$ является простым идеалом в $S^{-1}(B/\mathfrak{p}B)$ (гл. II, § 2, n° 5, предложение 11). Кроме того, имеют место канонические изоморфизмы между $S^{-1}(B/\mathfrak{p}B)$, $S^{-1}((A/\mathfrak{p})\otimes_A B)$ и $S^{-1}((A/\mathfrak{p})\otimes_A B) = k(\mathfrak{p})\otimes_A B$. Аналогичным образом, $S^{-1}(F/\mathfrak{p}F)$ отождествляется канонически с $k(\mathfrak{p})\otimes_A F$. С учетом сказанного в условиях теоремы 2 *для включения* $\mathfrak{P}\in \mathrm{Ass}_B(E\otimes_A F)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_A(E)$ *и* $\mathfrak{P}'\in\mathrm{Ass}_{k(\mathfrak{p})\otimes_A B}(k(\mathfrak{p})\otimes_A F)$.

Действительно, в силу теоремы 2 и ее следствия 1, нужно заметить лишь эквивалентность включений

$$\mathfrak{P}\in \mathrm{Ass}_B(F/\mathfrak{p}F) \quad \text{и} \quad \mathfrak{P}'\in \mathrm{Ass}_{k(\mathfrak{p})\otimes_A B}(k(\mathfrak{p})\otimes_A F);$$

но так как кольцо B нётерово, это вытекает из следствия предложения 5 § 1, n° 2, и из произведенных выше отождествлений.

Предложение 11. *Предположим, что A и B — нётеровы кольца и B — плоский A-модуль. Пусть E — некоторый A-модуль, E' — такой подмодуль в E, что для всякого идеала $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_A(E/E')$ идеал $\mathfrak{p}B$ является простым в кольце B или равен B. Пусть $E' = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(E/E')} Q(\mathfrak{p})$ — некоторое редуцированное примарное разложение подмодуля E' в E, где $Q(\mathfrak{p})$ является $\mathfrak{p}$-примарным для всякого $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(E/E')$.*

(i) *Если $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(E/E')$ и если $\mathfrak{p}B = B$, то $Q(\mathfrak{p})\otimes_A B = E\otimes_A B$.*

(ii) *Если $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(E/E')$ и идеал $\mathfrak{p}B$ прост, то $Q(\mathfrak{p})\otimes_A B$ является $\mathfrak{p}B$-примарным в $E\otimes_A B$.*

(iii) *Если Φ — множество таких $\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(E/E')$, что $\mathfrak{p}B$ — простой идеал в B, то $E'\otimes_A B = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\Phi}(Q(\mathfrak{p})\otimes_A B)$, и это соотношение представляет собой редуцированное примарное разложение подмодуля $E'\otimes_A B$ в $E\otimes_A B$.*

Если $\mathfrak{p}B = B$, то теорема 2, примененная к $E/Q(\mathfrak{p})$ и B, показывает, что $\mathrm{Ass}_B(E/Q(\mathfrak{p}))\otimes_A B) = \varnothing$, и, так как кольцо B нётерово и является плоским A-модулем, мы получаем (§ 1, n° 1, следствие 1 предложения 2), что $Q(\mathfrak{p})\otimes_A B = E\otimes_A B$. Утверждение (ii) вытекает из следствия 2 теоремы 2, если положить $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}B$. Наконец, соотношение $E'\otimes_A B = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\Phi}(Q(\mathfrak{p})\otimes_A B)$ получается из того, что B — плоский A-модуль (гл. I, § 2, n° 6, предложение 6); так как $\mathfrak{p} = \rho^{-1}(\mathfrak{p}B)$ при $\mathfrak{p}\in\Phi$ (лемма 1), то $\mathfrak{p}B \neq \mathfrak{p}'B$ для любых двух различных идеалов $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ множества Φ. С другой стороны, $\mathrm{Ass}((E\otimes_A B)/(E'\otimes_A B)) = \Phi$ в силу теоремы 2. Мы заключаем теперь из предложения 4 n° 3, что $E'\otimes_A B = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\Phi}(Q(\mathfrak{p})\otimes_A B)$ есть редуцированное примарное разложение.

Следствие. *Предположим, что идеал* $\mathfrak{p}B$ *прост при любом* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(E/E')$. *Тогда если* $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ *— минимальные элементы множества* $\mathrm{Ass}_A(E/E')$, *то элементы* $\mathfrak{p}_iB$ *минимальны в множестве*

$$\mathrm{Ass}_A((E \otimes_A B)/(E' \otimes_A B)).$$

Действительно, из предложения 11 следует, что в этом случае $\mathfrak{p}_iB \neq \mathfrak{p}_jB$ при $i \neq j$.

Примеры. 1) Положим $B = S_{\mathfrak{a}}^{-1}A$, где S — мультипликативная система кольца A; если кольцо A нётерово, то предположения предложения 11 выполнены и мы вновь получаем часть предложения 6 n° 4.

2) Пусть A — нётерово кольцо, $\mathfrak{m}$ — идеал в A, B — отделимое пополнение кольца A относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии; тогда B является плоским A-модулем и можно применить теорему 2 к $F = B$. Однако в общем случае предположения предложения 11 не выполняются для простых идеалов кольца A (гл. III, § 2, упражнение 15б)).

3) Пусть A — нётерово кольцо, B — алгебра многочленов $A[X_1, \ldots, X_n]$. Кольцо B нётерово и является свободным A-модулем; следовательно, этот модуль плоский. Кроме того, если $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца A, то $B/\mathfrak{p}B$ изоморфно целостному кольцу $(A/\mathfrak{p})[X_1, \ldots, X_n]$, следовательно, идеал $\mathfrak{p}B$ прост. Таким образом, для любого A-модуля E и любого его подмодуля E' условия предложения 11 удовлетворены.

4) Пусть A — алгебра конечного типа над полем k, K — некоторое расширение поля k и $B = A \otimes_k K$ — алгебра над полем K, полученная расширением скаляров. Кольца A и B нётеровы и B является свободным A-модулем; следовательно, можно применить теорему 2 к $F = B$. В некоторых случаях (например, когда k алгебраически замкнуто) можно показать, что для всякого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A идеал $\mathfrak{p}B$ прост в B. Мы вернемся к этому примеру позднее.

Упражнения

1) а) Показать, что в нётеровом кольце $A = \mathbf{Z}[X]$ многочленов от одной переменной над $\mathbf{Z}$ идеал $\mathfrak{m} = 2A + AX$ максимален, а идеал $\mathfrak{q} = 4A + AX$ является $\mathfrak{m}$-примарным, но не равен никакой степени идеала $\mathfrak{m}$.

б) В кольце $B = Z[2X, X^2, X^3] \subset A$, являющемся нётеровым, показать, что идеал $\mathfrak{p} = 2BX + BX^2$ прост, но $\mathfrak{p}^2$ не является $\mathfrak{p}$-примарным, хотя его корень равен $\mathfrak{p}$.

в) Пусть K — поле, A — факторкольцо кольца $K[X, Y, Z]$ по идеалу, порожденному элементом $Z^2 - XY$; пусть x, y, z — канонические образы переменных X, Y, Z в кольце A. Показать, что идеал $\mathfrak{p} = Ax + Az$ прост, что $\mathfrak{p}^2$ не является примарным идеалом и что $\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}^2$ представляет собой примарное разложение идеала $\mathfrak{p}^2$, где $\mathfrak{a} = Ax$ и $\mathfrak{b} = Ax + Ay + Az$.

2) В примере упражнения 11б) § 1 показать, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^2 \cap \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}^2$ представляет собой примарное разложение, являющееся редуцированным, идеала $\mathfrak{a}$

в кольце A и что насыщение идеала $\mathfrak{a}$ относительно $\mathfrak{m}$ равно идеалу $\mathfrak{a}$ (и, следовательно, примарным идеалом не является).

3) Пусть A — нётерово кольцо и M — некоторый A-модуль конечного типа. Пусть Q — некоторый $\mathfrak{p}$-примарный подмодуль в M. Нижняя граница тех целых чисел $n \geqslant 1$, для которых $\mathfrak{p}^n M \subset Q$, называется *показателем* подмодуля Q в модуле M и обозначается через $e(M/Q)$.

Пусть $(Q_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство $\mathfrak{p}$-примарных подмодулей модуля M. Для того чтобы $Q = \bigcap_{\lambda \in L} Q_\lambda$ был $\mathfrak{p}$-примарным подмодулем в M, необходимо и достаточно, чтобы семейство $(e(M/Q_\lambda))_{\lambda \in L}$ было мажорируемо. В этом случае $e(M/Q) \geqslant e(M/Q_\lambda)$ для любого $\lambda \in L$.

¶ 4) Пусть A — нётерово кольцо и M — некоторый A-модуль конечного типа. Пусть $\mathfrak{p}$ — элемент множества $\operatorname{Ass}(M)$ и $\mathfrak{E}_\mathfrak{p}$ — множество тех подмодулей Q модуля M, для которых $\operatorname{Ass}(M/Q) = \{\mathfrak{p}\}$ и $\operatorname{Ass}(Q) = \operatorname{Ass}(M) - \{\mathfrak{p}\}$ (это множество непусто в силу предложения 4 § 1, n° 1). Положим $e_\mathfrak{p}(M) = \inf_{Q \in \mathfrak{E}_\mathfrak{p}} e(M/Q)$ (упражнение 3).

а) Пусть $n_\mathfrak{p}$ — целое число $\geqslant e_\mathfrak{p}(M)$, и пусть $\mathfrak{F}(n_\mathfrak{p})$ — подмножество в $\mathfrak{E}_\mathfrak{p}$, образованное такими подмодулями Q, что $e(M/Q) \leqslant n_\mathfrak{p}$. Показать, что $\mathfrak{F}(n_\mathfrak{p})$ обладает наименьшим элементом $Q(\mathfrak{p}, n_\mathfrak{p})$.

б) Пусть $(n_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)}$ — такое семейство целых чисел, что $n_\mathfrak{p} \geqslant e_\mathfrak{p}(M)$ для всякого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$. Показать, что подмодули $Q(\mathfrak{p}, n_\mathfrak{p})$, соответствующие этому семейству, образуют редуцированное примарное разложение модуля $\{0\}$ в модуле M, называемое *канонически определенным семейством* $(n_\mathfrak{p})$. Если положить $n_\mathfrak{p} = e_\mathfrak{p}(M)$ для любого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$, то примарное разложение, образованное модулями $Q(\mathfrak{p}) = Q(\mathfrak{p}, e_\mathfrak{p}(M))$, называется *каноническим примарным разложением* подмодуля $\{0\}$ в модуле M. Пусть $\{0\} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)} Q'(\mathfrak{p})$ — произвольное редуцированное примарное разложение модуля $\{0\}$ в M. Показать, что $e(M/Q(\mathfrak{p})) \leqslant e(M/Q'(\mathfrak{p}))$ для всякого $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$ и что если $e(M/Q(\mathfrak{p})) = e(M/Q'(\mathfrak{p}))$ для некоторого $\mathfrak{p}$, то $Q(\mathfrak{p}) \subset Q'(\mathfrak{p})$ (*теорема Ортиза*).

в) Показать, что $Q(\mathfrak{p}, n_\mathfrak{p})$ является насыщением модуля $\mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}} M$ относительно идеала $\mathfrak{p}$ (воспользоваться § 1, n° 2, предложение 6); $\mathfrak{p}$ есть наименьший элемент множества $\operatorname{Supp}(M/\mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}} M)$.

г) Пусть S — мультипликативная система кольца A, не пересекающая простой идеал $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$ и Q — некоторый $\mathfrak{p}$-примарный подмодуль модуля M. Показать, что $e(M/Q) = e(S^{-1}M/S^{-1}Q)$. Показать, что если S — мультипликативная система кольца A и Φ — множество тех $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$, для которых $S \cap \mathfrak{p} = \varnothing$, и N — насыщенное подмодуля $\{0\}$ в M относительно S, то модули $Q(\mathfrak{p}, n_\mathfrak{p})$ для $\mathfrak{p} \in \Phi$ образуют редуцированное примарное разложение подмодуля N в M, канонически определенное семейством $(n_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \in \Phi}$, а модули $S^{-1}Q(\mathfrak{p}, n_\mathfrak{p})$ для $\mathfrak{p} \in \Phi$ — редуцированное примарное разложение подмодуля $\{0\}$ в $S^{-1}M$, канонически определенное семейством $(n_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \in \Phi}$. Рассмотреть частный случай канонических примарных разложений.

5) Пусть L — некоторый свободный $\mathbf{Z}$-модуль конечного типа, T — конечная коммутативная группа, порядок которой равен степени некоторого простого числа p. Показать, что каноническое примарное разложение (упражне-

ние 4) подмодуля $\{0\}$ в $M = L \otimes T$ есть равенство $\{0\} = p^n L \cap T$, где n — наименьшее целое число $\geqslant 0$, для которого $p^n T = 0$ (заметить, что $p^n M = p^n L$).

6) В упражнении 5 § 1 модуль $\{0\}$ примарен в A-модуле $\mathfrak{a}$ относительно простого идеала $\{0\}$ кольца A. Показать, что подмодуль AX модуля $\mathfrak{a}$ примарен в $\mathfrak{a}$ относительно некоторого простого идеала $\neq\{0\}$ и что подмодуль AXY модуля $\mathfrak{a}$ не является примарным в $\mathfrak{a}$.

7) Пусть A — нётерово кольцо, M — некоторый A-модуль конечного типа, $(\mathfrak{p}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — последовательность, полученная при расположении в некотором порядке элементов множества $\mathrm{Ass}(M)$. Показать, что существует такой композиционный ряд $(M_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ модуля M, что для $0 \leqslant i \leqslant n-1$ модуль M_{i+1} является $\mathfrak{p}_i$-примарным в M_i (воспользоваться предложением 4 п° 3).

¶ 8) Пусть A — нётерово кольцо, E — некоторый A-модуль конечного типа, F — подмодуль в E и $\mathfrak{m}$ — некоторый идеал в A. Пусть $F = \bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}(E/F)} Q(\mathfrak{p})$ — редуцированное примарное разложение подмодуля F в модуле E. Показать, что замыкание подмодуля F в E относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии на E равно $\bigcap_{\mathfrak{p}\in\Phi} Q(\mathfrak{p})$, где Φ — множество таких $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(E/F)$, что $\mathfrak{p} + \mathfrak{m} \neq A$.

(Рассмотреть сначала случай $\mathfrak{p}$-примарного F в E и показать, что если $\mathfrak{p} + \mathfrak{m} = A$, то подмодуль F плотен в E; к общему случаю перейти с помощью упражнения 15 § 1 и следствия 1 теоремы 3 гл. III, § 3, п° 4.)

9) Пусть A — нётерово кольцо, $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в A и M — такой A-модуль, что $\{0\}$ является $\mathfrak{m}$-примарным в M. Если $\widehat{A}$ — отделимое пополнение кольца A относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии, то показать, что каноническое отображение $M \to M \otimes_A \widehat{A}$ биективно (рассмотреть сначала случай, когда M является модулем конечного типа, используя предложение 7 п° 5; в общем же случае рассмотреть M как индуктивный предел подмодулей конечного типа).

10) Пусть A — нётерово кольцо и M — некоторый A-модуль. Показать, что следующие свойства эквивалентны:

α) любой подмодуль конечного типа модуля M имеет конечную длину;

β) модуль M является индуктивным пределом A-модулей конечной длины;

γ) любой элемент $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ является максимальным идеалом в A;

δ) любой элемент $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$ является максимальным идеалом в A.

11) Пусть A — кольцо, M — некоторый A-модуль и N — подмодуль в M. *Корнем* модуля N в модуле M называется обозначенное через $\mathfrak{r}_M(N)$ множество таких элементов $a \in A$, что гомотетия, соответствующая элементу a, модуля M/N почти нильпотентна. Показать, что $\mathfrak{r}_M(N)$ является идеалом в A и что для любого $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_f(M/N)$ имеет место включение $\mathfrak{r}_M(N) \subset \mathfrak{p}$. Если N_1, N_2 — два подмодуля в M, то $\mathfrak{r}_M(N_1 \cap N_2) = \mathfrak{r}_M(N_1) \cap \mathfrak{r}_M(N_2)$; если $\mathfrak{a}$ — некоторый идеал в A, то $\mathfrak{r}_M(\mathfrak{a}N) \supset \mathfrak{r}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{r}_M(N)$ и $\mathfrak{r}_A(\mathfrak{a}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$.

¶ 12) Пусть A — кольцо, M — некоторый A-модуль и N — подмодуль в M.

а) Для того чтобы множество $\mathrm{Ass}_f(M/N)$ (§ 1, упражнение 17) состояло из одного элемента $\mathfrak{p}$, необходимо и достаточно, чтобы $N \neq M$ и чтобы для всякого $a \in A$ гомотетия модуля M/N, соответствующая элементу a, была инъективна или почти нильпотентна. Тогда $\mathfrak{p} = \mathfrak{r}_M(N)$ (упражнение 11), и в этом случае по-прежнему говорят, что модуль N *примарен* (или $\mathfrak{p}$-*примарен*) в M. Для всякого подмодуля M' модуля M, такого, что $N \subset M'$ и $N \neq M'$, модуль N является $\mathfrak{p}$-примарным в M'.

б) Если $\mathfrak{r}_M(N)$ — максимальный идеал кольца A, то показать, что N примарен в M. В частности, всякий идеал $\mathfrak{q}$ кольца A, который содержится только в одном простом идеале $\mathfrak{m}$ (обязательно максимальном), является $\mathfrak{m}$-примарным.

в) Пусть A — целостное кольцо и x — такой элемент из A, что $\mathfrak{p} = Ax$ — простой идеал. Тогда для любого целого $n \geqslant 1$ идеал Ax^n является

$\mathfrak{p}$-примарным. Показать, что этот результат не распространяется на случай, когда A не является целостным (взять $A = B/\mathfrak{b}$, где $B = K[X, Y]$ (K — поле) и $\mathfrak{b} = BX^2 + BXY$).

г) Если A — абсолютно плоское кольцо (гл. I, § 2, упражнение 17), то примарные идеалы кольца A совпадают с простыми идеалами.

д) Привести пример такого $\mathbf{Z}$-модуля M, что $\{0\}$ является p-примарным (для некоторого простого числа p), но ни для какого $a \neq 0$ из $\mathbf{Z}$ гомотетия a_M не является нильпотентной (ср. глава II, § 2, упражнение 3).

13) а) Пусть u: $M \to M'$ — сюръективный гомоморфизм A-модулей. Показать, что если N' — примарный подмодуль в модуле M', то $N = u^{-1}(N')$ является примарным в M и $\mathfrak{r}_M(N) = \mathfrak{r}_{M'}(N')$.

б) Любое конечное пересечение $\mathfrak{p}$-примарных подмодулей в некотором A-модуле M является $\mathfrak{p}$-примарным подмодулем в M. Выполняется ли это предложение для произвольных пересечений?

в) Для того чтобы A-модуль M обладал тем свойством, что $\{0\}$ есть $\mathfrak{p}$-примарный подмодуль в M, необходимо и достаточно, чтобы для любого подмодуля N модуля M имело место равенство $\mathrm{Supp}(N) = V(\mathfrak{p})$. (Заметить, что для всякого $x \in M$ модуль M содержит некоторый подмодуль, изоморфный модулю $A/\mathrm{Ann}(x)$.)

14) а) Обобщить на случай произвольных колец предложение 3 n° 1.

б) Пусть M — такой A-модуль, что для всякой мультипликативной системы S кольца A ядро канонического отображения $M \to S^{-1}M$ равно $\{0\}$ или M. Показать, что подмодуль $\{0\}$ примарен в M (рассмотреть для любого $a \neq 0$ в A мультипликативную систему степеней a^n $(n \geqslant 0)$).

¶ 15) Пусть $\mathfrak{q}$ — примарный идеал кольца A и $\mathfrak{p}$ — корень этого идеала. Показать, что в кольце многочленов $B = A[X]$ идеал $B\mathfrak{q}$ примарен и его корень равен $B\mathfrak{p}$. (Пусть $f(X) = \sum_j a_j X^j$ и $g(X) = \sum_j b_j X^j$ — два таких не являющихся константами многочлена, что $fg \in B\mathfrak{q}$ и $f \notin B\mathfrak{p}$. Пусть a_m — коэффициент с наименьшим индексом, не принадлежащий $\mathfrak{p}$; пусть $\mathfrak{a}$ — идеал кольца A, порожденный элементами $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$. Тогда существует такое целое k, что $\mathfrak{a}^k \subset \mathfrak{q}$. Пусть $\mathfrak{q}_i$ — кондуктор из $\mathfrak{a}^{k-1}$ в $\mathfrak{q}$ при $i \leqslant k$. Показать рассуждением от противного с помощью индукции по i, что $g \in B\mathfrak{q}_i$.)

16) Пусть $\mathfrak{p}$ — немаксимальный простой идеал в кольце A и $\mathfrak{q}$ — некоторый $\mathfrak{p}$-примарный идеал, отличный от $\mathfrak{p}$. Пусть x — какой-нибудь элемент из $\mathfrak{p} - \mathfrak{q}$ и y — такой элемент из $A - \mathfrak{p}$, что $\mathfrak{p} + Ay \neq A$. Показать, что идеал $\mathfrak{a} = \mathfrak{q} + Axy$, хотя и удовлетворяет условию $y \supset \mathfrak{a} \supset \mathfrak{q}$, не является примарным (заметить, что не может выполняться включение $x \in \mathfrak{a}$).

17) Пусть M — некоторый A-модуль и N — какой-либо $\mathfrak{p}$-примарный подмодуль в M.

а) Пусть F — подмодуль в M, не содержащийся в N. Показать, что кондуктор $N : F$ является идеалом кольца A, содержащимся в $\mathfrak{p}$.

б) Пусть $\mathfrak{a}$ — некоторый идеал в A. Показать, что если $\mathfrak{a} \subset N : M$, то $N : \mathfrak{a} = M$. Если $\mathfrak{a} \not\subset N : M$, то $N : \mathfrak{a}$ представляет собой $\mathfrak{p}$-примарный подмодуль в M. Если $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$, то $N : \mathfrak{a} = N$.

18) а) Пусть A — кольцо и M — некоторый A-модуль. Показать, что если $\mathfrak{p}$ — минимальный элемент в множестве $\mathrm{Ass}_f(M)$, то насыщение подмодуля $\{0\}$ относительно $\mathfrak{p}$ в модуле M $\mathfrak{p}$-примарно в M (ср. § 1, упражнение 17б)).

б) Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца A. Показать, что для всякого целого $n > 0$ насыщение в A модуля $\mathfrak{p}^n$ относительно $\mathfrak{p}$ является $\mathfrak{p}$-примарным в A (воспользоваться упражнением 14а)); это насыщение обозначается через $\mathfrak{p}^{(n)}$ и называется *n-й символической степенью* идеала $\mathfrak{p}$.

в) Показать, что если любой простой идеал кольца A максимален, то для всякого A-модуля M и произвольного подмодуля N в M модуль N представляет собой пересечение некоторого семейства (конечного или бесконечного) примарных подмодулей в M (воспользоваться а) и упражнением 17 и) § 1).

* 19) Описать примарные идеалы в кольце нормирования ранга 2 (ср. гл. VI); получить отсюда пример кольца, в котором имеются идеалы, не являющиеся пересечениями (ни конечными, ни бесконечными) примарных идеалов, хотя в нем есть лишь два различных простых идеала. *

¶ 20) Определить для произвольного кольца A понятие *примарного разложения* и понятие *редуцированного примарного разложения* подобно тому, как это было сделано в n° 2 и n° 3 (воспользовавшись понятием примарного подмодуля, введенного в упражнении 12).

а) Обобщить предложения 4 и 6, заменяя всюду Ass на Ass_f.

б) Пусть E — некоторый A-модуль конечного типа и F — подмодуль в E. Для любой мультипликативной системы S кольца A обозначим через $\mathrm{sat}_S(F)$ насыщение подмодуля F в модуле E относительно S. Показать, что если F обладает примарным разложением в E, то любое насыщение F в E имеет вид $F:(a)$ при некотором $a \in A$. (Пусть $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ — элементы множества $\mathrm{Ass}_f(E/F)$. Показать сначала, используя а), что для любой мультипликативной системы S кольца A существует такое $b \in A$, что если T — мультипликативное множество степеней b^n $(n \geqslant 0)$, то $\mathrm{sat}_T(F) = \mathrm{sat}_S(F)$, для чего выбрать b так, чтобы $b \in \mathfrak{p}_i$ при $\mathfrak{p}_i \cap S \neq \varnothing$ и $b \notin \mathfrak{p}_i$ в противном случае. Доказать вслед за этим, что можно взять $a = b^m$ при достаточно большом m.)

в) Привести пример $\mathbf{Z}$-модуля E, в котором подмодуль $\{0\}$ примарен, но существуют насыщения $\mathrm{sat}_S(0)$, не представимые в виде $0:(a)$ (ср. *Алгебра*, гл. VII, § 2, упражнение 3).

21) Пусть A — кольцо, F — унитарный многочлен из $A[X]$ и B — кольцо $A[X]/F \cdot A[X]$; пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в A, $k = A/\mathfrak{m}$ — факторкольцо, являющееся полем, и $\overline{F}$ — канонический образ многочлена F в $k[X]$.

а) Пусть $\overline{F} = \prod_{i=1}^{n} f_i^{e_i}$, где f_i — попарно различные неприводимые многочлены из $k[X]$. Пусть $F_i \in A[X]$ — такой унитарный многочлен, что его канонический образ в $k[X]$ равен f_i. Обозначим через $\mathfrak{M}_i$ идеал $\mathfrak{m}B + F_i \cdot B$ кольца B. Показать, что идеалы $\mathfrak{M}_i$ попарно различны и исчерпывают множество максимальных идеалов кольца B, содержащих $\mathfrak{m}B$ (заметить, что $B/\mathfrak{m}B$ является алгеброй конечного ранга над $A/\mathfrak{m} = k$, порожденной корнями многочлена $\overline{F}$).

б) Для каждого i положим $\mathfrak{Q}_i = \mathfrak{m}B + F_i^{e_i} B$. Показать, что идеалы $\mathfrak{Q}_i$ являются $\mathfrak{M}_i$-примарными в B и что $\mathfrak{m}B = \mathfrak{Q}_1 \cap \mathfrak{Q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{Q}_n = \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \ldots \mathfrak{Q}_n$.

в) Для того чтобы B было локальным кольцом, необходимо и достаточно, чтобы A было локальным кольцом, а $\overline{F}$ — некоторой степенью неприводимого многочлена из $k[X]$.

¶ 22) Пусть E — некоторый A-модуль и F — его подмодуль.

а) Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A и a — такой элемент кольца A, что $a \notin \mathfrak{p}$ и модуль $Q = F:(a)$ является $\mathfrak{p}$-примарным в E. Показать, что $F = Q \cap (F + aE)$.

б) Предположим, что существуют такие элементы $b \in A$ и $x \in E$, что $b^n x \notin F$ для всякого $n > 0$. Показать, что если $F : b^{n+1} = F : b^n$ для некоторого целого $n > 0$, то $F = (F + Ab^n x) \cap (F : (b^n))$.

в) Предположим, что подмодуль F *неприводим* относительно E (*Algebre*, chap. II, 3e éd., § 2, exercice 16) и рассмотрим три следующих свойства:

α) Подмодуль F примарен в E;

β) для всякого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A насыщение модуля F относительно $\mathfrak{p}$ в E имеет вид $F:(a)$ при некотором $a \notin \mathfrak{p}$;

γ) для любого $b \in A$ последовательность $(F:(b^n))_{n \geqslant 1}$ стационарна.

Показать, что каждое из условий β), γ) влечет за собой α) (воспользоваться а) и б) и упражнением 18а)). Если E — модуль конечного типа, то все три условия α), β) и γ) эквивалентны (ср. упражнение 20б) и 20в)).

г) Пусть K — поле, A — кольцо $K[X, Y]$ и $\mathfrak{m} = AX + AY$ — максимальный идеал в A. Показать, что идеал $\mathfrak{m}^2$ примарен, но не является неприводимым.

д) Пусть A — кольцо (не обязательно коммутативное) и E — нётеров слева A-модуль. Показать, что любой подмодуль F модуля E представляет собой пересечение конечного семейства подмодулей, неприводимых в E (рассмотреть подмодуль в E, максимальный среди тех, которые не являются конечными пересечениями неприводимых подмодулей).

е) Получить из д) и в) новое доказательство теоремы 1 п° 2.

¶ 23) Пусть A — кольцо. Говорят, что некоторый A-модуль E является *ласкеровым*, если он имеет конечный тип и любой его подмодуль обладает примарным разложением в E.

а) Для того чтобы A-модуль конечного типа E был ласкеровым, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял следующим двум аксиомам:

($\mathrm{LA_I}$) Для любого подмодуля $F \subset E$ и любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ насыщенне F относительно $\mathfrak{p}$ в E имеет вид $F : (a)$, где $a \notin \mathfrak{p}$.

($\mathrm{LA_{II}}$) Для всякого подмодуля F модуля E любая убывающая последовательность $\left(\mathrm{sat}_{S_n}(F)\right)$ (где (S_n) — произвольная убывающая последовательность мультипликативных систем в A) стационарна.

(Чтобы показать, что эти условия достаточны, доказать сначала, используя ($\mathrm{LA_I}$) и упражнения 18а) и 22а), что для всякого подмодуля F модуля E существуют такой подмодуль $Q \subset E$, примарный относительно некоторого идеала $\mathfrak{p} \supset F : E$, и подмодуль $G = F + aE$, где $a \notin \mathfrak{p}$, для которых $F = Q \cap G$. Затем рассуждать от противного: показать, что если бы требуемое не имело места, то существовали бы бесконечная последовательность (Q_n) $\mathfrak{p}_n$-примарных подмодулей в E и строго возрастающая последовательность (G_n) подмодулей из E, такие, что если положить $H_n = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_n$, то: 1° $F = H_n \cap G_n$; 2° G_n максимален среди подмодулей модуля G, содержащих G_{n-1} и таких, что $F = H_n \cap G$; 3° существует такой элемент $a_n \notin \mathfrak{p}_n$, что $a_n E \subset G_n$. Показать, что в этом случае, если $S_n = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} (A - \mathfrak{p}_i)$, то S_n пересекает $G_n : E$, и получить отсюда, что $\mathrm{sat}_{S_n}(F) = H_n$. Закончить доказательство с помощью ($\mathrm{LA_{II}}$).)

б) Привести пример такого кольца A, что A-модуль A не удовлетворяет аксиоме ($\mathrm{LA_I}$), но всякий идеал $\mathfrak{a} \subset A$ неприводим и множество насыщений $\mathrm{sat}_S(\mathfrak{a})$ относительно всевозможных мультипликативных систем S из A конечно (ср. упражнение 19).

в) Пусть K — поле, $B = K[[X]]$ — алгебра формальных рядов над K, $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в B, образованный формальными рядами без свободных членов. В алгебре $B^{\mathbf{N}}$ рассмотрим подалгебру A, порожденную элементом 1 и идеалом $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}^{(\mathbf{N})}$. Показать, что в A любой простой идеал, отличный от $\mathfrak{n}$, представляет собой прямую сумму всех идеалов-слагаемых в $\mathfrak{n}$, за исключением одного. Любая строго возрастающая последовательность простых идеалов кольца A имеет, следовательно, не более двух элементов. Пусть $\mathfrak{a} \neq A$ — некоторый идеал в A, и пусть S — мультипликативная система в A, не пересекающаяся с $\mathfrak{a}$; если $\mathfrak{a}_n$ (соответственно S_n) обозначает проекцию идеала $\mathfrak{a}$ (соответственно системы S) на n-й сомножитель B_n алгебры $B^{\mathbf{N}}$, то показать, что $\mathrm{sat}_S(\mathfrak{a})$ представляет собой прямую сумму идеалов $\mathrm{sat}_{S_n}(\mathfrak{a}_n)$ (обратить внимание на то, что если $s \in S$ и $s_n \in S_n$ есть n-я проекция элемента s и если $x_n \in \mathrm{sat}_{S_n}(\mathfrak{a}_n)$ — такой элемент, что $s_n x_n \in \mathfrak{a}_n$, то $s^2 x_n \in \mathfrak{a}$). Получить отсюда, что A удовлетворяет аксиоме ($\mathrm{LA_I}$), но не удовлетворяет аксиоме ($\mathrm{LA_{II}}$) (воспользоваться упражнением 20б)).

г) Показать, что если A-модуль E удовлетворяет аксиоме ($\mathrm{LA_I}$), то любой подмодуль модуля E является пересечением некоторого (конечного или бесконечного) семейства примарных подмодулей модуля E (рассуждать так же, как в а), используя трансфинитную индукцию).

д) Пусть E — некоторый A-модуль конечного типа, $E' \subset E$ — подмодуль конечного типа. Для того чтобы E был ласкеровым, необходимо и достаточно, чтобы E' и E/E' обладали этим свойством. В частности, если кольцо A ласкерово, то любой A-модуль конечного типа ласкеров. Если E — ласкеров A-модуль, то $S^{-1}E$ является ласкеровым $S^{-1}A$-модулем для любой мультипликативной системы S кольца A.

¶ 24) Пусть в ласкеровом кольце A (упражнение 23) $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ — три различных простых идеала, для которых $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}_3$; пусть $x_2 \in \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_1$, $x_3 \in \mathfrak{p}_3 - \mathfrak{p}_2$. Заменяя при необходимости $\mathfrak{p}_2$ и $\mathfrak{p}_3$ на простые идеалы, содержащиеся в $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ соответственно и содержащие x_2 и x_3 соответственно, можно предполагать, что $\mathfrak{p}_2$ минимален в $\mathrm{Ass}_f(A/(\mathfrak{p}_1 + Ax_2))$, а $\mathfrak{p}_3$ минимален в $\mathrm{Ass}_f(A/(\mathfrak{p}_2 + Ax_3))$. Рассмотрим идеал $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 + x_2\mathfrak{p}_3$.

а) Показать, что $x_2 \notin \mathfrak{a}$ и $x_3^k \notin \mathfrak{a}$ для всякого целого $k > 0$; получить отсюда, что идеал $\mathfrak{a}$ не является примарным в A. Показать, что $\mathfrak{p}_2$ — минимальный элемент в множестве $\mathrm{Ass}_f(A/\mathfrak{a})$.

б) Пусть $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ — редуцированное примарное разложение идеала $\mathfrak{a}$ в A, и пусть $\mathfrak{p}_i'$ — корень идеала $\mathfrak{q}_i$; предположим, что $\mathfrak{p}_3 \not\subset \mathfrak{p}_i'$ для $1 \leqslant i \leqslant s$ и $\mathfrak{p}_3 \subset \mathfrak{p}_i'$ для $s+1 \leqslant i \leqslant n$. Показать, что обязательно $s < n$ и $x_2 \in \mathfrak{q}_i$ для $1 \leqslant i \leqslant s$. Показать, что существует такой индекс $i \geqslant s+1$, что $\mathfrak{p}_3 = \mathfrak{p}_i'$. (Рассуждать от противного: в противном случае существовал бы такой элемент $y \notin \mathfrak{p}_3$, что $y \in \mathfrak{q}_i$ при всяком $i \geqslant s+1$; тогда бы $x_2 y \in \mathfrak{a}$ и получилось бы, что это соотношение противоречит условию $y \notin \mathfrak{p}_3$.) Сделать вывод, что $\mathfrak{p}_3$ не является минимальным элементом в $\mathrm{Ass}_f(A/\mathfrak{a})$. Будем обозначать через $\mathfrak{q}_3'$ примарную компоненту идеала $\mathfrak{a}$ в кольце A, которая соответствует $\mathfrak{p}_3$ в приведенном выше разложении.

в) Пусть $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{q}_3'$; пусть, с другой стороны, $m > 0$ — такое целое число, что $x_3^m \in \mathfrak{q}_3'$, и пусть $\mathfrak{c} = \mathfrak{b} + Ax_3^{2m}$. Показать, что насыщение идеала $\mathfrak{c}$ относительно $\mathfrak{p}_3$ является $\mathfrak{p}_3$-примарным идеалом $\mathfrak{q}_3''$ (показать, что для любого элемента из $\mathfrak{p}_3$ некоторая его степень лежит в $\mathfrak{q}_3''$, используя тот факт, что насыщение идеала $\mathfrak{p}_2 + Ax_3$ относительно $\mathfrak{p}_3$ примарно). Доказать, с другой стороны, что $x_3^m \notin \mathfrak{q}_3''$ и $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{q}_3''$; следовательно, имеется два различных редуцированных примарных разложения идеала $\mathfrak{b}$.

¶ 25) Пусть A — ласкерово кольцо. Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в A, $\mathfrak{a} = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathfrak{q}_i$ — некоторое редуцированное примарное разложение идеала $\mathfrak{a}$ в A. Обозначим через $\mathfrak{p}_i$ корень идеала $\mathfrak{q}_i$; предположим, что минимальные элементы из $\mathrm{Ass}_f(A/\mathfrak{a})$ — это такие $\mathfrak{p}_i$, что $1 \leqslant i \leqslant s$, и пусть $s < n$. Положим

$$\mathfrak{b} = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant s} \mathfrak{q}_i, \quad \mathfrak{c} = \bigcap_{s+1 \leqslant i \leqslant n} \mathfrak{q}_i.$$

а) Показать, что существует такой элемент $x \in \mathfrak{c}$, для которого $x \notin \mathfrak{p}_i$ для $1 \leqslant i \leqslant s$ и $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap (\mathfrak{a} + Ax)$.

б) Предположим, например, что $\mathfrak{p}_{s+1}$ — минимальный элемент в $\mathrm{Ass}_f(A/\mathfrak{c})$. Показать, что $x\mathfrak{p}_{s+1} + \mathfrak{a} \neq Ax + \mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap (x\mathfrak{p}_{s+1} + \mathfrak{a})$. Кроме того, $\mathfrak{p}_{s+1}$ минимален в множестве $\mathrm{Ass}_f(A/\mathfrak{b})$, где $\mathfrak{b} = x\mathfrak{p}_{s+1} + \mathfrak{a}$. Показать, что насыщение идеала $\mathfrak{b}$ относительно $\mathfrak{p}_{s+1}$ отлично от $\mathfrak{q}_{s+1}$. (Заметить, что это насыщение не может содержать элемент x.)

¶ 26) Пусть A — ласкерово кольцо, в котором всякий идеал, отличный от A, обладает единственным редуцированным примарным разложением в A.

а) Показать, что для всякого идеала $\mathfrak{a} \neq A$ все элементы из $\mathrm{Ass}_f(A/\mathfrak{a})$ минимальны в этом множестве (воспользоваться упражнением 25б)). Пусть $\{0\} = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathfrak{q}_i$ — редуцированное примарное разложение в кольце A, и пусть $\mathfrak{p}_i$ — корень идеала $\mathfrak{q}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Показать, что любой простой идеал кольца A, отличный от $\mathfrak{p}_i$, максимален (воспользоваться упражнением 24в)). Если $\mathfrak{p}$ — простой идеал из A, $\mathfrak{q}$ — некоторый идеал, содержащийся в $\mathfrak{p}$ и такой, что $\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ — нильидеал в $A/\mathfrak{q}$, то показать, что всякий идеал $\mathfrak{a}$, для которого $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, является $\mathfrak{p}$-примарным. Вывести отсюда, что если какой-то из $\mathfrak{p}_i$ не максимален, то $\mathfrak{p}_i$ — единственный $\mathfrak{p}_i$-примарный идеал и $\mathfrak{p}_i^2 = \mathfrak{p}_i$ (воспользоваться упражнением 16).

б) Показать, что в кольце A любая возрастающая последовательность идеалов, равных своим корням, стационарна. Получить отсюда, что всякая строго возрастающая последовательность $(\mathfrak{a}_n)$ идеалов, в которой каждый фактор $\mathfrak{a}_n/\mathfrak{a}_{n-1}$ содержит элементы, не являющиеся нильпотентными в $A/\mathfrak{a}_{n-1}$, конечна. Сделать из этого вывод, что для всякого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A существует примарный идеал с корнем $\mathfrak{p}$, имеющий конечный тип. В частности, каждый из $\mathfrak{p}_i$, не являющийся максимальным, имеет конечный тип и, следовательно, содержит некоторый идемпотент e_i, который его порождает (гл. II, § 4, упражнение 15).

в) Показать, что для $i \neq j$ имеет место равенство $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j = A$ (рассмотреть $e_i + e_j - e_ie_j$, если $\mathfrak{p}_i$ и $\mathfrak{p}_j$ не максимальны). Вывести отсюда, что кольцо A изоморфно произведению конечного числа колец $A_i = A/\mathfrak{q}_i$, таких, что или A_i — локальное кольцо, максимальный идеал которого нильпотентен, или A_i — целостное кольцо, в котором всякий простой идеал, отличный от нуля, максимален и в котором всякий отличный от нуля идеал содержится только в конечном числе максимальных идеалов *(ср. § 1, упражнение 2).* Верно и обратное.

¶ 27) Пусть M — некоторый A-модуль и Q есть $\mathfrak{p}$-примарный подмодуль в M. Говорят, что Q имеет *показатель* m, если m — наименьшее целое число среди таких чисел k, что $\mathfrak{p}^k M \subset Q$ (ср. упражнение 3). Если не существует ни одного числа k, обладающего этим свойством, то Q называется подмодулем *с бесконечным показателем.* Если Q обладает конечным показателем, то говорят, что подмодуль Q *сильно примарен.*

а) Показать, что если $Q : \mathfrak{p} = Q$, то Q — модуль с бесконечным показателем и существует такое $\alpha \in \mathfrak{p}$, что $Q : (\alpha)$ отличается от Q и является $\mathfrak{p}$-примарным подмодулем в M с бесконечным показателем.

б) Привести пример кольца A и $\mathfrak{p}$-примарного идеала $\mathfrak{q}$ с бесконечным показателем и такого, что $\mathfrak{q} : \mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ (ср. § 1, упражнение 2).

в) Пусть K — поле, A — кольцо многочленов $K[X_n]_{n \in \mathbf{N}}$, $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A, порожденный элементами X_n и $\mathfrak{q}$ есть $\mathfrak{p}$-примарный идеал, порожденный их произведениями X_iX_j $(i \neq j)$ и элементами X_n^{n+1}. Показать, что для всякого $\alpha \in \mathfrak{p} - \mathfrak{q}$ идеал $\mathfrak{q} : (\alpha)$ имеет конечный показатель, что $\mathfrak{q} : \mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ и что $\mathfrak{q} : \mathfrak{p}$ является $\mathfrak{p}$-примарным идеалом с бесконечным показателем.

г) Пусть Q — некоторый $\mathfrak{p}$-примарный подмодуль модуля M с конечным показателем e. Показать, что подмодули $\mathfrak{p}^k M$ при $k < e$ все различны и что модули $Q : \mathfrak{p}^k$ при $k < e$ также все различны. Для любого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A показать, что или $Q : \mathfrak{a} = Q$ или $Q : \mathfrak{a}$ является $\mathfrak{p}$-примарным подмодулем модуля M, отличным от M и обладающим показателем $\leqslant e - 1$ (обратить внимание на то, что если $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, то $\mathfrak{p}^{e-1} M \subset Q : \mathfrak{a}$).

¶ 28) Говорят, что A-модуль E конечного типа *сильно ласкеров,* если всякий подмодуль в E допускает примарное разложение в E, все элементы которого сильно примарны (упражнение 27).

а) Показать, что, для того чтобы A-модуль E конечного типа был сильно ласкеровым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись аксиома $(\mathrm{LA}_{\mathrm{II}})$ из упражнения 23 и аксиома

(LA$_{\text{III}}$) для всякой последовательности $(\mathfrak{b}_k)$ идеалов кольца A и любого подмодуля F модуля E возрастающая последовательность подмодулей $F:(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 \dots \mathfrak{b}_k)$ стационарна.

(Чтобы показать, что эти условия необходимы, применить упражнение 27г). Для доказательства достаточности установить сначала, что из (LA$_{\text{III}}$) следует (LA$_{\text{I}}$), а затем, что из этой же аксиомы вытекает, что любой примарный идеал имеет конечный показатель, используя при этом упражнение 27а).)

б) Показать, что кольцо A, определенное в упражнении 23в), удовлетворяет аксиоме (LA$_{\text{III}}$).

в) Пусть K — поле, V — бесконечномерное векторное K-пространство, $A = K \oplus V$ — кольцо, умножение в котором определяется равенством $(a, x)(a', x') = (aa', ax' + a'x)$. Показать, что в A любой идеал, отличный от A, является сильно примарным, хотя A не нётерово.

г) Пусть E — некоторый A-модуль конечного типа и $E' \subset E$ — подмодуль конечного типа. Для того чтобы E был сильно ласкеровым, необходимо и достаточно, чтобы E' и E/E' обладали этим свойством. В частности, если кольцо A сильно ласкерово, то любой A-модуль конечного типа сильно ласкеров. Если E — сильно ласкеров A-модуль, то сильно ласкеровым будет $(S^{-1}A)$-модуль $S^{-1}E$ для всякой мультипликативной системы S кольца A.

д) Обобщить на случай сильно ласкеровых модулей упражнения 3 и 4.

¶ 29) Пусть A — сильно ласкерово кольцо (упражнение 28).

а) Пусть $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — два идеала в A, $\mathfrak{ab} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ — некоторое редуцированное примарное разложение $\mathfrak{ab}$ в A и $\mathfrak{c}$ — пересечение тех $\mathfrak{q}_i$, корни которых не содержат $\mathfrak{b}$. Показать, что $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{c}$ (если $\mathfrak{q}_i$ — такой идеал, что его корень $\mathfrak{p}_i$ не содержит $\mathfrak{b}$ и если $x \in \mathfrak{b}$ и $x \notin \mathfrak{p}_i$, то надо рассмотреть произведение $\mathfrak{a}x$).

б) Вывести из а), что существует три идеала $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}$ и целое число $s > 0$, такие, что $\mathfrak{a}^s \subset \mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}^s \subset \mathfrak{b}'$, $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^s \subset \mathfrak{c}$ и $\mathfrak{ab} = \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}' = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$.

в) Показать, что для любого конечного семейства $(\mathfrak{a}_k)$ идеалов кольца A существует такое целое число $m > 0$, что $\bigcap_k \mathfrak{a}_k^m \subset \prod_k \mathfrak{a}_k$ (применить б) и рассуждать с помощью индукции по числу идеалов $\mathfrak{a}_k$).

г) Показать, что для всякого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A пересечение $\mathfrak{b} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n$ есть идеал таких элементов $x \in A$, что $x \in x\mathfrak{a}$ (применить б) к произведению $(Ax)\mathfrak{a}$). Вывести отсюда, что $\mathfrak{b}$ есть пересечение примарных компонент $\{0\}$ (в некотором редуцированном примарном разложении этого идеала), корни которых пересекают $1 + \mathfrak{a}$.

д) Вывести из г), что для всякого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A пересечение символических степеней $\mathfrak{p}^{(n)}$ (упражнение 18б)) при $n \in \mathbf{N}$ представляет собой идеал таких элементов $x \in A$, что $xs = 0$ для некоторого $s \notin \mathfrak{p}$ (рассмотреть кольцо $A_{\mathfrak{p}}$).

30) Пусть M — некоторый A-модуль, и пусть N — подмодуль в M, допускающий редуцированное примарное разложение $N = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$; пусть $\mathfrak{p}_i$ — простой идеал, ассоциированный с подмодулем Q_i.

а) Показать, что если $\mathfrak{b}$ — идеал кольца A, не содержащийся ни в одном из $\mathfrak{p}_i$, то $N : \mathfrak{b} = N$ (ср. упражнение 17).

б) Если каждый подмодуль Q_i сильно примарен в M, то показать, что верно и обратное: если $N : \mathfrak{b} = N$, то $\mathfrak{b}$ не содержится ни в одном из $\mathfrak{p}_i$.

(Заметнть, что если $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}_i$ и $P = \bigcap_{j \neq i} Q_j$, то $\mathfrak{b}^r P \subset N$ для подходящего целого r, и вывести отсюда, что если бы $N : \mathfrak{b} = N$, то имело бы место равенство $P = N$.) Получить отсюда, что в этом случае существует такое $\beta \in \mathfrak{b}$, что $N : (\beta) = N$.

¶ 31) а) Пусть A — нётерово кольцо, $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в A и $\mathfrak{p}$ — простой идеал, содержащийся в $\mathfrak{m}$. Показать, что если отделимое пополнение $\widehat{A}$ кольца A относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии является целостным, то базис фильтра символических степеней $\mathfrak{p}^{(n)}$ идеала $\mathfrak{p}$ сходится к 0 в $\mathfrak{m}$-адической топологии кольца A. (Свести к случаю локального кольца A; пусть $\mathfrak{q}$ — простой идеал из $\widehat{A}$, след которого в A есть $\mathfrak{p}$, и для любого $n > 0$ пусть $c_n \notin \mathfrak{p}$ — такой элемент, что $c_n \mathfrak{p}^{(n)} \subset \mathfrak{p}^n$; показать, что $c_n \mathfrak{p}^{(n)} \widehat{A} \subset \mathfrak{q}^{(n)}$. Воспользоваться упражнением 29д), а также предложением 8 гл. III, § 2, n° 7.)

б) Пусть A — нётерово кольцо, $\mathfrak{n}$ — идеал в A, $\mathfrak{p}$ — минимальный простой идеал в $\mathrm{Ass}\,(A/\mathfrak{n})$ и $\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}$ — два максимальных идеала в A, содержащие $\mathfrak{p}$; обозначим через $A(\mathfrak{n})$, $A(\mathfrak{m}_0)$, $A(\mathfrak{m})$ отделимые пополнения кольца A относительно $\mathfrak{n}$-адической, $\mathfrak{m}_0$-адической и $\mathfrak{m}$-адической топологий соответственно. Пусть z — элемент из $A(\mathfrak{n})$, канонический образ которого в $A(\mathfrak{m}_0)$ равен нулю. Показать, что если кольцо $A(\mathfrak{m})$ — целостное, то канонический образ элемента z в $A(\mathfrak{m})$ также равен нулю. (Рассмотреть z как предел такой последовательности (x_n) элементов кольца A, что $x_n - x_m \in \mathfrak{n}^m$ при $n \geqslant m$ и $x_n \in \mathfrak{m}_0^n$; вывести отсюда, что x_m принадлежит замыканию идеала $\mathfrak{n}^m$ в $\mathfrak{m}_0$-адической топологии; с помощью упражнения 8 установить, что $x_m \in \mathfrak{p}^{(m)}$ при любом m; закончить доказательство с помощью а).)

в) Пусть A — кольцо Зарисского и $\mathfrak{r}$ — его идеал определения; предположим, что $\mathrm{Spec}\,(A)$ связен и что для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A отделимое пополнение $A(\mathfrak{m})$ кольца A относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии является целостным. Показать, что в этом случае пополнение $\widehat{A}$ кольца A относительно $\mathfrak{r}$-адической топологии также является целостным. (Показать, что для всякого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A канонический гомоморфизм $\widehat{A} \to A(\mathfrak{m})$ инъективен. Для этого можно предположить, что идеал $\mathfrak{r}$ представляет собой пересечение конечного числа простых идеалов, минимальных в $\mathrm{Ass}\,(A/\mathfrak{r})$, т. е. $\mathfrak{r} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_s$; показать, что из предположения на $\mathrm{Spec}\,(A)$ следует, что для каждого i существует максимальный идеал $\mathfrak{m}_i$, содержащий $(\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_{i-1}) + \mathfrak{p}_i$. Используя б), показать, что если канонический образ элемента $z \in \widehat{A}$ в $A(\mathfrak{m})$ равен нулю и если, например, $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{m}$, то канонический образ элемента z в каждом из $A(\mathfrak{m}_i)$ есть нуль, а после это установить, что канонический образ элемента z в $A(\mathfrak{m}')$ равен нулю при любом максимальном идеале $\mathfrak{m}'$ кольца A.)

32) Кольцо A называется *примарным,* если оно локально и его максимальный идеал $\mathfrak{m}$ является нильидеалом [1]). Тогда всякий идеал кольца A, содержащийся в $\mathfrak{m}$, является $\mathfrak{m}$-примарным в A.

а) Пусть A — сильно ласкерово примарное кольцо, так что, в частности, максимальный идеал $\mathfrak{m}$ нильпотентен. Показать, что если $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ — два идеала, содержащиеся в $\mathfrak{m}$, то обязательно $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} \neq \mathfrak{a}$ (воспользоваться упражнением 30б)).

б) Примарное нётерово кольцо является артиновым. Получить отсюда, что для всякого модуля M конечного типа над нётеровым кольцом A и любого $\mathfrak{p}$-примарного подмодуля N в M существует такое целое число m, что любая строго убывающая последовательность $(M_i/N)_{0 \leqslant i \leqslant k}$ подмодулей фактормодуля M/N, в которой M_i являются $\mathfrak{p}$-примарными, имеет длину

[1]) Для артиновых колец (коммутативных) это определение совпадает с тем, которое было дано в *Алгебре*, гл. VIII, § 6, упражнение 20.

$k \leqslant m$ (рассмотреть $A_{\mathfrak{p}}$-модуль $M_{\mathfrak{p}}$ и заметить, что $M_{\mathfrak{p}}/N_{\mathfrak{p}}$ аннулируется некоторой степенью идеала $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$).

33) Пусть A — коммутативное кольцо. Идеал $\mathfrak{a}$ кольца A называется *примальным*, если в кольце $A/\mathfrak{a}$ множество делителей нуля представляет собой некоторый идеал $\mathfrak{p}/\mathfrak{a}$; в этом случае $\mathfrak{p}$ — простой идеал.

а) Показать, что любой примарный идеал и любой неприводимый идеал являются примальными идеалами.

б) Пусть $\mathfrak{a}$ — такой идеал кольца A, что множество идеалов $\mathfrak{b}$, для которых $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} \neq \mathfrak{a}$, обладает максимальным элементом $\mathfrak{p}$; показать, что идеал $\mathfrak{p}$ прост, а идеал $\mathfrak{a}$ примален. * Привести пример примального идеала $\mathfrak{a}$, для которого предыдущее условие не имеет места (ср. § 1, упражнение 2).*

в) Описать примальные идеалы нётерова кольца A и привести пример примального идеала, не являющегося примарным (ср. § 1, упражнение 11б)).

34) Идеал $\mathfrak{a}$ коммутативного кольца A называется *квазипростым*, если для любой пары идеалов $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ кольца A из соотношения $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}$ следует, что $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ или $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}$; всякий простой идеал является квазипростым и любой квазипростой идеал неприводим. Если в кольце A справедлива китайская теорема об остатках, то показать, что любой неприводимый идеал квазипрост (*Алгебра*, гл. VI, § 1, упражнение 25).

35) Пусть K — поле, B — кольцо нормирования, группа порядков которого равна $\mathbf{R}$, образованное «формальными рядами» $\sum_x c_x T^x$, где $c_x \in K, x \in \mathbf{R}_+$ и множество элементов x, таких, что $c_x \neq 0$, вполне упорядочено; кольцо A, определенное в § 1, упражнение 2, является подкольцом в B, и кольцо B представляет собой плоский A-модуль. Если C есть A-модуль, определенный в § 1, упражнение 2, то показать, что $\mathrm{Ass}_B(C \otimes_A B) \neq \varnothing$, хотя $\mathrm{Ass}_A(C) = \varnothing$ (рассмотреть элемент из $C \otimes_A B = B/\mathfrak{a}B$, являющийся каноническим образом некоторого элемента из B с нормированием α).

§ 3. Примарное разложение в градуированных модулях

1. Простые идеалы, ассоциированные с градуированным модулем

Предложение 1. *Пусть Δ — коммутативная группа без кручения, A — градуированное кольцо типа Δ и M — градуированный A-модуль типа Δ. Всякий простой идеал, ассоциированный с модулем M, является градуированным и аннулирует некоторый однородный элемент модуля M.*

Известно, что Δ можно наделить структурой совершенного порядка, согласованной со структурой группы (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 11, n° 4, lemme 2). Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал, ассоциированный с M, аннулирующий некоторый элемент $x \in M$, и пусть $(x_i)_{i \in \Delta}$ — семейство однородных компонент элемента x; пусть $i(1) < i(2) < i(r)$ — те значения i, для которых $x_i \neq 0$. Рассмотрим элемент $a \in \mathfrak{p}$, у которого $(a_i)_{i \in \Delta}$ — семейство однородных компонент. Мы сейчас докажем, что $a_i \in \mathfrak{p}$ при всяком $i \in \Delta$, из чего будет следовать, что $\mathfrak{p}$ — *градуированный* идеал.

Проведем индукцию по числу индексов i, для которых $a_i \neq 0$. Наше утверждение очевидно, если это число равно 0. Если оно

отлично от 0, то пусть m — наибольший среди индексов i, для которых $a_i \neq 0$. Если мы докажем, что $a_m \in \mathfrak{p}$, то предположение индукции, примененное к $a - a_m$, позволит завершить доказательство. Но $ax = 0$; для всякого $j \in \Delta$, записывая, что однородная компонента степени $m + j$ элемента ax равна 0, мы получаем равенство $\sum_{i \in \Delta} a_{m-i} x_{j+i} = 0$; отсюда следует, что $a_m x_j$ является линейной комбинацией элементов x_i с индексами $i > j$. В частности, получается, что $a_m x_{i(r)} = 0$, откуда с помощью индукции вниз по $n < r$, получаем, что $a_m^{r-n+1} x_{i(n)} = 0$. Следовательно, $a_m^r x = 0$, откуда $a_m^r \in \mathfrak{p}$ и, так как $\mathfrak{p}$ — простой идеал, $a_m \in \mathfrak{p}$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{p}$ является аннулятором некоторого однородного элемента модуля M. Положим $\mathfrak{b}_n = \mathrm{Ann}(x_{i(n)})$ для $1 \leqslant n \leqslant r$. Для всякого однородного элемента b идеала $\mathfrak{p}$ и всякого n однородная компонента элемента bx степени $i(n) + \deg(b)$ равна $bx_{i(n)}$, следовательно, $bx_{i(n)} = 0$ и $b \in \mathfrak{b}_n$. Так как $\mathfrak{p}$ порождается однородными элементами, $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{b}_n$. С другой стороны, очевидно, что $\bigcap_{n=1}^{r} \mathfrak{b}_n \subset \mathrm{Ann}(x) = \mathfrak{p}$; поскольку идеал $\mathfrak{p}$ прост, существует такое число n, что $\mathfrak{b}_n \subset \mathfrak{p}$ (гл. II, § 1, n° 1, предложение 1), откуда $\mathfrak{b}_n = \mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(x_{i(n)})$, чем и заканчивается доказательство.

Следствие. *Для всякого простого (обязательно градуированного) идеала $\mathfrak{p}$, ассоциированного с градуированным A-модулем M, существует такой индекс $k \in \Delta$, что градуированный A-модуль $(A/\mathfrak{p})(k)$, полученный из градуированного A-модуля $A/\mathfrak{p}$ сдвигом степеней на k (Algébre*, chap. II, 3e éd., § 11, n° 2) *изоморфен некоторому градуированному подмодулю модуля M.*

В самом деле, в обозначениях доказательства предложения 1 рассмотрим гомоморфизм, полученный переходом к фактормодулю из гомоморфизма $a \to ax_{i(n)}$ модуля A в M; это отображение является градуированным гомоморфизмом степени $i(n)$, так что при переходе к фактормодулю оно дает биективный градуированный гомоморфизм степени $i(n)$ модуля $A/\mathfrak{p}$ на некоторый градуированный подмодуль модуля M.

Предложение 2. *Пусть Δ — коммутативная группа без кручения, A — нётерово градуированное кольцо типа Δ и M — некоторый A-модуль конечного типа, также градуированный типа Δ. Тогда существует такой композиционный ряд $(M_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, образованный градуированными подмодулями модуля M, что для $0 \leqslant i \leqslant n-1$ градуированный модуль M_i/M_{i+1} изоморфен*

сдвинутому градуированному модулю $(A/\mathfrak{p}_i)(k_i)$, *где* $\mathfrak{p}_i$ — *градуированный простой идеал кольца* A *и* $k_i \in \Delta$.

Достаточно воспроизвести рассуждение теоремы 1 § 1, n° 4, положив на этот раз $\mathfrak{S}$ равным множеству градуированных подмодулей модуля M, обладающих композиционным рядом с указанными в формулировке свойствами. Доказательство заканчивается с помощью следствия предложения 1.

2. *Примарные подмодули, соответствующие градуированным простым идеалам*

Предложение 3. *Пусть* Δ — *коммутативная группа без кручения,* A — *нётерово градуированное кольцо типа* Δ, $\mathfrak{p}$ — *градуированный идеал в* A *и* M — *градуированный* A*-модуль типа* Δ, *отличный от нуля. Предположим, что для любого однородного элемента* a *идеала* $\mathfrak{p}$ *гомотетия модуля* M, *соответствующая элементу* a, *почти нильпотентна и что для всякого однородного элемента* b *из* $A - \mathfrak{p}$ *гомотетия модуля* M, *соответствующая элементу* b, *инъективна. Тогда* $\mathfrak{p}$ — *простой идеал и подмодуль* $\{0\}$ *модуля* M *является* $\mathfrak{p}$*-примарным.*

Достаточно показать, что $\mathrm{Ass}(M) = \{\mathfrak{p}\}$ (§ 2, n° 1, предложение 1). Пусть $\mathfrak{q}$ — какой-нибудь простой идеал, ассоциированный с модулем M; это градуированный идеал, являющийся аннулятором некоторого однородного элемента $x \neq 0$ модуля M (n° 1, предложение 1). Для всякого однородного элемента a идеала $\mathfrak{q}$ имеет место равенство $ax = 0$, следовательно, гомотетия модуля, соответствующая элементу a, не инъективна, в силу чего $a \in \mathfrak{p}$. Обратно, пусть b — однородный элемент идеала $\mathfrak{p}$; существует такое целое число $n > 0$, что $b_x^n = 0$, откуда $b^n \in \mathrm{Ann}(x) = \mathfrak{q}$ и, так как $\mathfrak{q}$ — простой идеал, $b \in \mathfrak{q}$. Поскольку идеалы $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ порождаются своими однородными элементами, имеем $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$, в силу чего $\mathrm{Ass}(M) \subset \{\mathfrak{p}\}$. Поскольку $M \neq \{0\}$, $\mathrm{Ass}(M) \neq \varnothing$ (§ 1, n° 1, следствие 1 предложения 2), откуда $\mathrm{Ass}(M) = \{\mathfrak{p}\}$.

Предложение 4. *Пусть* Δ — *коммутативная группа без кручения,* A — *нётерово градуированное кольцо типа* Δ *и* M — *градуированный* A*-модуль типа* Δ. *Пусть* $\mathfrak{p}$ — *простой идеал кольца* A, N — *подмодуль в* M, *являющийся* $\mathfrak{p}$*-примарным относительно* M.

(i) *Наибольший градуированный идеал* $\mathfrak{p}'$ *кольца* A, *содержащийся в* $\mathfrak{p}$ (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 11, n° 3), *является простым.*

(ii) *Наибольший градуированный подмодуль* N' *модуля* N *является* $\mathfrak{p}'$*-примарным относительно* M.

Известно (loc. cit.), что однородные элементы идеала $\mathfrak{p}'$ (соответственно модуля N') — это не что иное, как однородные элементы идеала $\mathfrak{p}$ (соответственно модуля N). Пусть a — однородный элемент идеала $\mathfrak{p}$; если x — однородный элемент модуля M, то существует такое целое число $n > 0$, что $a^n x \in N$; поскольку $a^n x$ — однородный элемент, $a^n x \in N'$, а так как любой $y \in M$ представляет собой сумму конечного числа однородных элементов, отсюда следует, что существует такое целое число $q > 0$, что $a^q y \in N'$, так что гомотетия, соответствующая a, модуля M/N' почти нильпотентна.

Рассмотрим теперь однородный элемент b множества $A - \mathfrak{p}'$; прежде всего, $b \notin \mathfrak{p}$, так как b однороден. Пусть x — такой элемент модуля M, что $bx \in N'$, и пусть $(x_i)_{i \in \Delta}$ — семейство однородных компонент элемента x. Поскольку модуль N' градуирован, для любого i имеет место включение $bx_i \in N'$; следовательно, $bx_i \in N$ и, так как $b \notin \mathfrak{p}$, отсюда мы заключаем, что $x_i \in N$; поскольку элемент x_i однороден, $x_i \in N'$, откуда $x \in N'$ и гомотетия модуля M/N', соответствующая элементу b, инъективна. Предложение 4 следует теперь из предложения 3, примененного к $\mathfrak{p}'$ и M/N'.

3. *Примарное разложение в градуированных модулях*

Предложение 5. *Пусть Δ — коммутативная группа без кручения, A — нётерово градуированное кольцо типа Δ, M — градуированный A-модуль типа Δ, N — градуированный подмодуль в M и $N = \bigcap_{i \in I} Q_i$ — примарное разложение модуля N в модуле M.*

(i) *Пусть Q_i' — наибольший градуированный подмодуль модуля M, содержащийся в Q_i. Тогда модули Q_i' примарны и $N = \bigcap_{i \in I} Q_i'$.*

(ii) *Если примарное разложение $N = \bigcap_{i \in I} Q_i$ редуцировано, то редуцировано и примарное разложение $N = \bigcap_{i \in N} Q_i'$ и для любого $i \in I$ простые идеалы, соответствующие модулям Q_i и Q_i', равны.*

(iii) *Если модуль Q_i соответствует простому идеалу $\mathfrak{p}_i$, являющемуся минимальным элементом множества* $\mathrm{Ass}(M/N)$, *то Q_i — градуированный подмодуль модуля M.*

Было показано (n° 2, предложение 4), что модули Q_i' примарны относительно M и $N \subset Q_i' \subset Q_i$, чем и доказывается (i). Предложение 4 n° 2 показывает также, что простой идеал $\mathfrak{p}_i'$,

соответствующий модулю Q_i', является небольшим градуированным идеалом, содержащимся в простом идеале $\mathfrak{p}_i$, соответствующем модулю Q_i. Если разложение $N = \bigcap_{i \in I} Q_i$ редуцировано, то $\mathfrak{p}_i \in \mathrm{Ass}(M/N)$ при любом i (§ 2, n° 3, предложение 4), следовательно, $\mathfrak{p}_i$ является градуированным идеалом (n° 1, предложение 1) и тем самым $\mathfrak{p}_i' = \mathfrak{p}_i$. Таким образом, $\mathrm{Ass}(M/N) = \bigcup_{i \in I} \{\mathfrak{p}_i'\}$ (§ 2, n° 3, предложение 4), чем и доказывается, что разложение $N = \bigcap_{i \in I} Q_i'$ редуцировано (§ 2, n° 3, предложение 4). Наконец, если $\mathfrak{p}_i$ — минимальный элемент множества $\mathrm{Ass}(M/N)$, то $Q_i' = Q_i$ в силу предложения 5 § 2, n° 3.

Упражнения

1) В условиях предложения 1 n° 1 показать, что любой простой идеал $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_f(M)$ (§ 2, упражнение 17) градуирован и является минимальным элементом в множестве простых идеалов, содержащих аннулятор некоторого однородного элемента из M. (Сначала доказать, что наибольший градуированный идеал $\mathfrak{p}'$, содержащийся в простом идеале $\mathfrak{p}$ кольца A, прост, для чего заметить, что если произведение двух элементов x, y принадлежит $\mathfrak{p}'$, то так же обстоит дело и с произведением их однородных компонент, отличных от нуля и имеющих наибольшую степень. Далее заметить, что если простой идеал содержит аннулятор элемента $z \in M$, то он содержит также и аннулятор по крайней мере одной однородной компоненты элемента z, отличной от нуля.)

2) Пусть в градуированном кольце A типа Δ (где Δ не имеет кручения) $\mathfrak{p}$ является минимальным элементом в множестве простых идеалов кольца A; $\mathfrak{p}$ обязательно градуирован (упражнение 1). Показать, что для любого однородного элемента $t \in \mathfrak{p}$ существует такой однородный элемент $s \notin \mathfrak{p}$ и такое целое число $n > 0$, что $st^n = 0$. Получить отсюда обобщения предложений 3, 4 и 5 на случай градуированных, но не обязательно нётеровых колец (с учетом определений из § 2, упражнений 12 и 20).

3) Пусть A — градуированное кольцо типа Δ (Δ без кручения), M — градуированный A-модуль конечного типа, являющийся сильно ласкеровым (§ 2, упражнение 28). Показать, что подмодули $Q(\mathfrak{p}) = Q(\mathfrak{p}, e_{\mathfrak{p}}(M))$ (где $\mathfrak{p}$ пробегает множество $\mathrm{Ass}_f(M)$), определенные в упражнении 4 § 2, являются градуированными.

ГЛАВА V[1])

ЦЕЛЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Если явно не оговорено противное, то все кольца и алгебры, рассматриваемые в этой главе, предполагаются коммутативными и обладающими единичным элементом; относительно всех гомоморфизмов колец предполагается, что они переводят единичный элемент в единичный. Под подкольцом A подразумевается кольцо, содержащееся в A и содержащее единичный элемент из A.

§ 1. Понятие целого элемента

1. Элементы, целые над кольцом

ТЕОРЕМА 1. *Пусть A — кольцо (коммутативное), R — алгебра над A* (не обязательно коммутативная) *и x — элемент из R. Следующие свойства эквивалентны:*

(E_I) *Элемент x является корнем унитарного многочлена из кольца многочленов $A[X]$.*

(E_{II}) *Подалгебра $A[x]$ алгебры R представляет собой A-модуль конечного типа.*

(E_{III}) *Существует точный модуль над кольцом $A[x]$, являющийся A-модулем конечного типа.*

Докажем сначала, что из (E_I) следует (E_{II}). Пусть

$$X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n$$

— унитарный многочлен из $A[X]$, корнем которого является x; для всякого целого числа $q \geqslant 0$ через M_q обозначим A-подмодуль алгебры R, порожденный элементами $1, x, \ldots, x^{n+q}$. Тогда

$$x^{n+q} = -a_1x^{n+q-1} - \ldots - a_nx^q \in M_{q-1}$$

для любого $q \geqslant 1$, откуда индукцией по q получается, что

$$M_q = M_{q-1} = \ldots = M_0.$$

Мы заключаем отсюда, что модуль $A[x]$ равен модулю M_0 и, следовательно, является A-модулем конечного типа.

[1]) Результаты этой главы не зависят ни от одной книги, кроме книг I—VI, а также от § 4 гл. I и § 5 гл. III.

Так как коммутативное кольцо $A[x]$ является точным модулем над самим собой, то из (E_{II}) следует (E_{III}).

Наконец, тот факт, что из (E_{III}) следует (E_I), вытекает из следующей более точной леммы:

Лемма 1. *Пусть A — некоторое кольцо, R — алгебра над A* (не обязательно коммутативная) *и x — элемент из R. Пусть M — точный модуль над кольцом $A[x]$, являющийся A-модулем конечного типа. Если $\mathfrak{q}$ — такой идеал в A, что $xM \subset \mathfrak{q}M$, то элемент x является корнем унитарного многочлена с коэффициентами из кольца A, все коэффициенты которого, за исключением старшего, принадлежат идеалу $\mathfrak{q}$.*

В самом деле, пусть $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — такое семейство элементов модуля M, что $M = \sum_{i=1}^{n} Au_i$. Для каждого индекса i существует по условию такое конечное семейство $(q_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant n}$ элементов из $\mathfrak{q}$, что

$$xu_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}u_j \quad \text{для } 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Следовательно (*Algébre*, chap. III, 3e éd., § 8), если d — определитель матрицы $(q_{ij} - \delta_{ij}x)$, элементы которой лежат в $A[x]$ (δ_{ij} обозначает индекс Кронекера), то $du_i = 0$ для любого i, так что $dM = 0$; поскольку предполагается, что модуль M точен над кольцом $A[x]$, то обязательно получается равенство $d = 0$. Это означает, что x является корнем многочлена $\det(q_{ij} - \delta_{ij}X)$ из кольца $A[X]$, который с точностью до знака есть унитарный многочлен, коэффициенты которого, за исключением старшего, принадлежат $\mathfrak{q}$.

Определение. *Пусть A — кольцо, R — некоторая A-алгебра* (не обязательно коммутативная). *Элемент $x \in R$ называется целым над кольцом A, если он удовлетворяет эквивалентным условиям* (E_I), (E_{II}) *и* (E_{III}) *теоремы* 1.

Соотношение типа $P(x) = 0$, где P — *унитарный* многочлен кольца $A[X]$, называется *уравнением целой зависимости* с коэффициентами в A.

Примеры. 1) Пусть K — поле и R — некоторая K-алгебра; высказывание, что элемент $x \in R$ является целым над K, равносильно тому, что элемент x является корнем многочлена из $K[X]$, *не являющегося константой*; обобщая терминологию, введенную в том случае, когда R является *расширением* K (*Алгебра*, гл. V, § 3, n° 3), говорят также, что элементы $x \in R$, целые

над K, являются *алгебраическими* элементами алгебры R над полем K.

*) 2) Элементы из $\mathbf{Q}(i)$, целые над $\mathbf{Z}$, — это элементы вида $a+ib$ с $a\in\mathbf{Z}$ и $b\in\mathbf{Z}$ (*целые гауссовы числа*); элементы из $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$, целые над $\mathbf{Z}$, — это элементы вида $(a+b\sqrt{5})/2$, где a и b принадлежат кольцу $\mathbf{Z}$ и являются или оба четными или оба нечетными (по поводу этих двух примеров см. упражнение 1). *

3) Комплексные числа, являющиеся целыми над $\mathbf{Z}$, называются *целыми алгебраическими числами*.

Замечания. 1) Пусть A' — подкольцо алгебры R (содержащееся в центре R), являющееся образом кольца A относительно гомоморфизма колец $A\to R$, определяющего на R структуру A-алгебры. Ясно, что свойство некоторого элемента из R быть целым над A эквивалентно его свойству быть целым над A'.

2) Пусть R' — некоторая A-подалгебра в R; элементы из R', целые над A, — это не что иное, как элементы из R, целые над A и принадлежащие R'; благодаря этому обстоятельству часто оказывается возможным не выделять специально ту алгебру, которой принадлежит целый над A элемент, если только это не приводит к путанице.

Предложение 1. *Пусть A — кольцо, R — алгебра над A* (не обязательно коммутативная) *и x — элемент из R. Для того чтобы x был целым над A, необходимо и достаточно, чтобы кольцо $A[x]$ содержалось в некоторой подалгебре R' алгебры R, являющейся A-модулем конечного типа.*

Очевидно, что, в силу свойства (E_{II}), это условие необходимо; оно достаточно в силу условия (E_{III}), так как R' представляет собой точный $A[x]$-модуль (ибо он содержит единичный элемент из R).

Следствие. *Пусть A — нётерово кольцо, R — некоторая A-алгебра* (не обязательно коммутативная) *и x — элемент из R. Для того чтобы x был целым над A, необходимо и достаточно, чтобы существовал A-подмодуль конечного типа алгебры R, содержащий $A[x]$.*

Действительно, это условие необходимо в силу (E_{II}); оно достаточно, так как если $A[x]$ является A-подмодулем некоторого A-модуля конечного типа, то $A[x]$ — также A-модуль конечного типа (*Алгебра*, гл. VIII, § 2, п° 3, предложение 7).

Z В этой формулировке нельзя опустить предположение, что A нётерово (упражнение 2).

Определение 2. *Пусть A — некоторое кольцо. Говорят, что A-алгебра R* (не обязательно коммутативная) *является целой*

над A, если каждый элемент из R является целым над A. Алгебра R называется конечной над A, если R является A-модулем конечного типа.

Из предложения 1 следует, что любая конечная A-алгебра будет *целой*; когда кольцо R коммутативно и является конечной A-алгеброй, оно является, очевидно, A-алгеброй *конечного типа*; обратное неверно.

Пример. 4) Если M — некоторый A-модуль конечного типа, то алгебра $\mathrm{End}_A(M)$ эндоморфизмов модуля M является целой над кольцом A в силу ($\mathrm{E}_{\mathrm{III}}$); в частности, для всякого целого числа n алгебра матриц $\mathbf{M}_n(A) = \mathrm{End}(A^n)$ является целой (и даже конечной) над A.

Предложение 2. *Пусть A, A' — два кольца, R — некоторая A-алгебра, R' — некоторая A'-алгебра* (не обязательно коммутативные), *$f\colon A \to A'$ и $g\colon R \to R'$ — два таких гомоморфизма колец, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ R & \xrightarrow{g} & R' \end{array}$$

коммутативна. Если элемент $x \in R$ является целым над A, то и $g(x)$ является целым над A'.

Действительно, если $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ при $a_i \in A$ для $1 \leqslant i \leqslant n$, то отсюда следует, что

$$(g(x))^n + f(a_1)\,(g(x))^{n-1} + \ldots + f(a_n) = 0.$$

Следствие 1. *Пусть A — кольцо, B — некоторая A-алгебра (коммутативная) и C — некоторая B-алгебра* (не обязательно коммутативная). *Тогда любой элемент $x \in C$, целый над A, является целым и над B.*

Следствие 2. *Пусть K — поле, L — расширение K и x, x' — два элемента из L, сопряженные над K* (*Алгебра*, гл. V, § 6, п° 2). *Если A — подкольцо в K и если x — целый над A элемент, то и x' является целым над A.*

Действительно, существует K-изоморфизм f расширения $K(x)$ на расширение $K(x')$, при котором $f(x) = x'$, а элементы из A инвариантны относительно f.

Следствие 3. *Пусть A — кольцо, B — некоторая A-алгебра (коммутативная) и C — некоторая B-алгебра* (не обязательно коммутативная). *Если алгебра C является целой над A, то C является целой и над B.*

Предложение 3. *Пусть* $(R_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *— конечное семейство* A*-алгебр* (не обязательно коммутативных), *и пусть* $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$ *— их произведение. Для того чтобы элемент* $x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *из* R *был целым над* A*, необходимо и достаточно, чтобы целым над* A *был каждый из элементов* x_i*. Для того чтобы кольцо* R *было целым над* A*, необходимо и достаточно, чтобы целым над* A *было каждое из колец* R_i*.*

Достаточно, очевидно, доказать первое утверждение. Условие необходимо в силу предложения 2. Обратно, если каждый из x_i цел над A, то подалгебра $A[x_i]$ алгебры R_i является A-модулем конечного типа, поэтому тем же свойством обладает и подалгебра $\prod_{i=1}^{n} A[x_i]$ в R. Поскольку $A[x]$ содержится в этой подалгебре, элемент x является целым над A в силу предложения 1.

Предложение 4. *Пусть* A *— кольцо,* R *— некоторая* A*-алгебра* (не обязательно коммутативная), $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *— конечное семейство элементов из* R*, являющихся попарно перестановочными. Если для каждого* i *элемент* x_i *цел над* $A[x_1, \ldots, x_{i-1}]$ *(и, в частности, если все* x_i *целы над* A*), то подалгебра* $A[x_1, \ldots, x_n]$ *из* R *является* A*-модулем конечного типа.*

Будем рассуждать индукцией по n, учитывая, что при $n = 1$ наше утверждение совпадает со свойством (E_{II}). Из предположения индукции следует, что $B = A[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ является A-модулем конечного типа; поскольку x_n цел над B, модуль $B[x_n] = A[x_1, \ldots, x_n]$ имеет конечный тип над кольцом B, а потому и над кольцом A (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 1, n° 13, proposition 25).

Следствие 1. *Пусть* A *— кольцо и* R *— некоторая* A*-алгебра* (*коммутативная*)*. Множество целых элементов кольца* R *над* A *является подалгеброй в* R*.*

Действительно, если x, y — два элемента кольца R, целые над A, то из предложения 4 вытекает, что алгебра $A[x, y]$ является A-модулем конечного типа; поскольку она содержит $x + y$ и xy, следствие получается из предложения 1.

Z В некоммутативной алгебре сумма и произведение целых над A элементов не обязаны быть целыми над A (упражнение 4).

Следствие 2. *Пусть* A *— кольцо,* R *— некоторая* A*-алгебра* (не обязательно коммутативная), E *— множество элементов*

из R, являющихся попарно перестановочными и целыми над A. Тогда A-подалгебра B в R, порожденная множеством E, является целой над A.

Действительно, каждый элемент из B принадлежит некоторой A-подалгебре алгебры B, порожденной конечным подмножеством множества E.

Замечание. 3) Из предложения 4 следует, что всякая *коммутативная* A-алгебра, целая над A, является объединением фильтрующегося по возрастанию семейства *конечных* над A подалгебр.

Предложение 5. *Пусть A — кольцо, A' и R — две A-алгебры (коммутативные). Если R является целой над A, то $R \otimes_A A'$ является целой над A'.*

В самом деле, рассмотрим произвольный элемент $x' = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes a'_i$ из $R \otimes_A A'$, где x_i принадлежат R, а a'_i принадлежат A'. Поскольку $x_i \otimes a'_i = (x_i \otimes 1)\, a'_i$ и элементы $x_i \otimes 1$ являются целыми над A' (предложение 2), то целым над A' будет и x.

Следствие. *Пусть R — кольцо, а A, B, C — такие подкольца в R, что $A \subset B$. Если B является целым над A, то $C[B]$ будет целым над $C[A]$.*

Действительно, кольцо $B \otimes_A C[A]$ будет целым над $C[A]$ в силу предложения 5, так что целым над $C[A]$ является и канонический образ $C[B]$ кольца $B \otimes_A C[A]$ в кольце R (рассматриваемом как A-алгебра) в силу предложения 2.

Предложение 6. *Пусть A — кольцо, B — некоторая A-алгебра (коммутативная) и C — некоторая B-алгебра* (не обязательно коммутативная). *Если алгебра B целая над A, а C — целая над B, то C является целой над A.*

Достаточно убедиться, что всякий $x \in C$ является целым над A. По условию существует унитарный многочлен $X^n + b_1 X^{n-1} + \ldots + b_n$ с коэффициентами в B, для которого элемент x является корнем; в таком случае x будет целым над $B' = A[b_1, \ldots, b_n]$ и, следовательно, кольцо $B'[x]$ является B'-модулем конечного типа. Но так как B — целое над A, B' представляет собой A-модуль конечного типа (предложение 4); отсюда следует, что $B'[x]$ является A-модулем конечного типа (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 1, n° 13, proposition 25), так что элемент x цел над A.

Следствие. *Пусть A — кольцо и R, R' — две A-алгебры (коммутативные), целые над A. Тогда алгебра $R \otimes_A R'$ является целой над A.*

Действительно, алгебра $R \otimes_A R'$ является целой над R' (предложение 5), следовательно, утверждение вытекает из предложения 6.

2. Целое замыкание кольца. Целозамкнутые кольца

Определение 3. *Пусть A — кольцо и R — некоторая A-алгебра (коммутативная). Тогда A-подалгебра A' алгебры R, образованная всеми целыми над A элементами из R* (n° 1, следствие 1 предложения 4), *называется целым замыканием кольца A в алгебре R. Если A' равно каноническому образу кольца A в R, то говорят, что A целозамкнуто в R.*

Замечания. 1) Если $h\colon A \to R$ — гомоморфизм колец, определяющий структуру A-алгебры на R, то целое замыкание кольца A в R совпадает с целым замыканием кольца $h(A)$ в R. С другой стороны, если R' обозначает некоторую подалгебру в R, то целое замыкание кольца A в R' равно $A' \cap R'$.

2) Если A — поле, то целое замыкание A' поля A в R образовано *алгебраическими* над A элементами из R (n° 1, пример 1); обобщая терминологию, употребляемую для расширений полей (*Алгебра*, гл. V, § 3, n° 3), мы говорим в этом случае, что A' является *алгебраическим замыканием* поля A в алгебре R и что A *алгебраически замкнуто* в R, если $A' = A$.

Определение 4. *Если A — целостное кольцо, то целым замыканием кольца A называется целое замыкание этого кольца в его поле частных*[1]). *Говорят, что некоторое кольцо целозамкнуто, если оно целостное и равно своему целому замыканию.*

Z

Следует подчеркнуть, что целозамкнутое кольцо не обязательно является целозамкнутым в любом кольце, его содержащем, как показывает пример алгебранчески незамкнутого поля.

Предложение 7. *Пусть A — кольцо и R — некоторая A-алгебра. Целое замыкание A' кольца A в R является целозамкнутым подкольцом в R.*

Действительно, целое замыкание подкольца A' в R является целым над A в силу предложения 6 n° 1; следовательно, оно равно A'.

---

[1]) В дальнейшем, если не указано, в каком кольце берется целое замыкание, то имеется в виду целое замыканне в только что определенном смысле. — *Прим. ред.*

Следствие. *Целое замыкание целостного кольца A является целозамкнутым кольцом.*

Действительно, пусть K — поле частных кольца A и B — целое замыкание кольца A. Ясно, что K является полем частных B и достаточно применить предложение 7 к $R = K$.

Предложение 8. *Пусть R — кольцо, $(B_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство подколец в R, и пусть для каждого $\lambda \in L$ через A_λ обозначено некоторое подкольцо в B_λ. Если каждое из A_λ целозамкнуто в B_λ, то $A = \bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda$ целозамкнуто в $B = \bigcap_{\lambda \in L} B_\lambda$.*

Это немедленно следует из определения 3 и из следствия 1 предложения 2 n° 1.

Следствие. *Любое пересечение непустого семейства $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ целозамкнутых подколец целостного кольца A является целозамкнутым кольцом.*

Достаточно применить предложение 8, взяв в качестве R поле частных кольца K, а в качестве B_λ — поле частных кольца A_λ^*, $\lambda \in L$, и заметив, что всякое подкольцо в $B = \bigcap_{\lambda \in L} B_\lambda$, целозамкнутое в B, a fortiori является целозамкнутым, так как его поле частных содержится в B.

Предложение 9. *Пусть A — кольцо, $(R_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — конечное семейство A-алгебр, A_i' — целое замыкание кольца A в R_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Тогда целое замыкание кольца A в $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$ равно $\prod_{i=1}^{n} A_i'$.*

Это непосредственное следствие предложения 3 n° 1.

Следствие 1. *Пусть A — редуцированное нётерово кольцо, $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — различные минимальные простые идеалы в нем, K_i — поле частных целостного кольца $A/\mathfrak{p}_i$ (канонически изоморфное локальному кольцу A (гл. IV, § 2, n° 5, предложение 10) и A_i' — целое замыкание кольца A в K_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Тогда канонический изоморфизм полного кольца частных B кольца A на $\prod_{i=1}^{n} K_i$ (loc. cit.) переводит целое замыкание кольца A в кольце B на произведение колец $\prod_{i=1}^{n} A_i'$.*

Следствие 2. *Для того чтобы редуцированное нётерово кольцо было целозамкнутым в своем полном кольце частных, необходимо и достаточно, чтобы оно было прямым произведением (нётеровых) целозамкнутых колец.*

3. Примеры целозамкнутых колец

Предложение 10. *Любое кольцо главных идеалов является целозамкнутым.*

Пусть A — кольцо главных идеалов, K — его поле частных и x — произвольный элемент из K. Существуют два взаимно простых элемента a, b кольца A, для которых $x = ab^{-1}$ (*Алгебра*, гл. VII, § 1, n° 2, предложение 1, и гл. VI, § 1, n° 11, предложение 9 (ДЕЛ)). Если x цел над A, то он является корнем многочлена $X^n + c_1X^{n-1} + \ldots + c_n$ кольца $A[X]$. В таком случае $a^n = b(-c_1a^{n-1} - \ldots - c_nb^{n-1})$, откуда следует, что b делит a^n. Так как элементы a и b взаимно просты, из этого вытекает, что элемент b обратим в A (*Алгебра*, гл. VI, § 1, n° 12, следствие 1 предложения 11 (ДЕЛ)); следовательно, $x \in A$.

Лемма 2. *Пусть R — некоторое кольцо и P — унитарный многочлен из $R[X]$. Тогда существует такое кольцо R', содержащее R, что в кольце многочленов $R'[X]$ многочлен P является произведением унитарных многочленов степени* 1.

Проведем индукцию по степени n многочлена P. При $n = 0$ и $n = 1$ лемма тривиальна. Следовательно, предположим, что $n > 1$. Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в $R[X]$, порожденный элементом P, и пусть f — канонический гомоморфизм кольца $R[X]$ на $B = R[X]/\mathfrak{a}$. Так как многочлен P унитарен, для всякого многочлена $Q \in R[X]$ имеет место равенство $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$, откуда следует, что $\mathfrak{a} \cap R = 0$; ограничение гомоморфизма f на кольцо R является, таким образом, инъективным. Отождествляя кольцо R с подкольцом $f(R)$ в B при помощи f и полагая $b = f(X)$, мы видим, что b представляет собой корень многочлена P в кольце B, если только рассматривать P как многочлен из $B[X]$. Следовательно, существует такой унитарный многочлен Q кольца $B[X]$, имеющий степень $n - 1$, что $P(X) = (X - b)Q(X)$ (*Алгебра*, гл. IV, § 1, n° 4, предложение 5). В силу индуктивного предположения, существует такое кольцо $R' \supset B$, что многочлен Q является в кольце $R'[X]$ произведением унитарных многочленов степени 1; ясно, что в таком случае многочлен P равен в $R'[X]$ произведению унитарных многочленов степени 1.

Предложение 11. *Пусть A — кольцо, R — некоторая A-алгебра, P и Q — два унитарных многочлена из $R[X]$. Если коэф-*

фициенты многочлена PQ являются целыми над A, то коэффициенты многочленов P и Q также являются целыми над A.

Применяя дважды лемму 2, мы видим, что существует кольцо R', содержащее R, и такие семейства элементов $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ и $(b_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ кольца R', что в $R'[X]$ выполняются равенства $P[X]=\prod_{i=1}^{m}(X-a_i)$, $Q(X)=\prod_{j=1}^{n}(X-b_j)$; коэффициенты многочлена PQ принадлежат целому замыканию A' кольца A в кольце R', так что (n° 2, предложение 7) элементы a_i $(1\leqslant i\leqslant m)$ и b_j $(1\leqslant j\leqslant n)$ принадлежат A'. Получается, таким образом, что коэффициенты многочленов P и Q являются целыми над A (n° 1, следствие 1 предложения 4).

Пусть A — целостное кольцо, K — его поле частных и K' — некоторая K-алгебра (не обязательно коммутативная). Предположим, что задан элемент $x\in K$, *алгебраический* над K; тогда многочлены $P\in K[X]$, для которых $P(x)=0$, образуют в $K[X]$ идеал $\mathfrak{a}\neq 0$, причем обязательно главный (*Алгебра*, гл. IV, § 1, n° 5, предложение 7). Существует *унитарный* многочлен, и притом единственный, который порождает идеал $\mathfrak{a}$; обобщая терминологию, введенную в определении 3 из *Алгебры*, гл. V, § 3, n° 1, мы будем говорить, что этот унитарный многочлен является *минимальным многочленом* элемента x над полем K.

Следствие. *Пусть A — целостное кольцо, K — его поле частных и x — элемент некоторой K-алгебры K'* (не обязательно коммутативной). *Если x — целый над A элемент, то коэффициенты минимального многочлена P элемента x над K являются целыми над A* (и, следовательно, принадлежат кольцу A, если оно *целозамкнуто*).

По условию существует (n° 1, теорема 1) такой унитарный многочлен $Q\in A[X]$, что $Q(x)=0$. Поскольку P делит Q в $K[X]$, из предложения 11 вытекает, что коэффициенты многочлена P целы над A.

Пусть A — кольцо и R — некоторая A-алгебра (коммутативная); гомоморфизм $\varphi\colon A\to R$, определяющий на R структуру A-алгебры, единственным образом продолжается до гомоморфизма $A[X]\to R[X]$ колец многочленов над A и R, оставляющего образующую X неподвижной; следовательно, кольцо $R[X]$ каноническим образом наделяется структурой $A[X]$-алгебры.

Предложение 12. *Пусть A — кольцо, R — некоторая A-алгебра и P — какой-нибудь многочлен из $R[X_1, \ldots, X_n]$. Для того чтобы P был целым над $A[X_1, \ldots, X_n]$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты многочлена P были целыми над A.*

Рассматривая многочлены из $R[X_1, \ldots, X_n]$ как многочлены от X_n с коэффициентами из $R[X_1, \ldots, X_{n-1}]$, мы немедленно устанавливаем, что все сводится к доказательству данного предложения при $n = 1$. Пусть, следовательно, P — многочлен из $R[X]$; из предложения 5 n° 1 немедленно получается, что если коэффициенты многочлена P находятся в целом замыкании B кольца A в кольце R, то элемент P, принадлежащий кольцу $B[X] = B \otimes_A A[X]$, является целым над $A[X]$. Обратно, предположим, что P цел над $A[X]$, и пусть

$$Q(Y) = Y^m + F_1 Y^{m-1} + \ldots + F_m$$

— унитарный многочлен с коэффициентами $F_i \in A[X]$, для которого P служит корнем. Пусть r — целое число, строго большее, чем степени всех многочленов P и F_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, и положим

$$P_1(X) = P(X) - X^r.$$

Тогда P_1 является корнем многочлена

$$Q_1(Y) = Q(Y + X^r) = Y^m + G_1 Y^{m-1} + \ldots + G_m$$

с коэффициентами в $A[X]$; можно, следовательно, написать такое равенство:

$$-P_1(P_1^{m-1} + G_1 P_1^{m-2} + \ldots + G_{m-1}) = G_m. \qquad (1)$$

Однако из способа выбора числа r вытекает, что $-P_1$ является *унитарным* многочленом кольца $R[X]$ и таким же будет $G_m(X) = Q(X^r)$, поскольку степени многочленов $F_k(X)X^{r(m-k)}$ меньше, чем rm при $k \geqslant 1$. Отсюда прежде всего следует, что многочлен

$$P_1^{m-1} + G_1 P_1^{m-2} + \ldots + G_{m-1}$$

из $R[X]$ также унитарен; кроме того, поскольку коэффициенты многочлена G_m принадлежат кольцу A, предложение 11 показывает, что коэффициенты многочлена P_1 целы над A и, следовательно, коэффициенты многочлена P также целы над A.

Предложение 13. *Пусть A — кольцо, R — некоторая A-алгебра, A' — целое замыкание кольца A в алгебре R. Тогда целое замыкание кольца $A[X_1, \ldots, X_n]$ в кольце $R[X_1, \ldots, X_n]$ равно $A'[X_1, \ldots, X_n]$.*

Это следует из предложения 12 и из определения 3 n° 2.

Следствие 1. *Пусть A — целостное кольцо и A' — его целое замыкание. Тогда целое замыкание кольца многочленов $A[X_1, \ldots, X_n]$ равно $A'[X_1, \ldots, X_n]$.*

Проводя рассуждения с помощью индукции по n, мы немедленно сводим доказательство к случаю $n = 1$. Пусть K — поле

частных кольца A, которое является также полем частных и для A'; если элемент P поля частных $K(X)$ кольца $A[X]$ является целым над $A[X]$, то он принадлежит кольцу многочленов $K[X]$, так как это последнее является кольцом главных идеалов (*Алгебра*, гл. IV, § 1, n° 5, предложение 7), а потому целозамкнуто (предложение 10); следствие получается, таким образом, из предложения 13, примененного к $R = K$.

Следствие 2. *Пусть A — целостное кольцо. Для того чтобы кольцо многочленов $A[X_1, \ldots, X_n]$ было целозамкнутым, необходимо и достаточно, чтобы целозамкнутым было кольцо A.*

Следствие 3. *Если K — поле, то любая алгебра многочленов $K[X_1, \ldots, X_n]$ является целозамкнутым кольцом.*

4. Вполне целозамкнутые кольца

Определение 5. *Кольцо A называется вполне целозамкнутым, если оно целостное и если выполнено следующее условие: любой элемент x поля частных K кольца A, все степени x^n $(n \geqslant 0)$ которого содержатся в A-подмодуле конечного типа поля K, принадлежит A.*

Следует заметить, что предположение о принадлежности элементов x^n некоторому A-подмодулю конечного типа поля K может быть сформулировано и так: существует ненулевой элемент $d \in A$, для которого $dx^n \in A$ при любом $n \geqslant 0$; действительно, это последнее условие означает, что $x^n \in Ad^{-1}$, и, обратно, если $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ — любое конечное множество элементов поля K, то существует такой элемент $d \in A$, что $db_i \in A$ при $1 \leqslant i \leqslant m$, откуда $dM \subset A$, где M — это A-подмодуль поля K, порожденный элементами b_i.

Ясно, что вполне целозамкнутое кольцо целозамкнуто; следствие предложения 1 n° 1 показывает, что для *нётерова* кольца верно и обратное: нётерово целозамкнутое кольцо является вполне целозамкнутым. *Однако кольцо нормирования высоты $\geqslant 2$ (гл. VI, § 4) целозамкнуто, но не вполне целозамкнуто. * Если (A_ι) — некоторое семейство вполне целозамкнутых колец, обладающих общим полем частных K, то кольцо $A = \bigcap_\iota A_\iota$ вполне целозамкнуто. Действительно, если $x \in K$ — такой элемент, что при некотором d из A, не равном нулю, dx^n принадлежит A при любом $n > 0$, то из условия получается, что $x \in A_\iota$ при любом ι; следовательно, $x \in A$.

Предложение 14. *Пусть A — вполне целозамкнутое кольцо. Тогда любое кольцо многочленов $A[X_1, \ldots, X_n]$* (соответственно

любое кольцо формальных рядов $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ вполне целозамкнуто.

Ввиду индукции по n достаточно доказать, что $A[X]$ (соответственно $A[[X]]$) вполне целозамкнуто. Пусть, таким образом, P — некоторый элемент поля частных кольца $A[X]$ (соответственно кольца $A[[X]]$), и предположим, что существует такой ненулевой элемент $Q \in A[X]$ (соответственно $Q \in A[[X]]$), что $QP^m \in A[X]$ (соответственно $QP^m \in A[[X]]$) при любом целом $m \geqslant 0$. Если K — поле частных кольца A, то кольцо $A[X]$ (соответственно $A[[X]]$) является подкольцом в $K[X]$ (соответственно в $K[[X]]$) и $K[X]$ (соответственно $K[[X]]$) представляет собой кольцо главных идеалов (*Алгебра*, гл. VII, § 1, n° 1); следовательно, оно целозамкнуто (n° 4, предложение 10) и нётерово (*Алгебра*, гл. VIII, § 2, n° 3), а потому и вполне целозамкнуто; тем самым мы уже имеем, что $P \in K[X]$ (соответственно $P \in K[[X]]$). Пусть $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k (a_k \in K)$ и $Q = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k (b_k \in A)$; мы постараемся получить противоречие, предположив, что не все a_k принадлежат кольцу A. Тогда существует наименьший индекс i, такой, что $a_i \notin A$; если положить $P_1 = \sum_{k=0}^{i-1} a_k X^k \in A[X]$, то из условия немедленно последует, что $Q(P - P_1)^m \in A[X]$ (соответственно $Q(P - P_1)^m \in A[[X]]$) при любом $m \geqslant 0$. Пусть j — наименьшее целое число, такое, что $b_j \neq 0$; ясно, что у ряда $Q(P - P_1)^m$ член наименьшей степени, имеющий ненулевой коэффициент, равен $b_j a_i^m X^{j+mi}$; следовательно, $b_j a_i^m \subset A$ при любом $m \geqslant 0$. Но так как A вполне целозамкнуто, из этого следует, что $a_i \in A$ в противоречие с предположением.

Предложение 15. *Пусть A — фильтрованное кольцо с исчерпывающей фильтрацией и такое, что всякий главный идеал в нем замкнут в топологии, определенной данной фильтрацией. Если ассоциированное градуированное кольцо* $\mathrm{gr}(A)$ (гл. III, § 2, n° 3) *вполне целозамкнуто, то A также является вполне целозамкнутым.*

Пусть $(A_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ — фильтрация кольца A. Поскольку $\bigcap_{n \in \mathbf{Z}} A_n$ является замыканием идеала (0) (гл. III, § 2, n° 5), из условия прежде всего следует, что фильтрация (A_n) отделима, и так как кольцо $\mathrm{gr}(A)$ целостное, то таково же и само A (гл. III, § 2, n° 3, следствие предложения 1). Пусть $x = b/a$ — некоторый элемент поля частных K кольца A ($a \in A$, $b \in A$), для которого существует такой элемент $b \neq 0$ из A, что $dx^n \in A$ для любого $n \geqslant 0$. Докажем, что $b \in Aa$; поскольку по условию идеал Aa замкнут, достаточно доказать, что для каждого $n \in \mathbf{Z}$ имеет место включение $b \in Aa + A_n$. Так как фильтрация кольца A исчер-

пывающая, существует целое число $q \in \mathbf{Z}$, для которого $b \in Aa + A_q$. Достаточно, следовательно, доказать, что из включения $b \in Aa + A_m$ следует, что $b \in Aa + A_{m+1}$.

Предположим, таким образом, что $b = ay + z$ при $y \in A$, $z \in A_m$. По условию $dx^n \in A$ при любом $n \geqslant 0$, откуда немедленно получается для любого $n \geqslant 0$ включение $d(x-y)^n \in A$; другими словами, $dz^n = a^n t_n$ при $t_n \in A$ для любого $n \geqslant 0$. Очевидно, можно ограничиться случаем $z \neq 0$. Обозначим через v функцию порядка на кольце A (гл. III, § 1, n° 2) и положим $v(d) = n_1$, $v(z) = n_2 \geqslant m$, $v(a) = n_3$; пусть d', z', a' — образы элементов d, z, a в группах A_{n_1}/A_{n_1+1}, A_{n_2}/A_{n_2+1}, A_{n_3}/A_{n_3+1} соответственно. Для любого $n \geqslant 0$ имеем $v(dz^n) = n_1 + nn_2$ (гл. III, § 2, n° 3, предложение 1); следовательно, канонический образ в $\mathrm{gr}(A)$ элемента dz^n есть элемент $d'z'^n$; аналогичным образом устанавливается, что канонический образ в $\mathrm{gr}(A)$ элемента $a^n t_n$ есть элемент вида $a'^n t'_n$, где $t'_n \in \mathrm{gr}(A)$, и, так как $a' \neq 0$, из сказанного вытекает, что для любого $n \geqslant 0$ имеет место включение $d'(z'/a')^n \in \mathrm{gr}(A)$. Предположение о том, что кольцо $\mathrm{gr}(A)$ вполне целозамкнуто, влечет за собой, таким образом, существование элемента $s' \in \mathrm{gr}(A)$, для которого $z' = a's'$. Разлагая элемент s' в сумму однородных элементов, мы, кроме того, видим, что можно считать элемент s' однородным (так как z' и a' однородны), т. е. образом некоторого элемента $s \in A$; в таком случае $v(as) = v(z) = n_2$, $z \equiv as \pmod{A_{n_2+1}}$; поскольку $n_2 \geqslant m$, *тем более* $z \equiv as \pmod{A_{m+1}}$, и, таким образом, $b \equiv a(y + s) \pmod{A_{m+1}}$.

5. *Целое замыкание кольца частных*

Пусть A — кольцо, R — некоторая A-алгебра и S — мультипликативная система в A. Напомним (гл. II, § 2, n° 8), что кольцо частных $S^{-1}R$ каноническим образом наделяется структурой $S^{-1}A$-алгебры.

Предложение 16. *Пусть A — кольцо, R — некоторая A-алгебра, A' — целое замыкание кольца A в алгебре R и S — мультипликативная система в A. Тогда целое замыкание кольца $S^{-1}A$ в $S^{-1}R$ равно $S^{-1}A'$.*

Пусть b/s — элемент из $S^{-1}A'$ ($s \in S$, $b \in A'$). Так как диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_A^S} & S^{-1}A \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S^{-1}h} \\ R & \xrightarrow{i_R^S} & S^{-1}R \end{array}$$

коммутативна, элемент $b/1$ является целым над кольцом $S^{-1}A$ (n° 1, предложение 2). Поскольку $1/s \in S^{-1}A$, элемент $b/s = (b/1)(1/s)$ является целым над $S^{-1}A$.

Обратно, пусть r/t $(r \in R, t \in S)$ — элемент из $S^{-1}R$, целый над $S^{-1}A$; тогда элемент $r/1 = (t/1)(r/1)$ является целым над кольцом $S^{-1}A$. Следовательно, выполняется соотношение вида

$$(r/1)^n + (a_1/s)(r/1)^{n-1} + \ldots + (a_n/s) = 0,$$

где $a_i \in A$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и $s \in S$. Это соотношение может быть также записано в виде

$$(sr^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n)/s = 0;$$

таким образом, существует элемент $s' \in S$, для которого $s'(sr^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n) = 0$; отсюда получается, что $(s'sr)^n + s'a_1(s'sr)^{n-1} + \ldots + s'^n s^{n-1} a_n = 0$. Следовательно, по определению $s'sr \in A'$, откуда $r/1 \in S^{-1}A'$ и $r/t \in S^{-1}A'$.

Следствие 1. *Пусть A — целостное кольцо, A' — его целое замыкание и S — такая мультипликативная система в A, что $0 \notin S$. Тогда целое замыкание кольца частных $S^{-1}A$ равно $S^{-1}A'$.*

Действительно, поле частных R кольца A является также полем частных и кольца $S^{-1}A$, так как $0 \notin S$ (гл. II, § 1, n° 1, замечание 7); остается применить к R предложение 16.

Следствие 2. *Пусть A — целостное кольцо, K — его поле частных, R — некоторая алгебра над K и B — целое замыкание кольца A в алгебре R. Тогда элементы из R, алгебраические над K* (n° 1, пример 1), *являются элементами вида $a^{-1}b$, где $b \in B$ и $a \in A$, $a \neq 0$; если L — алгебраическое замыкание поля K в алгебре R, то существует базис расширения L над полем K, содержащийся в кольце B.*

Первое утверждение вытекает из предложения 16, примененного к случаю $S = A - \{0\}$. Если $\{x_\iota\}_{\iota \in I}$ — какой-нибудь базис расширения L над K, то для каждого $\iota \in I$ существует элемент $a_\iota \neq 0$ из A, такой, что $a_\iota x_\iota \in B$; но тогда $(a_\iota x_\iota)_{\iota \in I}$ также является базисом расширения L над полем K.

Следствие 3. *Пусть A — целостное кольцо и Ω — множество максимальных идеалов кольца A. Для того чтобы A было целозамкнутым, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\mathfrak{m} \in \Omega$ кольцо частных $A_\mathfrak{m}$ также было целозамкнутым.*

Из следствия 1 вытекает, что это условие необходимо. Но оно и достаточно, так как $A = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \Omega} A_\mathfrak{m}$ (гл. II, § 3, n° 3, формула 2), и достаточно применить следствие предложения 8 n° 2

Следствие 4. *Пусть A — целостное кольцо, K — его поле частных и S — такая мультипликативная система кольца A, что $0 \notin S$.*

(i) *Пусть B — подкольцо поля K, целое над A, и пусть $\mathfrak{f}$ — аннулятор A-модуля B/A. Тогда идеал $S^{-1}\mathfrak{f}$ содержится в аннуляторе $(S^{-1}A)$-модуля $S^{-1}B/S^{-1}A$ и равен этому аннулятору, когда B представляет собой A-модуль конечного типа.*

(ii) *Пусть A' — целое замыкание кольца A. Для того чтобы кольцо $S^{-1}A$ было целозамкнутым, достаточно, чтобы аннулятор $\mathfrak{f}$ A-модуля A'/A пересекался с S. Это условие является также и необходимым, если A' представляет собой A-модуль конечного типа.*

(i) Так как $\mathfrak{f}B \subset A$, имеет место включение $(S^{-1}\mathfrak{f})(S^{-1}B) \subset S^{-1}A$; следовательно, идеал $S^{-1}\mathfrak{f}$ содержится в $\mathrm{Ann}(S^{-1}B/S^{-1}A)$. Когда B является A-модулем конечного типа, равенство $S^{-1}\mathfrak{f} = \mathrm{Ann}(S^{-1}B/S^{-1}A)$ есть частный случай формулы (9) гл. II, § 2, n° 4, если $S^{-1}B/S^{-1}A$ каноническим образом отождествить с $S^{-1}(B/A)$.

(ii) В силу следствия 1, кольцо $S^{-1}A'$ представляет собой целое замыкание кольца $S^{-1}A$. Поскольку соотношение $\mathfrak{f} \cap S \neq \varnothing$ и $S^{-1}\mathfrak{f} = S^{-1}A$ эквивалентны (гл. II, § 2, n° 5, замечание), утверждение (ii) является непосредственным следствием пункта (i).

Когда B является подкольцом в K, целым над A, иногда говорят, что аннулятор $\mathfrak{f}$ модуля B/A, по определению равный $A : B$ (гл. I, § 2, n° 10), является *кондуктором* из B в A[1]).

Следствие 5. *Пусть A — целостное кольцо, A' — его целое замыкание и $\mathfrak{f}$ — аннулятор A-модуля A'/A. Предположим, что A' является A-модулем конечного типа. Тогда множество простых идеалов $\mathfrak{p}$ кольца A, для которых $A_\mathfrak{p}$ не является целозамкнутым, совпадает с множеством простых идеалов, содержащих $\mathfrak{f}$.*

Это немедленно вытекает из следствия 4 (ii), примененного к $S = A - \mathfrak{p}$.

Следует подчеркнуть, что в предположениях следствия 5 обязательно $\mathfrak{f} \neq 0$, так как A' является A-модулем конечного типа и любой элемент из K/A (K — поле частных кольца A) имеет ненулевой аннулятор.

---

[1]) В переводе термин *кондуктор* использован для обозначения идеала $N : M$ в случае произвольного модуля M и его подмодуля N. В оригинале используются два разных термина: в общей ситуации применяется термин *transporteur*, а термин *conducteur* резервируется для описанного выше частного случая. — *Прим. ред.*

* В алгебраической геометрии следствие 5 и предыдущее замечание показывают, что точки аффинного многообразия V, в которых оно не является нормальным, образуют замкнутое множество, отличное от V. *

6. *Нормы и следы целых элементов*

Предложение 17. *Пусть A — кольцо, B — некоторая A-алгебра (коммутативная) и X — некоторая квадратная матрица порядка n над кольцом B; следующие свойства эквивалентны:*

а) *матрица X является целым над A элементом;*

б) *существует такой A-подмодуль конечного типа M модуля B^n, что $X \cdot x \in M$ для всякого $x \in M$ и M служит системой образующих B-модуля B^n;*

в) *коэффициенты характеристического многочлена матрицы X целы над A.*

Если $\chi(T) = \det(T \cdot 1 - X)$ — характеристический многочлен матрицы X, то теорема Гамильтона — Кэли показывает, что $\chi(X) = 0$ (*Алгебра*, гл. VII, § 5, n° 4, замечание 1) и, так как χ — унитарный многочлен, из в) следует а) в силу предложения 6 n° 1.

Предположим, далее, что выполняется а). Если $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — канонический базис модуля B^n, то A-подмодуль M кольца B, порожденный элементами $X^k \cdot e_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ k \geqslant 0)$, является A-модулем конечного типа, так как A-алгебра $A[X]$ есть A-модуль конечного типа (n° 1, теорема 1); поскольку модуль M содержит e_i, становится очевидным, что из а) следует б); обратное же представляет собой следствие условия (Е$_{\text{III}}$) теоремы 1 n° 1.

Наконец, докажем, что из а) следует в); поскольку X является элементом, целым над A, и *тем более* целым над кольцом $A[T]$, элемент $T \cdot 1 - X$ также будет целым над $A[T]$; в силу предложения 12 n° 3, мы видим, что все сводится (если заменить X на $T \cdot 1 - X$ и A на $A[T]$) к доказательству того, что если матрица X является целым элементом над A, то $d = \det(X)$ является элементом из B, целым над A. Но выше мы видели, что для эндоморфизма u модуля B^n, определенного матрицей X, найдется некоторый A-подмодуль M конечного типа, устойчивый относительно этого эндоморфизма, содержащий элементы e_i; следовательно, n-векторы $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$, где $x_i \in M$ для $1 \leqslant i \leqslant n$, порождают в модуле $\bigwedge^n(B^n)$ некоторый A-подмодуль конечного типа, содержащий $e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$ и

устойчивый относительно $\bigwedge^n u$, т. е. относительно гомотетии умножения на d; поскольку аннулятор элемента

$$e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$$

в кольце B равен нулю, условие (E_{III}) теоремы 1 п° 1 доказывает, что элемент d является целым над кольцом A.

Следствие 1. *Пусть A — целостное кольцо, K — его поле частных, K' — некоторая K-алгебра конечной размерности* (не обязательно коммутативная). *Если $x \in K'$ — целый над A элемент, то коэффициенты характеристического многочлена* $\mathrm{Pc}_{K'/K}(x; X)$ (*Алгебра*, гл. VIII, § 12, п° 2) *также являются целыми над A.*

Действительно, если $z \to M(z)$ — регулярное представление алгебры K' (рассматриваемое как матричное представление; ср. *Алгебра*, гл. VIII, § 13), то $\mathrm{Pc}_{K'/K}(x; X)$ есть, по определению, характеристический многочлен матрицы $M(x)$; если x — целый над A элемент, то матрица $M(x)$ является целым над A элементом (п° 1, предложение 2); поэтому достаточно применить предложение 17.

Следствие 2. *В условиях и обозначениях следствия* 1 *элементы* $\mathrm{Tr}_{K'/K}(x)$ *и* $N_{K'/K}(x)$ *являются целыми над A.*

Действительно, след $\mathrm{Tr}_{K'/K}(x)$ и норма $N_{K'/K}(x)$ являются, с точностью до знака, коэффициентами многочлена $\mathrm{Pc}_{K'/K}(x; X)$ (*Алгебра*, гл. VIII, § 12, п° 1, формула (4)), так что они целы.

Замечание. 1) Если K' — простая центральная алгебра над K и $x \in K'$ — целый над A элемент, то коэффициенты приведенного характеристического многочлена элемента x (*Алгебра*, гл. VIII, § 12, п° 3) являются *целыми над A*. Действительно, существует степень этого многочлена, равная многочлену $\mathrm{Pc}_{K'/K}(x; X)$ (loc. cit., предложение 8), и достаточно применить предложение 17 и предложение 11 п° 3.

Предложение 18. *Пусть A — целозамкнутое кольцо, K — его поле частных, K' — некоторая сепарабельная K-алгебра* (*Алгебра*, гл. VIII, § 7, п° 5) *конечной размерности и A' — целое замыкание кольца A в K'. Тогда A содержится в некотором A-модуле конечного типа.*

Предложение это получается из следующей, более точной леммы:

Лемма 3. *Пусть в условиях предложения* 18 $(w_1, \ldots, w_n)$ *есть базис K' над K, содержащийся в A'* (п° 5, следствие 2 предложения 16); *тогда существует единственный базис* $(w_1^*, \ldots, w_n^*)$ *алгебры K' над K, для которого* $\mathrm{Tr}_{K'/K}(w_i w_j^*) = \delta_{ij}$

(индекс Кронекера). *Если* $d = D_{K'/K}(w_1, \ldots, w_n)$ *есть дискриминант базиса* $(w_1, \ldots, w_n)$ (*Алгебра*, гл. IX, § 2), *то* $d \neq 0$ *и*

$$\sum_{i=1}^{n} Aw_i \subset A' \subset \sum_{i=1}^{n} Aw_i^* \subset d^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} Aw_i\right). \qquad (2)$$

В частности, если d *— обратимый элемент кольца* A, *кольцо* A' *является свободным* A*-модулем с базисом* $(w_1, \ldots, w_n)$.

Так как K' — сепарабельная K-алгебра, то $d \neq 0$ (*Алгебра*, гл. IX, § 2, предложение 5) и K-билинейная форма

$$(x, y) \to \mathrm{Tr}_{K'/K}(xy)$$

на K' является, следовательно, невырожденной (loc. cit., предложение 4); этим доказано существование и единственность базиса $(w_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (*Алгебра*, гл. IX, § 1, n° 6, следствие предложения 6). Первое включение в (2) очевидно. Пусть x — элемент кольца A'; положим $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i w_i^*$, где $\xi_i \in K$; для любого i справедливо равенство $\xi_i = \mathrm{Tr}_{K'/K}(xw_i)$, так что ξ_i является целым над A элементом (следствие 2 предложения 17); поскольку кольцо A целозамкнуто, для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ имеем $\xi_i \in A$. Это доказывает второе включение в (2). Наконец, положим $w_j^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} w_i$, где $\alpha_{ji} \in K$; тогда $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\, \mathrm{Tr}_{K'/K}(w_i w_k) = \delta_{jk}$, какими бы ни были j и k; формулы Крамера показывают, что элементы α_{ji} принадлежат $d^{-1}A$, откуда получается и третье включение в (2). Последнее утверждение немедленно вытекает из (2), где в этом случае берется $A' = \sum_{i=1}^{n} Aw_i$.

В ближайших двух следствиях сохраняются предположения и обозначения предложения 18, причем n обозначает размерность K' над K.

Следствие 1. *Если* A *— нётерово кольцо, то* A*-модуль* A' *имеет конечный тип и, в частности, кольцо* A' *нётерово.*

Действительно, A' является подмодулем A-модуля конечного типа.

Следствие 2. *Если* A *— кольцо главных идеалов, то* A' *является свободным* A*-модулем ранга* n.

Действительно, любой подмодуль свободного A-модуля свободен (*Алгебра*, гл. VII, § 3, теорема 1).

Следствие 3. *Пусть* E *— расширение степени* n *поля* $\mathbf{Q}$ *рациональных чисел. Тогда аддитивная группа целого замыка-*

ния в E кольца целых рациональных чисел $\mathbf{Z}$ является свободной коммутативной группой ранга n.

Действительно, кольцо $\mathbf{Z}$ целозамкнуто (n° 3, предложение (10)) и расширение E сепарабельно, так как поле $\mathbf{Q}$ имеет характеристику 0. Следовательно, можно применить следствие 2 к случаю $A = \mathbf{Z}$, $K = \mathbf{Q}$ и $K' = E$.

Замечание. 2) Утверждение следствия 1 не обязательно выполняется, если не предполагать, что алгебра K' сепарабельна над K, даже если K' есть надполе поля K (упражнение 20). Но зато если A есть целостная K_0-*алгебра конечного типа*, где K_0 — *некоторое поле*, то целое замыкание алгебры A в *любом* расширении конечной степени поля частных кольца A представляет собой A-модуль конечного типа и, кроме того, нётерово кольцо, как будет установлено в теореме 2 § 3, n° 2.

7. *Расширение скаляров для целозамкнутой алгебры*

Предложение 19. *Пусть k — поле, L — сепарабельное расширение k и R — некоторая целозамкнутая k-алгебра. Если кольцо $L \otimes_k R$ целостное, то оно целозамкнуто.*

Пусть K — поле частных кольца R. Так как k — поле, кольцо $L \otimes_k R$ канонически отождествляется с некоторой k-подалгеброй в $L \otimes_k K$, а L и R — с некоторыми k-подалгебрами в $L \otimes_k R$. Кроме того, поскольку элемент $s \neq 0$ из R не является делителем нуля в R, то $1 \otimes s$ не является делителем нуля в $L \otimes_k R$, так как L — плоская алгебра над k (гл. I, § 2, n° 3); следовательно, отождествляя s с $1 \otimes s$, мы видим, что если $S = R - \{0\}$, то $L \otimes_k K$ отождествлятся с $S^{-1}(L \otimes_k R)$; поскольку мы предположили, что кольцо $L \otimes_k R$ *целостное*, кольцо $L \otimes_k K$ отождествляется также с подкольцом поля частных Ω кольца $L \otimes_k R$.

1° Предположим сначала, что L является расширением *конечной степени* поля k; тогда $L \otimes_k K$ является алгеброй конечного ранга над K и по условию в ней нет делителей нуля; следовательно, это — поле (*Алгебра*, гл. V, § 2, n° 1, предложение 1), а потому в данном случае — это *поле частных* Ω кольца $L \otimes_k R$. Пусть $(w_1, \ldots, w_n)$ — базис L над k, который служит также базисом $L \otimes_k K$ над K. Существует такой базис $(w_1^*, \ldots, w_n^*)$ в L, что $\mathrm{Tr}_{L/K}(w_i w_j^*) = \delta_{ij}$ (n° 6, лемма 3); всякий элемент $z \in L \otimes_k K$ записывается единственным образом в виде $z = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$, где $a_i \in K$. Следовательно, $\mathrm{Tr}_{(L \otimes K)/K}(z w_j^*) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{Tr}_{(L \otimes K)/K}(w_i w_j^*)$ и, так как в L следы $\mathrm{Tr}_{(L \otimes K)/K}$ и $\mathrm{Tr}_{L/K}$ совпадают (*Алгебра*, гл. VIII, § 12, n° 2, формула (13)), мы получаем равенство $\mathrm{Tr}_{(L \otimes K)/K}(z w_j^*) = a_j$ для $1 \leqslant j \leqslant n$. Заметим,

с другой стороны, что элементы из L целы над k, а потому и над R (n° 1, следствие 1 предложения 2). Следовательно (n° 1, предложение 5), кольцо $L \otimes_k R$ является целым над R. Если это так, то предположим, что элемент $z \in L \otimes_k K$ цел над $L \otimes_k R$; тогда z является также целым и над R (n° 1, предложение 6); следовательно, элемент zw_j^* также является целым над R и аналогичное утверждение верно для $a_j = \mathrm{Tr}_{L\otimes K/K}(zw_j^*)$ при $1 \leqslant j \leqslant n$ (n° 6, следствие 2 предложения 17). Поскольку R целозамкнуто, $a_j \in R$ при всех j, в силу чего $z \in L \otimes_k R$; этим доказывается в данном случае рассматриваемое предложение.

2° Теперь предположим, что L является сепарабельным расширением *конечного типа* над K. Тогда существует *сепарабельный* базис трансцендентности $(x_1, \ldots, x_d)$ поля L над полем k (*Алгебра*, гл. V, § 9, n° 3, теорема 2); поскольку расширения L и K алгебраически свободны (разделены[1])) над k в поле Ω (*Алгебра*, гл. V, § 5, n° 4), элементы x_i алгебраически независимы над K; следовательно, $R[x_1, \ldots, x_d]$ является целозамкнутым кольцом (n° 3, следствие 2 предложения 13). Пусть T — множество элементов $\neq 0$ кольца $A = k[x_1, \ldots, x_d] \subset L$, так что поле $k_1 = k(x_1, \ldots, x_d) \subset L$ равно $T^{-1}k[x_1, \ldots, x_d]$. Тогда

$$k_1 \otimes_k R = (T^{-1}) \otimes_k R = T^{-1}A \otimes_A (A \otimes_k R) = T^{-1}(A \otimes_k R) = T^{-1}R[x_1, \ldots, x_d]$$

в силу ассоциативности тензорного произведения. Следовательно, это кольцо целозамкнуто (n° 5, следствие 1 предложения 19). Но $L \otimes_k R$ отождествляется с $L \otimes_{k_1} (k_1 \otimes_k R)$ и по определению L является сепарабельным расширением конечной степени над k_1; из пункта 1° получается, следовательно, что $L \otimes_k R$ целозамкнуто.

3° *Общий случай.* Если z — элемент поля Ω, целый над $L \otimes_k R$, то выполняется соотношение вида $z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m = 0$, где b_i принадлежат $L \otimes_k R$; следовательно, существует такое подрасширение L' поля L, имеющее конечный тип над k, что все b_i принадлежат $L' \otimes_k R$ при $1 \leqslant i \leqslant m$, а z принадлежит $L' \otimes_k K$. Тогда из пункта 2° вытекает, что $z \in L' \otimes_k R$, и тем самым доказано, что кольцо $L \otimes_k R$ целозамкнуто.

* Пусть V — аффинное неприводимое алгебраическое многообразие, k — поле определения V и R — кольцо регулярных функций на V, определенных над k. Когда кольцо R целозамкнуто, то говорят, что многообразие V *нормально* над k; предложение 19 показывает, что если V нормально над k, то оно

[1]) В терминологии, использованной при переводе *Алгебры*. — *Прим. ред.*

остается нормальным над любым сепарабельным расширением L поля k. *

Следствие. *Пусть k — поле, R и S — две целозамкнутые k-алгебры. Предположим, что кольцо $R \otimes_k S$ целостное и что поля частных K и L колец R и S соответственно сепарабельны над k. Тогда кольцо $R \otimes_k S$ целозамкнуто.*

В самом деле, поскольку R и S отождествляются с подалгебрами в $R \otimes_k S$, поля K и L отождествляются с подполями поля частных Ω кольца $R \otimes_k S$, которые линейно свободны над k (*Алгебра*, гл. V, § 2, n° 3, предложение 5). Но тогда из предложения 19 следует, что $R \otimes_k L$ и $K \otimes_k S$ целозамкнуты; поскольку их пересечение равно $R \otimes_k S$ (гл. I, § 2, n° 6, предложение 7), кольцо $R \otimes_k S$ целозамкнуто (n° 2, следствие предложения 8).

* Если заданы два неприводимых аффинных алгебраических многообразия V, W, определенные над k, то их произведение $V \times W$ является аффинным многообразием, а кольцо регулярных функций на $V \times W$ отождествляется с тензорным произведением над k колец регулярных функций на V и W соответственно. Следствие предложения 19 показывает, что если V и W нормальны над k, то $V \times W$ также нормально над k. *

8. *Целые элементы над градуированным кольцом*

Все градуировки, рассматриваемые в этом n°, *имеют тип* $\mathbf{Z}$; *если A является градуированным кольцом и если $i \in \mathbf{Z}$, то через A_i обозначается множество однородных элементов степени i кольца A.*

Пусть A — градуированное кольцо и B — градуированная A-алгебра. Пусть x — однородный элемент из B, являющийся целым над A. Тогда выполняется соотношение

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \quad \text{при} \quad a_i \in A \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{3}$$

Пусть $m = \deg(x)$ и a'_i — однородная компонента степени mi элемента a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; очевидно, что имеет место равенство

$$x^n + a'_1 x^{n-1} + \ldots + a'_n = 0, \tag{4}$$

другими словами, элемент x удовлетворяет уравнению целой зависимости с *однородными* коэффициентами.

Обозначим через $A[X, X^{-1}]$ кольцо частных $S^{-1}A[X]$ кольца многочленов $A[X]$ от одной переменной, где S — мультипликативная система в $A[X]$, образованная степенями X^n переменной X $(n \geqslant 0)$; поскольку элемент X не является делителем нуля в $A[X]$, мы немедленно получаем, что степени X^i $(i \in \mathbf{Z})$

образуют базис A-модуля $A[X, X^{-1}]$ над A. Для всякого элемента $a \in A$ с однородными компонентами a_i ($i \in \mathbf{Z}$) положим

$$j_A(a) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i X^i \in A[X, X^{-1}]; \tag{5}$$

немедленно устанавливается, что отображение j_A: $A \to A[X, X^{-1}]$ представляет собой инъективный гомоморфизм колец.

Предложение 20. *Пусть* $A = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} A_i$ — *градуированное кольцо и* B — *градуированная* A-*алгебра* (*коммутативная*). *Тогда множество* A' *элементов из* B, *целых над* A, *является градуированной подалгеброй алгебры* B. *Если* $A_i = 0$ *для* $i < 0$ *и если* B *является редуцированным кольцом, то* $A'_i = 0$ *при* $i < 0$.

Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\rho} & B \\ {\scriptstyle j_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_B} \\ A[X, X^{-1}] & \xrightarrow{\rho'} & B[X, X^{-1}] \end{array}$$

(где ρ — гомоморфизм, определяющий структуру A-алгебры на B и ρ' — гомоморфизм, который получается из ρ каноническим образом) коммутативна, что устанавливается непосредственной проверкой, основанной на определении (5). Пусть x — какой-нибудь элемент из B, целый над A; тогда $j_B(x)$ является целым над $A[X, X^{-1}]$ (n° 1, предложение 2) и, следовательно, из предложения 16 n° 5 вытекает, что существует целое число $m > 0$, для которого элемент $X^m j_B(x)$ принадлежит кольцу $B[X]$ и является целым над $A[X]$. Но тогда из предложения 12 n° 3 получается, что коэффициенты многочлена $X^m j_B(x)$ являются целыми над A элементами; поскольку эти коэффициенты по определению совпадают с однородными компонентами элемента x, мы видим, что все они целы над A. Поэтому A' — *градуированная* подалгебра в B.

Теперь предположим, что $x \in A'_i$ при $i < 0$; замечание, сделанное в начале этого n°, показывает, что x удовлетворяет уравнению вида (4), в котором $a'_k \in A_{ki}$ при $1 \leqslant k \leqslant n$. Если $A_j = 0$ для любого $j < 0$, то, следовательно, $x^n = 0$, и если B — редуцированное кольцо, то мы из сказанного заключаем, что $x = 0$, так что в рассматриваемом случае $A'_i = 0$ при любом $i < 0$.

Напомним (гл. II, § 2, n° 9), что если $A = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} A_i$ — градуированное кольцо и S — мультипликативная система в нем, образованная однородными элементами, то на $S^{-1}A$ определена структура градуированного кольца, в которой в качестве множества однородных элементов степени i берется множество

$(S^{-1}A)_i$ элементов вида a/s, где $a \in A$ и $s \in S$ — однородные элементы и $\deg(a) - \deg(s) = i$.

Лемма 4. *Пусть $A = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} A_i$ — целостное градуированное кольцо, S — множество однородных элементов из A, отличных от нуля.*

(i) *Любой однородный ненулевой элемент из $S^{-1}A$ обратим, кольцо $K_0 = (S^{-1}A)_0$ представляет собой поле, и множество тех индексов $i \in \mathbf{Z}$, для которых $(S^{-1}A)_i \neq 0$, образует подгруппу $q\mathbf{Z}$ в $\mathbf{Z}$ (при некотором $q \geqslant 0$).*

(ii) *Предположим, что $q \geqslant 1$, и пусть t — ненулевой элемент из $(S^{-1}A)_q$. Тогда K_0-гомоморфизм f кольца многочленов $K_0[X]$ в кольцо $S^{-1}A$, который переводит X в t, продолжается до изоморфизма кольца $K_0[X, X^{-1}]$ на кольцо $S^{-1}A$ и кольца $S^{-1}A$ является целозамкнутым.*

Утверждение пункта (i) немедленно следует из определений и предположения о том, что A целостное: действительно, если a/s и a'/s' — два ненулевых однородных элемента из $S^{-1}A$ степеней i и i', то aa'/ss' является однородным ненулевым элементом степени $i + i'$. Для доказательства пункта (ii) отметим, что, так как t обратим в $S^{-1}A$, гомоморфизм f продолжается единственным образом до гомоморфизма $\bar{f}$: $K_0[X, X^{-1}] \to S^{-1}A$ и обязательно $\bar{f}(X^{-1}) = t^{-1}$. С другой стороны, по определению числа q всякий ненулевой однородный элемент из $S^{-1}A$ имеет степень qn $(n \in \mathbf{Z})$, и потому он может быть единственным образом записан в виде λt^n, где $\lambda \in K_0$ (так как кольцо $S^{-1}A$ целостное); следовательно, гомоморфизм $\bar{f}$ биективен. Наконец, известно, что $K_0[X]$ целозамкнуто (n° 3, предложение 10), а потому целозамкнутым является и $K_0[X, X^{-1}]$ (n° 5, следствие 1 предложения 16). Доказательство закончено.

Предложение 21. *Пусть $A = A_i \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}}$ — целостное градуированное кольцо и S — множество ненулевых однородных элементов кольца A. Тогда целое замыкание A' кольца A является градуированным подкольцом кольца частных $S^{-1}A$. Если, кроме того, $A_i = 0$ для $i < 0$, то $A'_i = 0$ для $i < 0$.*

Если $A = A_0$, то предложение тривиально. В противном случае можно применить лемму 4; кольцо $S^{-1}A$ является целозамкнутым и, следовательно, $A' \subset S^{-1}A$. Так как кольцо $S^{-1}A$ градуированное, градуированным является и A' в силу предложения 20; последнее утверждение также следует из предложения 20.

Следствие 1. *Сохраним предположения и обозначения предложения 21. Если любой однородный элемент из $S^{-1}A$,*

являющийся целым над A, принадлежит A, то кольцо A целозамкнуто.

Действительно, в этом случае $A'_i \subset A$ при любом $i \in \mathbf{Z}$, так что $A' = A$.

Следствие 2. *Если $A = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} A_i$ — целозамкнутое градуированное кольцо, то кольцо A_0 целозамкнуто.*

Действительно, поле частных K_0 кольца A_0 отождествляется (в обозначениях предложения 21) с некоторым подкольцом кольца однородных элементов степени 0 из $S^{-1}A$; любой элемент из K_0, целый над A_0 (и a fortiori целый над A), принадлежит, следовательно, в силу нашего предположения, кольцу A_0.

Следствие 3. *Пусть $A = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} A_i$ — целозамкнутое градуированное кольцо. Тогда для любого целого числа $d > 0$ кольцо $A^{(d)}$* (гл. III, § 1, n° 3) *целозамкнуто.*

Пусть U — множество ненулевых однородных элементов из $A^{(d)}$, и пусть x — однородный элемент из $U^{-1}A^{(d)}$, целый над $A^{(d)}$ и, следовательно, целый над A. Поскольку $x \in S^{-1}A$, элемент x принадлежит A по предположению. Так как степень этого элемента делится на d, он принадлежит кольцу $A^{(d)}$; из следствия 1 получается поэтому, что кольцо $A^{(d)}$ целозамкнуто.

9. *Приложение: инварианты группы автоморфизмов алгебры*

Пусть заданы кольцо K, некоторая K-алгебра A и некоторая группа $\mathcal{G}$; мы говорим, что $\mathcal{G}$ *действует на* A, если: 1) множество A наделено группой операторов $\mathcal{G}$ (*Алгебра*, гл. I, § 7, n° 2); 2) для любого элемента $\sigma \in \mathcal{G}$ отображение $x \to \sigma x$ является *эндоморфизмом* K-алгебры A (и поэтому *автоморфизмом*, поскольку оно биективно (loc. cit.)). Мы будем обозначать через $A^{\mathcal{G}}$ множество элементов из A, *инвариантных* относительно $\mathcal{G}$; ясно, что это множество является K-*подалгеброй* в A.

Мы будем говорить, что группа $\mathcal{G}$ является *локально конечной* группой операторов на A, если любая *орбита* группы $\mathcal{G}$ в A (*Algèbre*, chap. I, 3e éd., Rectifications au fasc. IV) *конечна*.

Предложение 22. *Пусть A — некоторая K-алгебра (коммутативная) и $\mathcal{G}$ — локально конечная группа операторов на A. Тогда алгебра A является целой над $A^{\mathcal{G}}$.*

Действительно, пусть для любого $x \in A$ через x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ обозначены различные элементы орбиты элемента x относительно группы $\mathcal{G}$; для любого $\sigma \in \mathcal{G}$ существует такая перестановка π_σ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, что $\sigma \cdot x_i = x_{\pi_\sigma(i)}$ при $1 \leqslant i \leqslant n$.

Следовательно, элементарные симметрические функции от x_i являются элементами кольца A, инвариантными относительно группы $\mathfrak{G}$; другими словами, это элементы из $A^{\mathfrak{G}}$. Поскольку x является корнем унитарного многочлена $\prod_{i=1}^{n}(X-x_i)$, а коэффициенты этого многочлена принадлежат $A^{\mathfrak{G}}$, элемент x — целый над $A^{\mathfrak{G}}$.

Теорема 2. *Пусть A — некоторая K-алгебра конечного типа и $\mathfrak{G}$ — локально конечная группа операторов на A. Тогда A является $A^{\mathfrak{G}}$-модулем конечного типа; если, кроме того, кольцо K нётерово, то $A^{\mathfrak{G}}$ представляет собой K-алгебру конечного типа.*

Пусть $(a_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ — система образующих K-алгебры A; поскольку a fortiori $A=A^{\mathfrak{G}}[a_1, \ldots, a_m]$ и a_j являются целыми над $A^{\mathfrak{G}}$ в соответствии с предложением 22, первое утверждение вытекает из предложения 4 n° 1. Второе утверждение вытекает из следующей леммы:

Лемма 5. *Пусть K — нётерово кольцо, B — некоторая K-алгебра конечного типа и C — такая K-подалгебра в B, что алгебра B является целой над C. Тогда C представляет собой K-алгебру конечного типа.*

Пусть $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — конечная система образующих K-алгебры B. Для каждого i существует, согласно предположению, такой унитарный многочлен $P_i\in C[X]$, что $P_i(x_i)=0$. Пусть C' есть K-подалгебра в C, порожденная коэффициентами многочлена P_i $(1\leqslant i\leqslant n)$; очевидно, что x_i целы над C' и что $B=C'[x_1, \ldots, x_n]$; следовательно, B представляет собой C'-модуль конечного типа (n° 1, предложение 4). С другой стороны, C' — нётерово кольцо (гл. III, § 2, n° 10, следствие 3 из теоремы 2), следовательно, C является C'-модулем конечного типа, и тем самым доказано, что C есть K-алгебра конечного типа.

Замечание. Множество операторов $\sigma\in\mathfrak{G}$, для которых $\sigma a_j=a_j$ при $1\leqslant j\leqslant m$, оставляет, очевидно, неподвижным любой элемент из A. Нормальная подгруппа $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$, оставляющая неподвижным любой элемент в A, имеет, следовательно, *конечный* индекс в $\mathfrak{G}$; поэтому можно считать, что кольцо A наделено *конечной* группой операторов $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$; очевидно, что $A^{\mathfrak{G}/\mathfrak{H}}=A^{\mathfrak{G}}$.

Пусть S — мультипликативная система кольца A и $\mathfrak{G}$ — группа операторов на A, относительно которой множество S *устойчиво*; тогда для любого $\sigma\in\mathfrak{G}$ существует, и притом единственный, эндоморфизм $z\to\sigma\cdot z$ кольца $S^{-1}A$, при котором $\sigma\cdot(a/1)=$

$= (\tau \cdot a)/1$ для любого $a \in B$; он задается формулой $\sigma \cdot (a/s) = (\sigma \cdot a)/(\sigma \cdot s)$ для $a \in A$ и $s \in S$ (гл. II, § 2, n° 1, предложение 2); если τ — другой элемент из $\mathcal{G}$, то ясно, что $\sigma \cdot \tau \cdot (z) = (\sigma\tau) \cdot z$ для любого $z \in S^{-1}A$; следовательно, группа $\mathcal{G}$ *действует на кольце* $S^{-1}A$.

Предложение 23. *Пусть A — некоторая K-алгебра, $\mathcal{G}$ — локально конечная группа операторов на A, S — мультипликативная система в A, устойчивая относительно $\mathcal{G}$, и $S^{\mathcal{G}}$ — множество $S \cap A^{\mathcal{G}}$. Тогда каноническое отображение кольца $(S^{\mathcal{G}})^{-1}A$ в $S^{-1}A$* (гл. II, § 2, n° 1, следствие 2 предложения 2) *является изоморфизмом, который переводит $(S^{\mathcal{G}})^{-1}A^{\mathcal{G}}$ на $(S^{-1}A)^{\mathcal{G}}$.*

Действительно, для любого $s \in S$ обозначим через $s, s_1, \ldots, s_q$ различные элементы орбиты элемента s относительно группы $\mathcal{G}$. Поскольку $ss_1 \ldots s_q \in S^{\mathcal{G}}$, первое утверждение следует из предложения 8 гл. II, § 2, n° 3. Очевидно, что при каноническом отождествлении $(S^{\mathcal{G}})^{-1}A$ с $S^{-1}A$ любой элемент из $(S^{\mathcal{G}})^{-1}A^{\mathcal{G}}$ оказывается инвариантным относительно $\mathcal{G}$. Обратно, пусть a/t — произвольный элемент из $(S^{\mathcal{G}})^{-1}A$, инвариантный относительно $\mathcal{G}$ ($a \in A$, $t \in S^{\mathcal{G}}$); если a_j $(1 \leqslant i \leqslant m)$ — различные элементы орбиты элемента a относительно группы $\mathcal{G}$, то, следовательно, $a_j/t = a/t$ для $1 \leqslant j \leqslant m$, и потому существует такой элемент $s \in S^{\mathcal{G}}$, что $s(a_j - a) = 0$ при $1 \leqslant j \leqslant m$; другими словами, элемент sa инвариантен относительно $\mathcal{G}$ и, поскольку $a/t = (sa)/(st)$, имеет место включение $a/t \in (S^{\mathcal{G}})^{-1}A^{\mathcal{G}}$.

Следствие. *Пусть A — целостное кольцо, K — его поле частных и $\mathcal{G}$ — локально конечная группа операторов на A. Тогда $\mathcal{G}$ действует на K и $K^{\mathcal{G}}$ представляет собой поле частных кольца $A^{\mathcal{G}}$.*

Действительно, мультипликативная система $A - \{0\}$ устойчива относительно группы $\mathcal{G}$.

Упражнения

1) Пусть d — целое рациональное число, свободное от квадратов, в кольце $\mathbf{Z}$. Показать, что если $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$, то целые над $\mathbf{Z}$ элементы поля K имеют вид $a + b\sqrt{d}$, где $a, b \in \mathbf{Z}$, если $d - 1 \not\equiv 0 \pmod 4$; если же $d - 1 \equiv 0 \pmod 4$, то целые элементы этого поля имеют вид $(a + b\sqrt{d})/2$, где $a, b \in \mathbf{Z}$, причем a и b одновременно либо четны, либо нечетны (ср. *Алгебра*, гл. VII, § 1, упражнение 8). Получить отсюда, что кольцо $A = \mathbf{Z}[\sqrt{5}]$ не является целозамкнутым, и привести пример элемента из $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$, целого над A, коэффициенты минимального многочлена которого над полем частных кольца A не лежат в A.

2) Пусть K — поле, а A есть K-подалгебра алгебры многочленов $K[X, Y]$, порожденная одночленами Y^kX^{k+1} ($k \geqslant 0$). Показать что элемент XY обладает тем свойством, что кольцо $A[XY]$ содержится в некотором A-модуле конечного типа, хотя XY не является целым над A.

3) Привести пример бесконечной последовательности (K_n) расширений некоторого поля K, имеющих конечные степени над K, для которой K-алгебра $\prod_n K_n$ не алгебраична над K.

4) Привести пример двух элементов кольца матриц $\mathbf{M}_2(\mathbf{Q})$, целых над $\mathbf{Z}$, сумма и произведение которых не являются целыми над $\mathbf{Z}$ элементами (рассмотреть матрицы вида $I+N$, где N — нильпотентный элемент в кольце матриц).

5) Пусть A — коммутативное кольцо, B — некоторое коммутативное кольцо, содержащее A, и x — какой-нибудь обратимый элемент из B. Показать, что любой элемент из $A[x] \cap A[x^{-1}]$ цел над A. (Если $y = a_0 + \ldots a_p x^{-p} = b_0 + \ldots + b_q x^q$, где a_i и b_j лежат в A, то надо показать, что A-подмодуль кольца B, порожденный элементами $1, x, \ldots, x^{p+q-1}$, является точным $A[y]$-модулем.)

6) Пусть A — коммутативное кольцо, B — некоторая коммутативная A-алгебра; предположим, что число *минимальных* простых идеалов в B *конечно*; пусть $\mathfrak{p}_i$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) — эти идеалы (обратите внимание на то, что приведенное предположение выполнено, если кольцо B нётерово). Для того чтобы элемент $x \in B$ был целым над A, необходимо и достаточно, чтобы каждый из канонических образов x_i этого элемента в кольцах $B/\mathfrak{p}_i$ был целым над A. (Если это условие выполнено, то сначала надо показать, что x цел над подалгеброй кольца B, порожденной нильрадикалом $\mathfrak{N} = \bigcap_i \mathfrak{p}_i$ алгебры B, и воспользоваться тем, что элементы идеала $\mathfrak{N}$ нильпотентны.)

7) Привести пример редуцированного кольца A, целозамкнутого в своем полном кольце частных, которое не является произведением целостных колец (взять целое замыкание поля K в бесконечном произведении $\prod_n K_n$, подходящим образом подобранных алгебраических расширений поля K).

8) Пусть A — коммутативное кольцо и B — некоторая конечная A-алгебра. Показать, что существуют конечная A-алгебра C, являющаяся *свободным* A-модулем, и сюръективный A-гомоморфизм $C \to B$.

9) Показать, что, хотя кольцо $\mathbf{Z}[X]$ является целозамкнутым, факторкольцо $\mathbf{Z}[X]/(X^2+4)$ не обладает этим свойством.

10) Пусть A — вполне целозамкнутое кольцо. Показать, что для любого множества I кольцо многочленов $A[X_\iota]_{\iota \in I}$ и кольцо формальных рядов $A[[X_\iota]]_{\iota \in I}$ (*Алгебра*, гл. IV, § 5, упражнение 1) являются вполне целозамкнутыми. (Воспользоваться предложением 14 n°4 и следующей леммой: для любого конечного подмножества J множества I и любого ряда $P \in A[[X_\iota]]_{\iota \in I}$ обозначим через P_J формальный ряд из кольца $A[[X_\iota]]_{\iota \in J}$, полученный из P заменой на 0 в P всех X_ι с индексом $\iota \notin J$; если P, Q — такие два формальных ряда, что P_J делится на Q_J в $A[[X_\iota]]_{\iota \in I}$ для любого J, то P делится на Q в $A[[X_\iota]]_{\iota \in I}$. Надо заметить для этого, что если J, J' — два конечных подмножества множества I, для которых $J \subset J'$, и если $P_{J'} = L' \cdot Q_{J'}$, $P_J = LQ_J$, то L получается из L' заменой на 0 в L' элементов X_ι с индексом $\iota \in J' - J$.)

11) а) Пусть R — целостное кольцо, (A_α) — возрастающее фильтрующееся семейство подколец кольца R и A — объединение колец A_α. Показать, что если каждое A_α целозамкнуто, то целозамкнуто и A.

б) Пусть K — поле, $R = K(X, Y)$ — поле рациональных дробей от двух переменных над K. Для любого целого $n > 0$ обозначим через A_n подкольцо $K[X, Y, YX^{-n}]$ кольца R. Показать, что кольца A_n вполне целозамкнуты, но объединение этих колец вполне целозамкнутым не будет. (Показать, что, для того чтобы элемент вида $P(X, Y)X^{-ns}$, где $P \in K[X, Y]$, принадлежал кольцу A_n, необходимо и достаточно, чтобы P принадлежал $\mathfrak{J}^s$, где $\mathfrak{J}$ — идеал кольца $K[X, Y]$, порожденный X^n и Y.)

¶ *12) Пусть A — кольцо целых функций (с комплексными значениями) от одной комплексной переменной. Это целостное кольцо, поле частных которого есть поле мероморфных функций от одной комплексной переменной.

а) Показать, что A вполне целозамкнуто.

б) Для любого $x \in A$ обозначим через $Z(x)$ множество нулей элемента x (которое является замкнутым подмножеством в $\mathbf{C}$, причем, если $x \neq 0$, дискретным (и, следовательно, счетным)). Если $\mathfrak{a}$ — идеал кольца A, отличный от A и от (0), то показать, что множества $Z(x)$ для $x \in \mathfrak{a}$ образуют базис некоторого фильтра $\mathfrak{F}_\mathfrak{a}$. (Если x и y — две целые функции без общих нулей, то показать, используя теорему Миттаг-Леффлера, что можно записать $\frac{1}{xy} = \frac{u}{x} + \frac{v}{y}$, где u и v лежат в A, и вывести отсюда равенство $Ax + Ay = 0$.) Обратно, для любого фильтра $\mathfrak{F}$ на прямой $\mathbf{C}$, которому принадлежит какое-нибудь замкнутое и дискретное подмножество прямой $\mathbf{C}$, множество $\mathfrak{a}(\mathfrak{F})$ элементов $x \in A$, для которых $Z(x) \in \mathfrak{F}$, является идеалом в A. Показать, что $\mathfrak{F}_{\mathfrak{a}(\mathfrak{F})} = \mathfrak{F}$ для любого фильтра $\mathfrak{F}$, которому принадлежит какое-нибудь замкнутое и дискретное подмножество из $\mathbf{C}$, и $\mathfrak{a}(\mathfrak{F}) \supset \mathfrak{a}$ для любого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A, отличного от A и от (0).

в) Если $\mathfrak{p} \neq 0$ — некоторый простой идеал кольца A, то показать, что $\mathfrak{F}_\mathfrak{p}$ является ультрафильтром. (Ограничиться случаем, когда все множества фильтра $\mathfrak{F}_\mathfrak{p}$ бесконечны и показать, что если $M \in \mathfrak{F}_\mathfrak{p}$ является объединением двух бесконечных множеств M', M'' без общих точек, то одно из этих множеств принадлежит $\mathfrak{F}_\mathfrak{p}$.) Обратно, для любого ультрафильтра $\mathfrak{U}$ на $\mathbf{C}$, которому принадлежит какое-нибудь замкнутое дискретное подмножество из $\mathbf{C}$, $\mathfrak{a}(\mathfrak{U})$ является максимальным идеалом в A; верно и обратное.

г) Пусть $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр на $\mathbf{C}$, являющийся образом при каноническом вложении $\mathbf{Z} \to \mathbf{C}$ некоторого нетривиального ультрафильтра на $\mathbf{Z}$. Показать, что существуют простые немаксимальные идеалы $\mathfrak{p}$ кольца A, для которых $\mathfrak{F}_\mathfrak{p} = \mathfrak{U}$. (Для любого $x \in \mathfrak{a}(\mathfrak{U})$ и любого $n \in \mathbf{Z}$ пусть $\omega_x(n)$ обозначает порядок функции x в точке n ($\omega_x(n) = 0$, если $x(n) \neq 0$); рассмотреть множество $\mathfrak{p}$ таких элементов $x \in \mathfrak{a}(\mathfrak{U})$, что $\lim_\mathfrak{U} \omega_x = +\infty$.)

д) В обозначениях пункта г) пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал $\mathfrak{a}(\mathfrak{U})$. Показать, что кольцо $A_\mathfrak{m}$ не является вполне целозамкнутым (рассмотреть мероморфную функцию $1/(\sin \pi z)$.)

¶ 13) Пусть A — целостное локальное кольцо и K — его поле частных. Рассмотрим следующие свойства:

(i) Кольцо A гензелево (*гл. III, § 4, упражнение 3*).

(ii) Для любого расширения L поля K конечной степени над K целое замыкание A' кольца A в L является локальным кольцом.

Показать, что из (i) следует (ii) и что обратное верно, если кольцо A целозамкнуто. (Чтобы показать, что из (i) следует (ii), надо заметить, что A' является объединением некоторого возрастающего фильтрующего семейства конечных A-алгебр, и воспользоваться определением гензелева кольца. Чтобы показать, что из (ii) следует (i), когда A целозамкнуто, надо показать, что если $P \in A[X]$ — неприводимый унитарный многочлен и если $f\colon A \to k$ — канонический гомоморфизм из A на поле вычетов k, то $\overline{f}(P)$ является не-

приводимым многочленом в $k[X]$. Для этого надо заметить, что многочлен P неприводим в $K[X]$, и рассмотреть поле $L = K[X]/(f)$).

Когда выполняется условие (ii), то целое замыкание A' кольца A в любом расширении поля K является локальным кольцом. Рассмотреть случай отделимых и полных локальных колец; если A — отделимое и полное нётерово локальное кольцо, то любая A-алгебра, содержащаяся в A' и являющаяся A-модулем конечного типа, представляет собой отделимое и полное локальное кольцо.

14) Пусть A — вполне целозамкнутое целостное кольцо и K — его поле частных. Показать, что для любого расширения L поля K целое замыкание A' кольца A в L является вполне целозамкнутым. (Свести доказательство к случаю, когда L расширение типа Галуа [1]) конечной степени m поля K; если $x \in L$ — такой элемент, что существует $d \in A'$, для которого $dx^n \in A'$ при любом $n \geqslant 0$, то сначала надо показать, что можно считать выполненным включение $d \in A$; затем отсюда получить, что если c_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ — коэффициенты минимального многочлена элемента x над K, то $d^m c_i^n \in A$ для любого $n \geqslant 0$.)

15) Пусть K — поле характеристики 0, содержащее все корни из единицы и такое, что существуют расширения Галуа поля K, группа Галуа которых неразрешима (ср., например, *Алгебра*, гл. V, Приложение 1, n° 1, предложение 2). Пусть Ω — алгебраическое замыкание поля K и Ω_0 — множество таких элементов $z \in \Omega$, что расширение Галуа поля K, порожденное элементом z в Ω, обладает разрешимой группой Галуа.

а) Показать, что Ω_0 — подполе поля Ω, отличное от Ω (ср. *Алгебра*, гл. V, § 10, n° 3, теорема 1).

б) Пусть A — подкольцо кольца $\Omega[X]$, образованное многочленами P, для которых $P(0) \in \Omega_0$. Показать, что кольцо A не является целозамкнутым, но любой элемент из его поля частных $\Omega(X)$, некоторая степень которого принадлежит A, сам принадлежит A.

16) Пусть B — кольцо, A — некоторое подкольцо в B и $\mathfrak{f}$ — идеал в A, являющийся аннулятором A-модуля B/A. Пусть U — дополнение в $X = \mathrm{Spec}(A)$ замкнутого множества $V(\mathfrak{f})$, и пусть $u = {}^a\rho$, где $\rho\colon A \to B$ — каноническое вложение. Показать, что ограничение отображения u на $u^{-1}(U)$ является гомоморфизмом множества $u^{-1}(U)$ на множество U (для любого элемента $g \in \mathfrak{f}$ рассмотреть спектр кольца A_g, отождествляемый с открытым множеством $X_g \subset U$).

17) Пусть K — поле, B — кольцо многочленов $K[X_n]_{n \in \mathbf{N}}$, A — подкольцо в B, порожденное одночленами X_n^2 и X_n^3 при всех $n \in N$. Показать, что B является целым замыканием кольца A и что кондуктор кольца B в A равен 0; но если $S = A - \{0\}$, то кондуктор кольца $S^{-1}B$ в $S^{-1}A$ не равен нулю и $S^{-1}A$ — целозамкнутое кольцо.

18) Пусть A — целостное кольцо, K — его поле частных, M — любой A-модуль конечного типа, u — некоторый эндоморфизм модуля M, $u \otimes 1$ — соответствующий эндоморфизм конечномерного векторного K-пространства $M_{(K)} = M \otimes_A K$. Показать, что коэффициенты характеристического многочлена преобразования $u \otimes 1$ являются целыми над A (воспользоваться условием (E_{III}) из теоремы 1 n° 1).

19) а) Пусть A — целозамкнутое кольцо, K — его поле частных, L — некоторое сепарабельное алгебраическое расширение поля K, x — какой-нибудь элемент из L, целый над A, K' — поле $K(x) \subset L$ и F — минимальный многочлен элемента x над полем K. Если x имеет степень n над K, то показать,

[1]) См. примечание на стр. 385. — *Прим. ред.*

что целое замыкание кольца A в K' содержится в A-модуле, порожденном элементами $1/F'(x)$, $x/F'(x)$, ..., $x^{n-1}/F'(x)$ поля K'. (Если $z \in K'$ — целый над A элемент, то запишем

$$zF'(x) = g(x), \quad \text{где} \quad g(X) = b_0 + b_1X + \ldots + b_{n-1}X^{n-1} \in K[X].$$

Показать с помощью интерполяционной формулы Лагранжа, что

$$g(X) = \mathrm{Tr}_{K'[X]/K[X]}\left(z \cdot \frac{F(X)}{X - x}\right).)$$

б) Пусть A — целозамкнутое кольцо, K — его поле частных, p — характеристическая экспонента поля K. Предположим, что подкольцо $A^{1/p}$ поля $K^{1/p}$, образованное корнями p-й степени из элементов кольца A, является A-модулем конечного типа. Показать, что для любого расширения E поля K конечной степени целое замыкание кольца A в E является A-модулем конечного типа (свести доказательство к случаю, когда E — расширение типа Галуа).

¶ *20) Пусть K_0 — совершенное поле характеристики $p > 0$, K — поле рациональных дробей $K_0(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$, B — кольцо формальных рядов $K[[Z]]$, где Z — некоторая переменная; если $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца B, то B отделимо и полно в $\mathfrak{m}$-аднческой топологии и является кольцом дискретного нормирования. Пусть $L = K((Z))$ — поле частных кольца B, E_0 — подполе в L, порожденное подполем L^p и элементами Z и X_n (для $n \in \mathbf{N}$).

а) Показать, что элемент $c = \sum_{n=0}^{\infty} X_n Z^n$ поля L не принадлежит подполю E_0.

б) Пусть E — какой-нибудь максимальный элемент множества подполей поля L, содержащих E_0 и не содержащих c; положим $A = B \cap E$. Показать, что A — кольцо дискретного нормирования (следовательно, нётерово), для которого E является полем частных; если $\mathfrak{m}'$ — максимальный идеал кольца A, то $\mathfrak{m}'^k = \mathfrak{m}^k \cap A$ и A плотно в B относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии; поле $L = K(c)$ является расширением поля K степени p и B есть целое замыкание кольца A в поле L, но B не является A-модулем конечного типа (воспользоваться упражнением 9б) гл. III, § 3).*

¶ 21) а) Пусть K_0 — совершенное поле характеристики $p > 0$, L — поле рациональных дробей $K_0(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$, A' — кольцо формальных рядов $L[[Y, Z]]$, где Y и Z — две переменные, A — кольцо, являющееся тензорным произведением $K[[Y, Z]] \otimes_K L$, где $K = L^p \subset L$. Кольцо A является неполным нётеровым локальным кольцом, пополнение которого отождествляется с A' (гл. III, § 3, упражнение 17) и A' является целым над A. Обозначим через c_n элемент $X_nY + X_{n+1}YZ + X_{n+2}YZ^2 + \ldots$ кольца A'. Пусть B — подкольцо в A', порожденное кольцом A и элементами c_n ($n \geqslant 0$). Если $C = A[c_0]$, то кольцо C нётерово, кольцо B (не являющееся целозамкнутым) содержится в целом замыкании кольца C и содержит C; показать, что тем не менее B не нётерово (обратить внимание на то, что c_n не принадлежит идеалу кольца B, порожденному элементами c_i, $i < n$).

б) Предположим, что $p = 2$; пусть обозначения K_0, K и L имеют тот же смысл, что и в пункте а), но на этот раз рассматривается кольцо формальных рядов $A' = L[[Y, Z, T]]$ от трех переменных, подкольцо

$$A = K[[Y, Z, T]] \otimes_K L$$

и элемент

$$b = Y \sum_{n \geqslant 0} X_{2n}T^n + Z \sum_{n \geqslant 0} X_{2n+1}T^n.$$

Показать, что кольцо $A[b]$ нётерово, однако его целое замыкание нётеровым не является. (Поскольку $b^2 \in A$, любой элемент поля частных кольца $A[b]$ имеет вид $P+Qb$, где P и Q — линейные комбинации некоторого конечного множества элементов X_k с коэффициентами в поле частных кольца $K[[Y, Z, T]]$; показать, что, для того чтобы такой элемент был целым над $A[b]$, необходимо и достаточно, чтобы он принадлежал кольцу A'. Показать, что B порождается элементами

$$b_i = Y \sum_{n \geqslant 0} X_{2(i+n)} T^n + Z \sum_{n \geqslant 0} X_{2(i+n)+1} T^n \quad \text{при} \quad i \geqslant 0$$

и закончить рассуждения так же, как в случае а).)

22) Пусть A — целозамкнутое кольцо, K — его поле частных. Показать, что для любого расширения L поля K существует целозамкнутое подкольцо B поля L, для которого L является полем частных и которое удовлетворяет условию $B \cap K = A$ (рассмотреть L как алгебраическое расширение чисто трансцендентного расширения $E = K(X_\iota)_{\iota \in I}$ поля K и свести рассуждения к случаю, когда L является алгебраическим расширением поля K, воспользовавшись упражнением 11а)).

23) а) Пусть K — поле, n — целое число, взаимно простое с характеристикой поля K, P — некоторый многочлен из $K[X]$, имеющий только простые корни (в некотором алгебраическом замыкании поля K). Положить $f(X, Y) = Y^n - P(X)$, показать, что если K содержит корни n-й степени из единицы, то кольцо $A = K[X, Y]/(f)$ целозамкнуто и его поле частных является сепарабельным расширением L поля $K(X)$, порожденным некоторым корнем y многочлена f (рассматриваемого как многочлен из $K(X)[Y]$). (Показать, что если элемент z поля L является целым над $K[X]$, то он принадлежит кольцу A; для этого надо записать z в виде $z = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(X) y^i$, где $a_i(X) \in K(X)$. Показать, что элементы $a_i(X)\, y^i$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ являются целыми над $K[X]$ и вывести отсюда, что $(a_i(X))^n (P(X))^i$ являются элементами кольца $K[X]$; в заключение вывести, что тем же свойством обладают и $a_i(X)$.)

б) Предположим, что K является несовершенным полем характеристики $p \neq 2$; пусть $a \in K$ — некоторый элемент, не принадлежащий подполю K^p, E — поле $K(a^{1/p})$ и положим $P(X) = X^p - a$, $f(X, Y) = Y^2 - P(X)$. Если A — целозамкнутое кольцо $K[X, Y]/(f)$, то показать, что $B = E \otimes_K A$ — целостное, но не целозамкнутое кольцо (рассмотреть элемент $y/(X - a^{1/p})$ поля частных кольца B).

24) Пусть Δ — коммутативная группа без кручения, записываемая аддитивно. Пусть A — коммутативное кольцо, B — некоторая коммутативная A-алгебра и h: $A \to B$ — гомоморфизм колец, определяющий на B структуру A-алгебры. Тогда $h^{(\Delta)}: A^{(\Delta)} \to B^{(\Delta)}$ (*Algèbre*, chap. II, 3e éd., § 11, exercice 1) является гомоморфизмом (кольцевым) групповой алгебры $A^{(\Delta)}$ группы Δ над кольцом A в групповую алгебру $B^{(\Delta)}$ группы Δ над кольцом B. Пусть $P = \sum_{\alpha \in \Delta} b_\alpha \otimes X^\alpha$ — какой-нибудь элемент из $B^{(\Delta)}$. Показать, что, для того чтобы P был целым над $A^{(\Delta)}$, необходимо и достаточно, чтобы каждый из элементов $b_\alpha \in B$ был целым над A. (Свести к случаю, когда Δ является группой конечного типа, и далее к случаю $\Delta = \mathbf{Z}$.) Показать, что если A целозамкнуто, то целозамкнуто и кольцо $A^{(\Delta)}$.

25) Пусть Δ — совершенно упорядоченная коммутативная группа. Распространить на случай градуированных колец типа Δ предложения 20 и 21 n° 8 (для предложения 20 надо воспользоваться упражнением 24; для предложе-

ния 21 надо обобщить лемму 4 n° 8 на случай, когда Δ является группой конечного типа, а затем доказать предложение 21 с помощью перехода к индуктивному пределу).

¶ 26) а) Пусть A — такое целостное кольцо, что для всякого элемента $a \neq 0$ из A идеал Aa является пересечением семейства $(\mathfrak{q}_\iota)$ насыщений идеала Aa относительно простых идеалов $\mathfrak{p}_\iota$, минимальных среди тех простых идеалов, которые содержат a и для которых кольца частных $A_{\mathfrak{p}_\iota}$ целозамкнуты (соответственно вполне целозамкнуты). Показать, что в этом случае A целозамкнуто (соответственно вполне целозамкнуто).

б) Пусть A — сильно ласкерово локальное кольцо (гл. IV, § 2, упражнение 28), $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал. Предположим, что для некоторого $a \in A$ идеал $\mathfrak{m}$ является *вложенным* простым идеалом, слабо ассоциированным с A/Aa (гл. IV, § 1, упражнение 17). Показать, что $Aa : \mathfrak{m}$ содержится во всяком идеале, примарном относительно какого-либо простого идеала $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, слабо ассоциированного с A/Aa (рассмотреть кондуктор $\mathfrak{q} : \mathfrak{m}$ для такого примарного идеала $\mathfrak{q}$, ср. гл. IV, § 2, упражнение 30). Если, кроме того, предполагается, что кольцо A целостное, то показать, что для простого идеала $\mathfrak{p}$, минимального среди тех простых идеалов, которые содержат Aa, не может выполняться соотношение $\mathfrak{p}(Aa : \mathfrak{m}) = Aa$ (если $\mathfrak{q}$ — насыщение идеала Aa относительно $\mathfrak{p}$, то заметить, что из предыдущего соотношения следовало бы, что $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q}\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ в $A_{\mathfrak{p}}$, и закончить с помощью упражнения 29г) из гл. IV, § 2).

в) Показать, что если A — целостное сильно ласкерово кольцо без делителей нуля и если существует элемент $a \neq 0$ в A, для которого имеются *вложенные* слабо ассоциированные с A/Aa простые идеалы, то A не является вполне целозамкнутым. (Свести к случаю, рассмотренному в пункте б); в обозначениях пункта б) существует тогда элемент $b \in Aa : \mathfrak{m}$, такой, что $b \notin Aa$ и справедливо включение $b\mathfrak{p} \subset a\mathfrak{m}$; вывести отсюда индукцией по n, что $b\mathfrak{p}^n \subset a^h\mathfrak{m}$ для всякого n.)

г) Вывести, в частности, из а) и в), что, для того чтобы целостное нётерово кольцо A было целозамкнутым, необходимо и достаточно, чтобы для любого $a \neq 0$ из A простые идеалы $\mathfrak{p}$, ассоциированные с A/Aa, не были вложенными и чтобы для всякого такого простого $\mathfrak{p}$ кольцо частных $A_{\mathfrak{p}}$ было целозамкнутым (ср. гл. VII, § 1, n° 4, предложение 8).

27) Пусть A — целозамкнутое кольцо, но не являющееся вполне целозамкнутым, K — его поле частных; пусть $a \neq 0$ — некоторый необратимый элемент кольца A, для которого в A существует такой элемент $d \neq 0$, что $da^{-n} \in A$ при любом целом $n \geqslant 0$. Показать, что в поле формальных рядов $K((X))$ существует формальный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k X^k = f(X)$, удовлетворяющий уравнению $(f(X))^2 - af(X) + X = 0$, а потому являющийся целым над $A[[X]]$, который принадлежит полю частных кольца $A[[X]]$, но самому $A[[X]]$ не не принадлежит, в силу чего кольцо $A[[X]]$ не является целозамкнутым.

28) Пусть k — поле и A_0 — кольцо многочленов $k[X_n, Y_n]_{n \in \mathbf{Z}}$ от двух бесконечных семейств переменных. Пусть $\mathscr{G}$ — моногенная бесконечная группа (следовательно, эта группа изоморфна группе $\mathbf{Z}$) и σ — ее образующая. Определим действие группы $\mathscr{G}$ на кольце A_0, положив $\sigma(Y_n) = Y_n$ и $\sigma(X_n) = X_{n+1}$ для любого $n \in \mathbf{Z}$. Пусть $\mathfrak{J}$ — идеал в A_0, порожденный элементами $Y_n(X_n - X_{n+1})$ для всех $n \in \mathbf{Z}$, и A — факторкольцо $A_0/\mathfrak{J}$; так как $\sigma(\mathfrak{J}) \subset \mathfrak{J}$, то группа $\mathscr{G}$ действует и на A посредством перехода к факторкольцам. Пусть S — мультипликативная система кольца A, порожденная каноническими образами элементов Y_n в A, так что S образована инвариантными относительно $\mathscr{G}$ элементами. Показать, что $S^{-1}(A^{\mathscr{G}}) \neq (S^{-1}A)^{\mathscr{G}}$.

29) Пусть k — поле характеристики $\neq 2$, A — кольцо многочленов $k[T]$ от одной переменной, a, b — два таких элемента из k, что $a \neq 0$, $b \neq 0$,

$a \neq b$. Пусть $K = k(T)$ — поле частных кольца A, L, M — расширения поля K, полученные присоединением к K корня многочлена $X^2 - T(T-a)$ и корня многочлена $X^2 - T(T-b)$ соответственно. Пусть B, C — целые замыкания кольца A в L и M соответственно, являющиеся свободными A-модулями конечного типа. Показать, что $L \otimes_K M$ есть поле, являющееся конечным сепарабельным расширением поля K, но кольцо $B \otimes_A C$, отождествляющееся с некоторым подкольцом в $L \otimes_K M$, не является целым замыканием кольца A в поле $L \otimes_K M$.

§ 2. Подъем простых идеалов

1. Первая теорема существования

Определение 1. *Пусть A, A' — два кольца и $h\colon A \to A'$ — некоторый гомоморфизм колец. Мы говорим, что идеал $\mathfrak{a}'$ кольца A' лежит над идеалом $\mathfrak{a}$ кольца A, если $\mathfrak{a} = h^{-1}(\mathfrak{a}')$.*

Таким образом, утверждение „простой идеал $\mathfrak{p}'$ кольца A' лежит над простым идеалом $\mathfrak{p}$ кольца A“ означает, что $\mathfrak{p}$ является *образом* идеала $\mathfrak{p}'$ при непрерывном отображении ${}^a h\colon \operatorname{Spec}(A') \to \operatorname{Spec}(A)$, ассоциированном с гомоморфизмом h (гл. II, § 4, n° 3).

Отметим, что для существования в A' идеала, лежащего над идеалом (0) кольца A, необходимо и достаточно, чтобы гомоморфизм $h\colon A \to A'$ был *инъективным*.

Пусть $\mathfrak{a}$ — какой-нибудь идеал кольца A; при переходе к факторкольцам гомоморфизм h определяет гомоморфизм $h_1\colon A/\mathfrak{a} \to A'/\mathfrak{a}A'$; утверждение, что $\mathfrak{a}'$ является идеалом кольца A', лежащим над $\mathfrak{a}$, эквивалентно тому, что $\mathfrak{a}A' \subset \mathfrak{a}'$ и идеал $\mathfrak{a}'/\mathfrak{a}A$ кольца $A'/\mathfrak{a}A$ лежит *над* идеалом (0).

Лемма 1. *Пусть $h\colon A \to A'$ — гомоморфизм колец, S — мультипликативная система в A, $i = i_A^S\colon A \to S^{-1}A$, $i' = i_{A'}^{h(S)}\colon A' \to S^{-1}A' = (h(S))^{-1}A'$ — канонические гомоморфизмы и $h_1 = S^{-1}h\colon S^{-1}A \to S^{-1}A'$, так что коммутативна следующая диаграмма:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & A' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ S^{-1}A & \xrightarrow[h_1]{} & S^{-1}A' \end{array}$$

Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца A, для которого $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$. Тогда $\mathfrak{a}' \to S^{-1}\mathfrak{a}'$ является сюръективным отображением множества $\mathcal{F}$ идеалов кольца A', лежащих над $\mathfrak{p}$, на множество $\mathcal{F}_1$ идеалов кольца $S^{-1}A'$, лежащих над $S^{-1}\mathfrak{p}$, а отображение $\mathfrak{a}_1' \to i'^{-1}(\mathfrak{a}_1')$ представляет собой биективное отображение мно-

жества $\mathscr{F}_1$ на множество идеалов, принадлежащих $\mathscr{F}$ и насыщенных относительно $h(S)$. В частности, $\mathfrak{p}' \to S^{-1}\mathfrak{p}'$ является биективным отображением множества простых идеалов кольца A', лежащих над $\mathfrak{p}$, на множество простых идеалов кольца $S^{-1}A'$, лежащих над $S^{-1}\mathfrak{p}$.

Известно, что $S^{-1}\mathfrak{p}$ является простым идеалом в $S^{-1}A$ и что $i^{-1}(S^{-1}\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ (гл. II, § 2, n° 5, предложение 11); следовательно, если существует идеал $\mathfrak{b}'$ кольца $S^{-1}A$, лежащий над $S^{-1}\mathfrak{p}$, то $h^{-1}(i'^{-1}(\mathfrak{b}')) = i^{-1}(h_1^{-1}(\mathfrak{b}')) = \mathfrak{p}$; поскольку имеет место равенство $S^{-1}i'^{-1}(\mathfrak{b}') = \mathfrak{b}'$ (loc. cit.), то отсюда следует, что образ множества $\mathscr{F}$ при отображении $\mathfrak{a}' \to S^{-1}\mathfrak{a}'$ *содержит* $\mathscr{F}_1$. С другой стороны, если $\mathfrak{a}' \in \mathscr{F}$, $a \in A$ и $s \in S$, то оказываются справедливыми следующие двусторонние импликации:

$h_1(a/s) \in S^{-1}\mathfrak{a}' \Leftrightarrow h(a)/h(s) \in S^{-1}\mathfrak{a}' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ существует такой элемент $t \in S$, что $h(t)\,h(a) \in \mathfrak{a}' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ существует такой элемент $t \in S$, что $ta \in \mathfrak{p} \Leftrightarrow a/z \in S^{-1}\mathfrak{p}$.

Следовательно, $h_1^{-1}(S^{-1}\mathfrak{a}') = S^{-1}\mathfrak{p}$, тем самым доказано, что образ множества $\mathscr{F}$ при отображении $\mathfrak{a}' \to S^{-1}\mathfrak{a}'$ равен $\mathscr{F}_1$; остальные утверждения следуют из предложения 11 гл. II, § 2, n° 5.

Предложение 1. *Пусть $h\colon A \to A'$ — такой гомоморфизм колец, что кольцо A' является целым над A, $\mathfrak{p}'$ — простой идеал в A' и $\mathfrak{p} = h^{-1}(\mathfrak{p}')$. Для того чтобы идеал $\mathfrak{p}$ был максимален, необходимо и достаточно, чтобы максимальным был идеал $\mathfrak{p}'$.*

В самом деле, положим $B = A/\mathfrak{p}$, $B' = A'/\mathfrak{p}'$, и пусть $h_1\colon B \to B'$ — гомоморфизм, определенный гомоморфизмом h при переходе к факторкольцам; кольца B и B' целостные, причем B' — целое над B (§ 1, n° 1, предложение 2). Утверждение, что идеал $\mathfrak{p}$ (соответственно $\mathfrak{p}'$) максимален, означает, что B (соответственно B') является полем. Следовательно, предложение вытекает из следующей леммы:

Лемма 2. *Пусть B — целостное кольцо и A — такое подкольцо в B, что B цело над A. Для того чтобы B было полем, необходимо и достаточно, чтобы полем было кольцо A.*

Если A — поле, то тогда для любого $y \neq 0$ из B кольцо $A[y]$ представляет собой, согласно предположению (§ 1, теорема 1), A-модуль конечного типа; поскольку $A[y]$ — целостное кольцо, оно является полем (*Алгебра*, гл. V, § 2, n° 1, предложение 1) и a fortiori элемент y обратим в B, а потому B является полем. Обратно, предположим, что B — поле и выбран произвольный

элемент $z \neq 0$ в кольце A. Поскольку $z^{-1} \in B$, элемент z^{-1} цел над A; иначе говоря, имеет место уравнение целой зависимости

$$z^{-n} + a_1 z^{-(n-1)} + \ldots + a_n = 0,$$

где $a_i \in A$. Но это соотношение показывает, что

$$-z^{-1} = a_1 + a_2 z + \ldots + a_n z^{n-1} \in A,$$

и потому кольцо A оказывается полем.

Следствие 1. *Пусть h: $A \to A'$ — такой гомоморфизм колец, что A' является целым над A, $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A, $\mathfrak{p}'$ и $\mathfrak{a}'$ — такие два идеала в A', лежащие над $\mathfrak{p}$, что $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{a}'$. Если идеал $\mathfrak{p}'$ прост, то $\mathfrak{a}' = \mathfrak{p}'$.*

Положим $S = A - \mathfrak{p}$; тогда кольцо $S^{-1}A$ является целым над S^{-1} (§ 1, n° 5, предложение 16), а $S^{-1}\mathfrak{p}$ — максимальным идеалом в $S^{-1}A$ (гл. II, § 2, n° 5, предложение 11); идеалы $S^{-1}\mathfrak{a}'$ и $S^{-1}\mathfrak{p}'$ кольца $S^{-1}A'$ оказываются лежащими над $S^{-1}\mathfrak{p}$ (лемма 1) и $S^{-1}\mathfrak{a}' \supset S^{-1}\mathfrak{p}'$. Поскольку идеал $S^{-1}\mathfrak{p}'$ прост, он максимален в силу предложения 1; следовательно, $S^{-1}\mathfrak{p}' = S^{-1}\mathfrak{a}'$. Далее мы получаем, что $\mathfrak{a}'$ содержится в насыщении идеала $\mathfrak{p}'$ относительно $h(S)$, которое равно $\mathfrak{p}'$ (гл. II, § 2, n° 5, предложение 11).

Следствие 2. *Пусть A' — целостное кольцо, A — такое подкольцо в A', что A' цело над A, f — некоторый гомоморфизм из A' в некоторое кольцо B. Если ограничение f на A инъективно, то инъективен и гомоморфизм f.*

Действительно, если $\mathfrak{a}'$ — ядро гомоморфизма f, то наше предположение означает, что $\mathfrak{a}' \cap A = (0)$; поскольку A' целостное, мы можем применить следствие 1, взяв в качестве $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}'$ соответственно идеал (0) кольца A и идеал (0) кольца A', откуда $\mathfrak{a}' = (0)$.

Следствие 3. *Пусть h: $A \to A'$ — такой гомоморфизм колец, что A' является целым над A, а $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в A. Предположим, что в A' имеется лишь конечное число различных максимальных идеалов $\mathfrak{m}'_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, лежащих над $\mathfrak{m}$. Пусть $\mathfrak{q}'_j$ — насыщение идеала $\mathfrak{m}A'$ относительно $\mathfrak{m}'_j$ (гл. II, § 2, n° 4). Тогда:*

(i) *в кольце $A'/\mathfrak{q}'_j$ делители нуля — это элементы идеала $\mathfrak{m}'_j/\mathfrak{q}'_j$, и они нильпотентны $(1 \leqslant j \leqslant n)$;*

(ii) *имеют место равенства $\mathfrak{m}A' = \bigcap_j \mathfrak{q}'_j = \prod_j \mathfrak{q}'_j$;*

(iii) *канонический гомоморфизм $A'/\mathfrak{m}A' \to \prod_j (A'/\mathfrak{q}'_j)$ биективен.*

Для того чтобы простой идеал $\mathfrak{p}'$ кольца A' содержал $\mathfrak{m}A'$, необходимо и достаточно, чтобы его прообраз относительно гомоморфизма h содержал $\mathfrak{m}$ и, следовательно, чтобы $\mathfrak{p}'$ лежал над $\mathfrak{m}$, так как идеал $\mathfrak{m}$ максимален. Таким образом, идеалы $\mathfrak{m}'_j$ являются единственными простыми идеалами в A', содержащими $\mathfrak{m}A'$ (предложение 1), и потому $\mathfrak{r}' = \bigcap_j \mathfrak{m}'_j$ представляет собой корень идеала $\mathfrak{m}A'$ (гл. II, § 2, n° 6, следствие 1 предложения 13). По определению идеалов $\mathfrak{q}'_j$ класс $\bmod \mathfrak{q}'_j$ ни для какого элемента из $A' - \mathfrak{m}'_j$ не является делителем нуля в $A'/\mathfrak{q}'_j$; с другой стороны, так как $\mathfrak{m}'_j$ — различные максимальные идеалы, для каждого индекса j существует элемент a'_j, принадлежащий $\bigcap_{i \neq j} \mathfrak{m}'_i$, но не принадлежащий идеалу $\mathfrak{m}'_j$ (гл. II, § 1, n° 1, предложение 4). Для любого $x \in \mathfrak{m}'_j$ в таком случае $a'_j x \in \mathfrak{a}'$, и потому класс $\bmod \mathfrak{q}'_j$ элемента $a'_j x$ нильпотентен, а поскольку соответствующий класс элемента a'_j не является делителем нуля, мы заключаем, что класс элемента x нильпотентен, иначе говоря, $\mathfrak{m}'_j$ представляет собой *корень* идеала $\mathfrak{q}'_j$. Это и доказывает (i). Отсюда следует, что идеалы $\mathfrak{q}'_j$ являются попарно взаимно простыми (гл. II, § 1, n° 1, предположение 3); пункт (iii) будет поэтому вытекать из (ii), если принять во внимание предложение 5 гл. II, § 1, n° 2. Для того чтобы установить (ii), заметим, что в кольце $A'/\mathfrak{m}A'$ идеалы $\mathfrak{m}'_j/\mathfrak{m}A'$ являются единственными максимальными идеалами и что $\mathfrak{q}'_j/\mathfrak{m}A'$ представляет собой насыщение идеала (0) относительно $\mathfrak{m}'_j/\mathfrak{m}A'$ (гл. II, § 2, n° 4). Следовательно, можно ограничиться случаем $\mathfrak{m}A' = (0)$; тогда утверждение (ii) вытекает из следствия 2 теоремы 1 гл. II, § 3, n° 3.

Замечание 1. Если кольцо A' нётерово, то из утверждений (i) и (ii) следует, что набор $(\mathfrak{q}'_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ является единственным примарным разложением идеала $\mathfrak{m}A'$ (гл. IV, § 2, n° 3).

Теорема 1. *Пусть h: $A \to A'$ — такой инъективный гомоморфизм колец, что A' является целым над A, и $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A. Тогда существует простой идеал $\mathfrak{p}'$ в A', лежащий над $\mathfrak{p}$.*

Предположим сначала, что A является локальным кольцом, а $\mathfrak{p}$ — максимальным идеалом в нем. Тогда для любого максимального идеала $\mathfrak{m}'$ кольца A' идеал $h^{-1}(\mathfrak{m}')$ является максимальным в A (предложение 1), а потому он равен $\mathfrak{p}$. Тем самым теорема доказана в частном случае (так как A' содержит A по предположению и, следовательно, не равно нулю). В общем случае положим $S = A - \mathfrak{p}$; тогда $S^{-1}A$ представляет собой

локальное кольцо с максимальным идеалом $S^{-1}\mathfrak{p}$ (гл. II, § 2, n° 5, предложение 11), гомоморфизм $S^{-1}h$: $S^{-1}A \to S^{-1}A'$ инъективен (гл. II, § 2, n° 4, теорема 1), а кольцо $S^{-1}A'$ — целое над $S^{-1}A$ (§ 1, n° 5, предложение 16). Следовательно, существует простой идеал $\mathfrak{q}'$ в $S^{-1}A$, лежащий над $S^{-1}\mathfrak{p}$, и мы уже знаем, что $\mathfrak{q}' = S^{-1}\mathfrak{p}'$, где $\mathfrak{p}'$ — простой идеал в A', лежащий над $\mathfrak{p}$ (лемма 1).

Если гомоморфизм h: $A \to A'$ не инъективен, то теорема 1 не обязательно имеет место, как это показывает пример гомоморфизма $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ $(n > 1)$. Можно, однако, применить теорему 1 к каноническому вложению $h(A) \to A'$; другими словами, утверждение теоремы 1 остается справедливым для простых идеалов $\mathfrak{p}$, *содержащих* $\operatorname{Ker}(h)$.

Следствие 1. *В предположениях и обозначениях теоремы* 1 *имеет место равенство* $h^{-1}(\mathfrak{p}A') = \mathfrak{p}$.

Действительно, $\mathfrak{p}A' \subset \mathfrak{p}'$ и $h^{-1}(\mathfrak{p}') = \mathfrak{p}$.

Следствие 2. *Пусть* h: $A \to A'$ — *такой гомоморфизм колец, что* A' *является целым над* A, $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{p}$ — *два идеала кольца* A, *для которых* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}'$ — *идеал в* A', *лежащий над* $\mathfrak{a}$. *Предположим, что* $\mathfrak{p}$ — *простой идеал. Тогда существует простой идеал* $\mathfrak{p}'$, *лежащий над* $\mathfrak{p}$ *и содержащий* $\mathfrak{a}'$

Если h_1: $A/\mathfrak{a} \to A'/\mathfrak{a}'$ — гомоморфизм, определяемый гомоморфизмом u при переходе к факторкольцам, то h_1 инъективен по предположению и кольцо $A'/\mathfrak{a}'$ цело над $A/\mathfrak{a}$ (§ 1, n°1, предложение 2); следовательно, существует простой идеал $\mathfrak{p}'/\mathfrak{a}'$ кольца $A'/\mathfrak{a}'$ ($\mathfrak{p}'$ — простой идеал в A'), лежащий над $\mathfrak{p}/\mathfrak{a}$ (теорема 1), и идеал $\mathfrak{p}'$ удовлетворяет сформулированным выше требованиям.

Следствие 3. *Пусть* A — *кольцо и* A' — *кольцо, содержащее* A *и целое над* A. *Если* $\mathfrak{R}'$ — *радикал кольца* A', *то* $\mathfrak{R}' \cap A$ *является радикалом кольца* A.

Пусть $\mathfrak{R}$ — радикал кольца A. Для любого максимального идеала $\mathfrak{m}'$ кольца A' пересечение $\mathfrak{m}' \cap A$ представляет собой максимальный идеал в A (предложение 1), так что $\mathfrak{R} \in \mathfrak{m}' \cap A$ и, следовательно, $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}' \cap A$ (*Алгебра*, гл. VIII, § 5, n° 3, определение 3). Обратно, пусть $x \subset \mathfrak{R}' \cap A$; для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A существует простой идеал в A', лежащий над $\mathfrak{m}$ (теорема 1), и этот идеал $\mathfrak{m}'$ обязательно максимален (предложение 1), следовательно, $x \in \mathfrak{m}' \cap A = \mathfrak{m}$ и $x \in \mathfrak{R}$.

Следствие 4. *Пусть* A — кольцо, A' — *кольцо, содержащее* A *и целое над* A, *и* f — *гомоморфизм кольца* A *в некоторое алгебраически замкнутое поле* L. *Тогда* f *продолжается до гомоморфизма кольца* A' *в* L.

Действительно, пусть $\mathfrak{p}$ — ядро гомоморфизма f, которое является простым идеалом, так как кольцо $f(A) \subset L$ целостное. Пусть $\mathfrak{p}'$ — простой идеал в A', лежащий над $\mathfrak{p}$ (теорема 1). Тогда кольцо $A/\mathfrak{p}$ канонически отождествляется с подкольцом кольца $A'/\mathfrak{p}'$, и кольцо $A'/\mathfrak{p}'$ является целым над $A/\mathfrak{p}$ (§ 1, n °1, предложение 2). Гомоморфизм f при переходе к факторкольцам определяет изоморфизм кольца $A/\mathfrak{p}$ на подкольцо $f(A)$ поля L, который продолжается до изоморфизма g поля частных K кольца $A/\mathfrak{p}$ на подполе поля L. Поскольку поле частных K' кольца $A'/\mathfrak{p}'$ алгебраично над K, гомоморфизм g продолжается до некоторого изоморфизма g' поля K' на подполе поля L (*Алгебра*, гл. V, § 4, n° 2, следствие теоремы 1); если π': $A' \to A'/\mathfrak{p}'$ — канонический гомоморфизм, то композиция $g' \circ \pi'$ представляет собой гомоморфизм кольца A в поле L, который продолжает f.

Замечание 2. Пусть h: $A \to A'$ — такой гомоморфизм колец, что A' является целым над A; тогда ассоциированное непрерывное отображение ${}^a h$: $\mathrm{Spec}(A') \to \mathrm{Spec}(A)$ *замкнуто*. В самом деле, для любого идеала $\mathfrak{a}'$ кольца A' кольцо $A'/\mathfrak{a}'$ цело над A'; следовательно, оно цело и над A (§ 1, n ° 1, предложение 6) и пространство $\mathrm{Spec}(A'/\mathfrak{a}')$ отождествляется с замкнутым подпространством $V(\mathfrak{a}')$ пространства $\mathrm{Spec}(A')$. Поэтому, для того чтобы показать, что отображение h замкнуто, достаточно (если заменить A' на $A'/\mathfrak{a}'$) доказать, что образ пространства $\mathrm{Spec}(A')$ при ${}^a h$ представляет собой *замкнутое* подмножество пространства $\mathrm{Spec}(A)$; однако из теоремы 1 вытекает, что этот образ есть не что иное, как множество простых идеалов кольца A, содержащих идеал $\mathrm{Ker}(h)$, а это множество замкнуто по определению топологии на $\mathrm{Spec}(A)$.

Предложение 2. *Пусть h: $A \to A'$ — такой гомоморфизм колец, что A' цело над A, $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца A, $S = A - \mathfrak{p}$, $(\mathfrak{p}'_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство всех простых идеалов кольца A', лежащих над $\mathfrak{p}$, и $S' = \bigcap_{\iota \in I} (A' - \mathfrak{p}'_\iota)$. Тогда $S^{-1}A' = S'^{-1}A'$.*

Действительно, по определению $h(S) \subset S'$ и, так как

$$h(S)^{-1}A' = S^{-1}A',$$

то достаточно доказать, согласно предложению 8 гл. II, § 2, n° 3, что если некоторый простой идеал $\mathfrak{q}'$ кольца A' не пересекает $h(S)$, то он не пересекает и S'. Предположим, что $\mathfrak{q}' \cap h(S) = \varnothing$, и пусть $\mathfrak{q} = h^{-1}(\mathfrak{q}')$. Следовательно, $\mathfrak{q} \cap S = \varnothing$; иначе говоря, $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$. Поскольку идеал $\mathfrak{q}'$ лежит, по определению, над $\mathfrak{q}$, из следствия 2 теоремы 1 вытекает, что существует такой индекс ι, что $\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{p}'_\iota$, так что $\mathfrak{p}' \cap S' = \varnothing$, и доказательство закончено.

Предложение 3. *Пусть h: $A \to A'$ — такой гомоморфизм колец, что A' является A-модулем конечного типа. Тогда для*

любого простого идеала $\mathfrak{p}$ *кольца* A *множество простых идеалов кольца* A', *лежащих над* $\mathfrak{p}$, *конечно.*

Пусть $S = A - \mathfrak{p}$; в силу леммы 1, можно заменить A на $S^{-1}A$, A' — на $S^{-1}A'$ (последнее кольцо является $(S^{-1}A)$-модулем конечного типа) и $\mathfrak{p}$ заменить на $S^{-1}\mathfrak{p}$. Иначе говоря, можно предположить, что A — *локальное* кольцо и $\mathfrak{p}$ — его максимальный идеал. Далее (в соответствии с замечанием, сделанным в начале этого n°), можно заменить A на $A/\mathfrak{p}$, A' — на $A'/\mathfrak{p}A'$ и $\mathfrak{p}$ — на (0), так как $A'/\mathfrak{p}A' = (A/\mathfrak{p}) \otimes_A A'$ является $(A/\mathfrak{p})$-модулем конечного типа. Все свелось, таким образом, к тому, чтобы доказать данное предложение, когда A — *поле* и $\mathfrak{p} = (0)$; тогда A' будет A-алгеброй конечного ранга и, следовательно, *артиновой*, а мы знаем, что в такой алгебре существует только *конечное* число простых идеалов (гл. IV, § 2, n ° 5, предложение 9).

2. *Группа разложения и группа инерции*

Определение 2. *Пусть* A' — *некоторое кольцо и* $\mathfrak{G}$ — *группа, действующая на* A' (§ 1, n° 9). *Если задан простой идеал* $\mathfrak{p}'$ *кольца* A', *то подгруппа таких элементов* $\sigma \in \mathfrak{G}$, *что* $\sigma \cdot \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'$, *называется группой разложения идеала* $\mathfrak{p}'$ (*относительно группы* $\mathfrak{G}$) *и обозначается через* $\mathfrak{G}^Z(\mathfrak{p}')$. *Кольцо элементов из* A', *инвариантных относительно* $\mathfrak{G}^Z(\mathfrak{p}')$, *называется кольцом разложения идеала* $\mathfrak{p}'$ (*относительно группы* $\mathfrak{G}$) *и обозначается через* $A^Z(\mathfrak{p}')$ [1].

Часто пишут $\mathfrak{G}^Z$ и A^Z вместо $\mathfrak{G}^Z(\mathfrak{p}')$ и $A^Z(\mathfrak{p}')$ соответственно, если не может возникнуть путаницы.

Для любого элемента $\tau \in \mathfrak{G}^Z(\mathfrak{p}')$ мы будем по-прежнему обозначать через $z \to \sigma \cdot z$ эндоморфизм кольца $A'/\mathfrak{p}'$, полученный из эндоморфизма $x \to \sigma \cdot x$ кольца A' при переходе к факторкольцу; ясно, что группа $\mathfrak{G}^Z(\mathfrak{p}')$ действует также на кольце $A'/\mathfrak{p}'$.

Определение 3. *В обозначениях определения* 2 *подгруппа группы* $\mathfrak{G}^Z(\mathfrak{p}')$, *образованная такими* σ, *для которых эндоморфизм* $z \to \sigma \cdot z$ *кольца* $A'/\mathfrak{p}'$ *тождествен, называется группой инерции идеала* $\mathfrak{p}'$ (*относительно группы* $\mathfrak{G}$) *и обозначается через* $\mathfrak{G}^T(\mathfrak{p}')$ (*или* $\mathfrak{G}^T$). *Кольцо элементов из* A', *инвариантных относительно* $\mathfrak{G}^T(\mathfrak{p}')$, *называется кольцом инерции идеала* $\mathfrak{p}'$ (*относительно группы* $\mathfrak{G}$) *и обозначается через* $A^T(\mathfrak{p}')$ (*или* A^T). [2]

[1]) Буква Z является первой в немецком слове Zerlegung, обозначающем „разложение".

[2]) Буква T является первой в немецком слове Trägheit, обозначающем „инерция".

Если A — подкольцо кольца A', образованное инвариантными относительно группы $\mathcal{G}$ элементами, то ясно, что

$$A \subset A^Z(\mathfrak{p}') \subset A^T(\mathfrak{p}') \subset A'. \tag{1}$$

Из определений 2 и 3 следует, что для всякого $\rho \in \mathcal{G}$

$$\mathcal{G}^Z(\rho \cdot \mathfrak{p}') = \rho \mathcal{G}^Z(\mathfrak{p}') \rho^{-1};\ \mathcal{G}^T(\rho \cdot \mathfrak{p}') = \rho \mathcal{G}^T(\mathfrak{p}') \rho^{-1}. \tag{2}$$

Если для любого $\sigma \in \mathcal{G}^Z(\mathfrak{p}')$ через $\bar{\sigma}$ обозначить автоморфизм $z \to \sigma \cdot z$ кольца $A'/\mathfrak{p}'$, то отображение $\sigma \to \bar{\sigma}$ является гомоморфизмом (который называется *каноническим*) группы разложения $\mathcal{G}^Z$ в группу Γ_0 автоморфизмов кольца $A'/\mathfrak{p}'$, оставляющих неподвижными элементы кольца $A^Z/(\mathfrak{p}' \cap A^Z)$ (которое канонически отождествляется с подкольцом в $A'/\mathfrak{p}'$). По определению группа $\mathcal{G}^T(\mathfrak{p}')$ представляет собой ядро этого канонического гомоморфизма; следовательно, $\mathcal{G}^T$ является *нормальной подгруппой* в $\mathcal{G}^Z$. Если k' — поле частных кольца $A'/\mathfrak{p}'$, то любой автоморфизм кольца $A'/\mathfrak{p}'$ продолжается единственным образом до автоморфизма поля k', так что отображение $\sigma \to \bar{\sigma}$ можно рассматривать и как гомоморфизм группы $\mathcal{G}^Z(\mathfrak{p}')$ в группу автоморфизмов поля k'. Заметим, наконец, что, так как $\mathcal{G}^T$ является нормальным делителем в $\mathcal{G}^Z$, кольцо A^T является устойчивым относительно $\mathcal{G}^Z$.

Лемма 3. *Пусть A' — кольцо, $\mathcal{G}$ — группа, действующая на A', A — кольцо инвариантов группы $\mathcal{G}$, $\mathfrak{p}'$ — некоторый простой идеал в A' и S — мультипликативная система в A, не пересекающая $\mathfrak{p}'$. Тогда $\mathcal{G}^Z(S^{-1}\mathfrak{p}') = \mathcal{G}^Z(\mathfrak{p}')$, $\mathcal{G}^T(S^{-1}\mathfrak{p}') = \mathcal{G}^T(\mathfrak{p}')$ и, если группа $\mathcal{G}$ локально конечна, $S^{-1}A^Z(\mathfrak{p}') = A^Z(S^{-1}\mathfrak{p}')$, $S^{-1}A^T(\mathfrak{p}') = A^T(S^{-1}\mathfrak{p}')$.*

Поскольку элементы множества S инвариантны относительно $\mathcal{G}$, то очевидно, что если $\sigma \cdot \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'$, то $\sigma \cdot (S^{-1}\mathfrak{p}') = S^{-1}\mathfrak{p}'$. Обратно, предположим, что элемент $\sigma \in \mathcal{G}$ таков, что $\sigma \cdot (S^{-1}\mathfrak{p}') = S^{-1}\mathfrak{p}'$; тогда, если $x \in \mathfrak{p}'$, то $(\sigma \cdot x)/1 \in S^{-1}\mathfrak{p}'$ и, следовательно, существует такой элемент $s \in S$, что $s(\sigma \cdot x) \in \mathfrak{p}'$, откуда $\sigma \cdot x \in \mathfrak{p}'$, так как идеал $\mathfrak{p}'$ прост и $s \notin \mathfrak{p}'$. Тем самым доказано, что $\sigma \cdot \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}'$, и аналогично показывается, что $\sigma^{-1} \cdot \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}'$, и потому $\sigma \cdot \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'$ и $\sigma \in \mathcal{G}^Z(\mathfrak{p}')$. Если $\sigma \in \mathcal{G}^T(\mathfrak{p})$, то $\sigma \cdot x - x \in \mathfrak{p}'$ для любого $x \in A'$ и, следовательно, для любого $s \in S$ имеет место равенство $\sigma \cdot (x/s) - (x/s) = (\sigma \cdot x - x)/s \in S^{-1}\mathfrak{p}'$; таким образом, $\sigma \in \mathcal{G}^T(S^{-1}\mathfrak{p}')$. Обратно, предположим, что $\sigma \in \mathcal{G}^T(S^{-1}\mathfrak{p}')$; тогда

для любого $x \in A'$ оказывается справедливым включение $\sigma \cdot (x/1) - (x/1) \in S^{-1}\mathfrak{p}'$ и, следовательно, существует такой элемент $s \in S$, что $s(\sigma \cdot x - x) \in \mathfrak{p}'$, откуда, подобно тому, как это делалось выше, мы получаем, что $\sigma \cdot x - x \in \mathfrak{p}'$; этим доказано, что $\sigma \in \mathscr{G}^T(\mathfrak{p}')$. Последние утверждения вытекают из предложения 23 § 1, n° 9.

Теорема 2. *Пусть A' — кольцо, $\mathscr{G}$ — конечная группа, действующая на A', и A — кольцо инвариантов группы $\mathscr{G}$; в этом случае A' цело над A* (§ 1, n° 9, предложение 22).

(i) *Если заданы два простых идеала $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$ кольца A', лежащих над одним и тем же простым идеалом $\mathfrak{p}$ кольца A, то существует такой элемент $\sigma \in \mathscr{G}$, что $\mathfrak{q}' = \sigma \cdot \mathfrak{p}'$; другими словами, группа $\mathscr{G}$ действует транзитивно на множестве простых идеалов кольца A', лежащих над данным простым идеалом $\mathfrak{p}$.*

(ii) *Пусть $\mathfrak{p}'$ — простой идеал кольца A', $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A$, k* (соответственно k') *— поле частных кольца $A/\mathfrak{p}$* (соответственно $A'/\mathfrak{p}'$). *Тогда k' представляет собой расширение типа Галуа*[1]) *поля k и канонический гомоморфизм $\sigma \to \bar{\sigma}$ группы разложения $\mathscr{G}^Z(\mathfrak{p}')$ в группу Γ k-автоморфизмов поля k' определяет при переходе к факторгруппам изоморфизм группы $\mathscr{G}^Z(\mathfrak{p}')/\mathscr{G}^T(\mathfrak{p}')$ на группу Γ.*

(i) Если $x \in \mathfrak{q}'$, то $\prod_{\sigma \in \mathscr{G}} \sigma \cdot x \in \mathfrak{q}' \cap A = \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$; следовательно, существует такой элемент $\tau \in \mathscr{G}$, что $\sigma \cdot x \in \mathfrak{p}'$, т. е. $x \in \sigma^{-1} \cdot \mathfrak{p}'$. Отсюда мы заключаем, что $\mathfrak{q}' \subset \bigcup_{\sigma \in \mathscr{G}} \sigma \cdot \mathfrak{p}'$ и, следовательно (так как группа $\mathscr{G}$ конечна и идеалы $\sigma \cdot \mathfrak{p}'$ просты), существует такой элемент $\sigma \in \mathscr{G}$, что $\mathfrak{q}' \subset \sigma \cdot \mathfrak{p}'$ (гл. II, § 1, n° 1, предложение 2); поскольку идеалы $\mathfrak{q}'$ и $\sigma \cdot \mathfrak{p}'$ оба лежат над $\mathfrak{p}$, имеет место равенство $\mathfrak{q}' = \sigma \cdot \mathfrak{p}'$ (n° 1, следствие 1 предложения 1).

(ii) Чтобы убедиться в том, что k' является расширением типа Галуа поля k, достаточно доказать, что любой элемент $\bar{x} \in A'/\mathfrak{p}'$ является корнем некоторого многочлена P кольца $k[X]$, все корни которого лежат в $A'/\mathfrak{p}'$ (*Алгебра*, гл. V, § 6, n° 3, следствие 3 предложения 9). Пусть $x \in A$ — какой-нибудь представитель класса $\bar{x}$; тогда все коэффициенты многочлена $Q(X) = \prod_{\sigma \in \mathscr{G}} (X - \sigma \cdot x)$ лежат в A. Пусть $P(X)$ — многочлен в $(A/\mathfrak{p})[X]$, коэффициентами которого служат образы коэффициентов мно-

[1]) Мы будем в дальнейшем употреблять термин „расширение типа Галуа“ как синоним термина „нормальное расширение“, введенного в *Алгебре*, гл. V, § 6, n° 3, определение 2, чтобы избежать возможной путаницы в связи с употреблением термина „нормальный“ в других смыслах.

гочлена Q при каноническом гомоморфизме $\pi\colon A \to A/\mathfrak{p}$. Поскольку π можно рассматривать как ограничение канонического гомоморфизма $\pi'\colon A' \to A'/\mathfrak{p}'$ на кольцо A, мы видим, что в кольце $(A'/\mathfrak{p}')[X]$ многочлен P является произведением линейных множителей $X - \pi'(\sigma \cdot x)$ и, следовательно, удовлетворяет сформулированным условиям, так как $\bar{x} = \pi'(x)$.

Очевидно, что для любого $\sigma \in \mathscr{G}^Z$ отображение $\bar{\sigma}$ представляет собой k-автоморфизм поля k'. Остается показать, что отображение $\sigma \to \bar{\sigma}$ переводит группу $\mathscr{G}^Z$ на группу *всех* k-автоморфизмов расширения k'. Положим $S = A - \mathfrak{p}$; мы не изменим k и k', если заменим A' и $\mathfrak{p}'$ на $S^{-1}A'$ и $S^{-1}\mathfrak{p}'$ соответственно, — это верно в силу предложения 23 § 1, n° 9, и соотношения $S^{-1}\mathfrak{p}' \cap S^{-1}A = S^{-1}(A \cap \mathfrak{p}') = S^{-1}\mathfrak{p}$ (гл. II, § 2, n° 4). Из леммы 3 следует, что при этом не изменится ни группа $\mathscr{G}^Z$, ни способ, которым она действует на k'; следовательно, можно ограничиться случаем, когда $\mathfrak{p}$ — *максимальный* идеал. Но в этом случае известно, что идеал $\mathfrak{p}'$ также будет максимальным (n° 1, предложение 1), и любой элемент расширения k' является, следовательно, элементом вида $\pi'(x)$ при некотором $x \in A'$. Выше мы уже показывали, что такой элемент является корнем многочлена в кольце $k[X]$ степени $\leqslant \mathrm{Card}(\mathscr{G})$. Поскольку всякое сепарабельное расширение конечной степени поля k обладает примитивным элементом (*Алгебра*, гл. V, § 7, n° 7, предложение 12, и § 11, n° 4, предложение 4), мы видим, что всякое сепарабельное расширение конечной степени поля k, содержащееся в k', имеет степень $\leqslant \mathrm{Card}(\mathscr{G})$, откуда вытекает следующее: *наибольшее* сепарабельное расширение k'_s поля k, содержащееся в k' (*Алгебра*, гл. V, § 7, n° 6, предложение 11), имеет степень $\leqslant \mathrm{Card}(\mathscr{G})$ (*Алгебра*, гл. V, § 3, n° 2, замечание 2). Пусть $y \in A'$ — такой элемент, что $\pi'(y)$ является примитивным элементом расширения k'_s. По определению идеалы $\sigma \cdot \mathfrak{p}'$ для $\sigma \in \mathscr{G} - \mathscr{G}^Z$ являются максимальными и отличными от $\mathfrak{p}'$; следовательно, существует такой элемент $x \in A'$, что $x \equiv y \pmod{\mathfrak{p}'}$ и $x \in \sigma^{-1}\mathfrak{p}'$ для $\sigma \in \mathscr{G} - \mathscr{G}^Z$ (гл. II, § 1, n° 2, предложение 5). Пусть теперь u — некоторый k-автоморфизм поля k', и пусть

$$P(X) = \prod_{\sigma \in \mathscr{G}} (X - \pi'(\sigma \cdot x)).$$

Поскольку $\pi'(x)$ является корнем многочлена P и $P \in k[X]$, элемент $u(\pi'(x))$ также является корнем многочлена P в поле k'. Значит, существует такой $\tau \in \mathscr{G}$, что

$$u(\pi'(x)) = \pi'(\tau \cdot x);$$

но $u(\pi'(x)) \neq 0$ и для $\sigma \in \mathcal{G} - \mathcal{G}^z$ имеет место включение $\sigma \cdot x \in \mathfrak{p}'$, а потому $\pi'(\sigma \cdot x) = 0$. Отсюда мы заключаем, что обязательно должно иметь место включение $\tau \in \mathcal{G}^z$. Но так как u и $\bar{\tau}$ имеют одно и то же значение на примитивном элементе $\pi'(y) = \pi'(x)$ расширения k', эти значения совпадают в k'_s; поскольку k' — радикальное[1]) расширение поля k'_s, они совпадают и в k'.

Следствие. *Сохраняя условия и обозначения теоремы* 2, *предположим, что* f_1, f_2 — *два гомоморфизма кольца* A' *в некоторое поле* L, *имеющие одинаковые ограничения на* A. *Тогда существует такой элемент* $\sigma \in \mathcal{G}$, *что*

$$f_2(x) = f_1(\sigma \cdot x)$$

для всякого $x \in A'$.

Пусть $\mathfrak{p}'_i$ — ядро гомоморфизма f_i $(i = 1, 2)$, являющееся простым идеалом кольца A'. По предположению $\mathfrak{p}'_1 \cap A = \mathfrak{p}'_2 \cap A$ и это пересечение представляет собой простой идеал $\mathfrak{p}$ кольца A. Следовательно, существует такой элемент $\tau \in \mathcal{G}$, что $\tau \cdot \mathfrak{p}'_2 = \mathfrak{p}'_1$ (теорема 2 (i)); заменяя f_1 на гомоморфизм $x \to f_1(\tau \cdot x)$, мы можем, следовательно, предположить, что $\mathfrak{p}'_2 = \mathfrak{p}'_1$ (этот идеал мы будем обозначать через $\mathfrak{p}'$). Переходя к факторкольцам, мы получаем из f_1 и f_2 два инъективных гомоморфизма f'_1, f'_2 кольца $A'/\mathfrak{p}'$ в поле L, которые продолжаются, следовательно, до двух инъективных гомоморфизмов f''_1, f''_2 поля частных k' кольца $A'/\mathfrak{p}'$ в поле L. Поскольку k' представляет собой расширение типа Галуа поля k, этим же свойством обладают и расширения $k''_1 = f''_1(k')$, $k''_2 = f''_2(k')$ (k отождествляется с подполем в L). Ввиду того что существует k-изоморфизм расширения k''_1 на k''_2, получаем, что $k''_1 = k''_2$ (*Алгебра*, гл. V, § 6, предложение 6). Таким образом, $f''^{-1}_1 \circ f''_2$ есть k-автоморфизм поля k'; в силу теоремы 2 (ii), этот автоморфизм имеет вид $\bar{\sigma}$, где $\sigma \in \mathcal{G}^z(\mathfrak{p}')$. В частности, для любого $x \in A$ элементы $f_2(x)$ и $f_1(\sigma \cdot x)$ равны.

Замечания. 1) Отметим, что при выполнении предположений теоремы 2 может случиться, что расширение k' будет иметь *бесконечную* степень над k, когда k' не является сепарабельным над k (упражнение 9).

2) Ясно, что k' есть *расширение Галуа* поля k, когда поле k *совершенно*. В этом случае указанное расширенне имеет конечную степень над k.

Предложение 4. *Пусть* A' — *кольцо*, $\mathcal{G}$ — *конечная группа, действующая на* A', $\mathcal{H}$ — *подгруппа в* $\mathcal{G}$, A *и* B — *кольца ин-*

[1]) Иногда такое расширение называют также *чисто несепарабельным*.— *Прим. ред.*

вариантов относительно $\mathscr{G}$ *и* $\mathscr{H}$ *соответственно,* $\mathfrak{p}'$ *— некоторый простой идеал кольца* A'; *положим* $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}(B) = B \cap \mathfrak{p}'$.

(i) *Для того чтобы подгруппа* $\mathscr{H}$ *содержалась в группе разложения* $\mathscr{G}^Z(\mathfrak{p}')$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathfrak{p}'$ *был единственным простым идеалом в* A', *лежащим над* $\mathfrak{p}(B)$.

(ii) *Если подгруппа* $\mathscr{H}$ *содержит* $\mathscr{G}^Z(\mathfrak{p}')$, *то выполнены следующие условия:*

а) *кольца* $A/\mathfrak{p}$ *и* $B/\mathfrak{p}B$ *имеют общее поле частных;*

б) *максимальный идеал локального кольца* $B_{\mathfrak{p}(B)}$ *равен* $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}(B)}$.

(iii) *Предположим дополнительно, что кольцо* A' *целостное и что выполняется соотношение* $\bigcap_{n\geqslant 0} \mathfrak{p}^n A'_{\mathfrak{p}'} = 0$. *Тогда условия* а) *и* б) *пункта* (ii) *влекут за собой следующее:* $\mathscr{G}^Z(\mathfrak{p}')$ *оставляет неподвижными элементы кольца* B.

(i) Из теоремы 2 (i) следует, что простые идеалы кольца A', лежащие над $\mathfrak{p}(B)$, имеют вид $\sigma \cdot \mathfrak{p}'$, где $\sigma \in \mathscr{H}$; отсюда сразу же вытекает утверждение (i).

(ii) Положим $S = A - \mathfrak{p}$; известно, что кольца инвариантов групп $\mathscr{G}$ и $\mathscr{H}$ в кольце $S^{-1}A'$ совпадают соответственно с $S^{-1}A$ и $S^{-1}B$ (§ 1, n° 9, предложение 23) и $\mathscr{G}^Z(S^{-1}\mathfrak{p}') = \mathscr{G}^Z(\mathfrak{p}')$ (лемма 3); наконец, $S^{-1}\mathfrak{p}(B) = S^{-1}\mathfrak{p}' \cap S^{-1}B$ (гл. II, § 2, n° 4), а локальное кольцо, соответствующее простому идеалу $S^{-1}\mathfrak{p}(B)$ кольца $S^{-1}B$, канонически изоморфно полю частных кольца $B/\mathfrak{p}(B)$ (гл. II, § 2, n° 5, предложение 11). Таким образом, для доказательства утверждения (ii) можно ограничиться случаем *максимального* идеала $\mathfrak{p}$. Чтобы установить а), достаточно будет доказать, что

$$B = A + \mathfrak{p}(B), \tag{3}$$

так как это означает, что поля $A/\mathfrak{p}$ и $B/\mathfrak{p}(B)$ *канонически изоморфны*. В силу теоремы 2, существует только конечное число простых идеалов кольца A', лежащих над $\mathfrak{p}$, а в силу теоремы 1 n° 1, существует по крайней мере один простой идеал кольца A', лежащий над любым простым идеалом в B. Из этого следует, что имеется лишь *конечное* число простых идеалов кольца B, лежащих над $\mathfrak{p}$; обозначим через $\mathfrak{n}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ те из только что полученных идеалов, которые отличны от $\mathfrak{p}(B)$. Пусть x — произвольный элемент из B; так как идеалы $\mathfrak{p}(B)$ и $\mathfrak{n}_j$ максимальны (n° 1, предложение 1), существует $y \in B$, такой, что $y \equiv x \pmod{\mathfrak{p}(B)}$ и $y \in \mathfrak{n}_j$ для $1 \leqslant j \leqslant r$ (гл. II, § 1, n° 2, предложение 5). Пусть $y_1 = y$, y_2, ..., y_q — различные эле-

менты орбиты элемента y относительно группы $\mathscr{G}$; ясно, что

$$z = y_1 + y_2 + \ldots + y_q \in A,$$

и чтобы установить справедливость утверждения (3), достаточно показать, что $y_i \in \mathfrak{p}'$ для $i \geqslant 2$, так как тогда отсюда будет следовать, что $z - y \in \mathfrak{p}' \cap B = \mathfrak{p}(B)$, а потому $x \in A + \mathfrak{p}(B)$, поскольку $x \in y \pmod{\mathfrak{p}(B)}$. Пусть, следовательно, $i \geqslant 2$, и пусть $\sigma \in \mathscr{G}$ — такой элемент, что $\sigma \cdot y = y_i$. Покажем, что $\sigma^{-1}\mathfrak{p}'$ не лежит над $\mathfrak{p}(B)$. Действительно, если бы это было не так, то существовал бы такой элемент $\tau \in \mathscr{H}$, что $\sigma^{-1} \cdot \mathfrak{p}' = \tau \cdot \mathfrak{p}'$ (теорема 2 (i)), откуда $(\tau^{-1}\sigma^{-1}) \cdot \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'$; иначе говоря, мы получили бы, что $\tau^{-1}\sigma^{-1} \in \mathscr{G}^Z \subset \mathscr{H}$ по предположению, откуда $\sigma \in \mathscr{H}$. Но так как $y \in B$ и $\sigma \cdot y \neq y$, то мы пришли к противоречию. Отсюда мы заключаем, что $\sigma^{-1} \cdot \mathfrak{p}'$ лежит над одним из идеалов $\mathfrak{n}_j$, и, так как $y \in \mathfrak{n}_j$ по построению, мы получаем, что $y \in \sigma^{-1} \cdot \mathfrak{p}'$ или $y_i = \sigma \cdot y \in \mathfrak{p}'$.

Чтобы доказать утверждение б), достаточно будет установить, что $\mathfrak{p}(B)$ содержится в *насыщении* $\mathfrak{q}$ идеала $\mathfrak{p}B$ относительно $\mathfrak{p}(B)$ (гл. II, § 2, n° 4, предложение 10). Поскольку $\mathfrak{p}(B)$ не содержится ни в одном из идеалов $\mathfrak{n}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$, достаточно будет показать, что

$$\mathfrak{p}(B) \subset \mathfrak{q} \cup \mathfrak{n}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{n}_r \tag{4}$$

в силу предложения 2 гл. II, § 1, n° 1. Для этого рассмотрим элемент $u \in \mathfrak{p}(B)$, не принадлежащий ни одному из идеалов $\mathfrak{n}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ (гл. II, § 1, n° 1, предложение 2). Пусть $u_1 = u$, $u_2, \ldots, u_m$ — различные элементы орбиты элемента u относительно группы $\mathscr{G}$; положим $w = u_1 u_2 \ldots u_m$, $v = u_2 \ldots u_m$. Ясно, что $w \in A$; с другой стороны, если $\tau \in \mathscr{H}$, то $\tau \cdot u = u$, так что обязательно $\tau \cdot u_i \neq u$ для $i \geqslant 2$; это показывает, что $\tau \cdot v = v$ и, следовательно, $v \in B$. Так же как и в доказательстве пункта а), устанавливается, что если $\sigma \in \mathscr{G}$ — такой элемент, что $\sigma \cdot u = u_i$ при $i \geqslant 2$, то $\sigma^{-1}\mathfrak{p}'$ лежит над одним из идеалов $\mathfrak{n}_j$ и, так как $u \notin \mathfrak{n}_j$, $u \notin \sigma^{-1}\mathfrak{p}'$; другими словами, $u_i \notin \mathfrak{p}'$. Мы заключаем отсюда, что $v \notin \mathfrak{p}'$ и, следовательно, $v \notin \mathfrak{p}(B)$. Кроме того, совершенно ясно, что $w \in \mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}$ и равенство $w = uv$ показывает, что элемент u находится в насыщении идеала $\mathfrak{p}B$ относительно $\mathfrak{p}(B)$; следовательно, установлено (4).

(iii) Предположим, что кольцо A' целостное, что $\bigcap_{n \geqslant 0} \mathfrak{p}^n A'_{\mathfrak{p}'} = 0$ и что выполнены условия а) и б) пункта (ii). Воспользуемся теми же обозначениями, которые применялись в (ii); ясно, что кольцо $S^{-1}A'$ целостное и $S^{-1}A'_{\mathfrak{p}'} = A$; следовательно, можно заменить A' и $\mathfrak{p}'$ на $S^{-1}A'$ и $S^{-1}\mathfrak{p}'$; иначе говоря, можно пред-

положить, что идеал $\mathfrak{p}$ *максимален*. Тогда из предположений а) и б) вытекает, что

$$B_{\mathfrak{p}(B)} = A + \mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}(B)}. \tag{5}$$

Индукцией по n получается, что $B_{\mathfrak{p}(B)} = A + \mathfrak{p}^n B_{\mathfrak{p}(B)}$ для любого $n > 0$. Пусть σ — произвольный элемент из $\mathscr{G}^Z$ и x — любой элемент из B. Для любого $n > 0$ существует такой элемент $a_n \in A$, что $x - a_n \in \mathfrak{p}^n B_{\mathfrak{p}(B)} \subset \mathfrak{p}^n A'_{\mathfrak{p}'}$; поскольку $\sigma \cdot a_n = a_n$ и $\sigma \cdot \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'$, мы получаем отсюда, что $\sigma \cdot x - x \in \mathfrak{p}^n A'_{\mathfrak{p}'}$. Ввиду того что это соотношение выполняется для каждого n, из условия следует, что $\sigma \cdot x = x$.

Замечания. 3) Если кольцо A' целостное и нётерово, то условие $\bigcap_{n \geqslant 1} \mathfrak{p}^n A'_{\mathfrak{p}'} = 0$ выполнено всегда (гл. III, § 3, n° 2, следствие предложения 5). Можно показать, что это условие выполняется также и в том случае, когда A' целостное и A нётерово.

4) Если $\mathfrak{p}$ не является максимальным идеалом в A, соотношение (3) не обязательно выполняется при предположениях пункта (ii) и, следовательно, $A/\mathfrak{p}$ и $B/\mathfrak{p}(B)$ не обязательно изоморфны, даже когда $\mathscr{H} = \mathscr{G}^Z$ и, следовательно, $B = A^Z$ (упражнение 10).

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда кольца* $A/\mathfrak{p}$ *и* $A^Z/(\mathfrak{p}' \cap A^Z)$ *имеют одно и то же поле частных и максимальный идеал локального кольца* $(A^Z)_{\mathfrak{p}' \cap A^Z}$ *порождается идеалом* $\mathfrak{p}$.

Следствие 2. *Пусть* A *— целостное кольцо,* $\mathscr{G}$ *— конечная группа, действующая на* A', A *— кольцо инвариантов группы* $\mathscr{G}$ *и* $\mathfrak{p}'$ *— простой идеал в* A'; *пусть* K, K^Z *и* K' *— поля частных колец* A, A^Z *и* A' *соответственно. Тогда поле* K' *представляет собой расширение Галуа поля* K, *и подполя* L *в* K', *содержащие* K *и такие, что* $\mathfrak{p}'$ *является единственным простым идеалом в* A', *лежащим над идеалом* $\mathfrak{p}' \cap L$ *кольца* $A' \cap L$, *— это в точности те подполя, которые содержат* K^Z.

Действительно, группа $\mathscr{G}$ действует на K, и K является полем инвариантов группы $\mathscr{G}$ в поле K' (§ 1, n° 9, предложение 23, примененное к $S = A - \{0\}$); аналогичным образом, K^Z является полем инвариантов группы $\mathscr{G}^Z$; по определению K' оказывается, следовательно, расширением Галуа поля K. Если $\mathscr{H}$ — подгруппа группы $\mathscr{G}$, образованная теми $\sigma \in \mathscr{G}$, относительно которых инвариантны элементы поля L, то утверждение, что L содержит K^Z, равносильно тому, что $\mathscr{H}$ содержится в $\mathscr{G}^Z$ (*Алгебра*, гл. V, § 10, n° 5, теорема 3); так как L является полем инвариантов группы $\mathscr{H}$ в поле K', то $A' \cap L$ является кольцом инвариантов группы $\mathscr{H}$ в кольце A'; второе утверждение вытекает, следовательно, из предложения 4 (i).

Определение 4. *Пусть сохранены предположения и обозначения следствия 2 предложения 4. Говорят, что простой идеал $\mathfrak{p}$ кольца A вполне разлагается в K', если число простых идеалов кольца A', лежащих над $\mathfrak{p}$, равно $[K' : K]$.*

То же самое можно было бы выразить, сказав, что для любого простого идеала $\mathfrak{p}'$ кольца A', лежащего над $\mathfrak{p}$, подгруппа $\mathscr{G}^Z(\mathfrak{p}')$ равна подгруппе $\mathscr{N}$, относительно которой инвариантны все элементы кольца A', что $A^Z(\mathfrak{p}') = A'$ или, наконец, что группа $\mathscr{G}/\mathscr{N}$ действует *точно* на множестве простых идеалов кольца A', лежащих над $\mathfrak{p}$.

Следствие 3. *Пусть A — целостное кольцо, $\mathscr{G}$ — коммутативная конечная группа, действующая на A', A — кольцо инвариантов группы $\mathscr{G}$, $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A, K и K' — поля частных колец A и A' соответственно. Тогда простые идеалы кольца A', лежащие над $\mathfrak{p}$, имеют одно и то же кольцо разложения A^Z и поле частных K^Z кольца A^Z является наибольшим полем, промежуточным между K и K', в котором идеал $\mathfrak{p}$ вполне разлагается.*

Если $\mathfrak{p}'$ — простой идеал кольца A', лежащий над $\mathfrak{p}$, то $\mathscr{G}^Z(\sigma \cdot \mathfrak{p}') = \mathscr{G}^Z(\mathfrak{p}')$, так как $\mathscr{G}$ — коммутативная группа (формула (2)), следовательно (теорема 2 (i)), все простые идеалы кольца A', лежащие над $\mathfrak{p}$, имеют одну и ту же группу разложения $\mathscr{G}^Z$ и, таким образом, одно и то же кольцо разложения A^Z; число этих простых идеалов равно $(\mathscr{G} : \mathscr{G}^Z)$. Пусть L — промежуточное поле между K и K', и пусть $\mathscr{H}$ — подгруппа в $\mathscr{G}$, оставляющая неподвижными элементы из L; группа разложения идеала $\mathfrak{p}'$ относительно группы $\mathscr{H}$ равна $\mathscr{G}^Z \cap \mathscr{H}$, поскольку $A' \cap L$ представляет собой кольцо инвариантов группы $\mathscr{H}$ в A', число простых идеалов кольца A', лежащих над $\mathfrak{p}' \cap L$, равно $(\mathscr{H} : (\mathscr{G}^Z \cap \mathscr{H})) = (\mathscr{H}\mathscr{G}^Z : \mathscr{G}^Z)$ (так как группа $\mathscr{G}$ коммутативна). Следовательно, число простых идеалов кольца $A' \cap L$, лежащих над $\mathfrak{p}$, равно $(\mathscr{G} : \mathscr{H}\mathscr{G}^Z)$. Таким образом, для того чтобы идеал $\mathfrak{p}$ вполне разлагался в L, необходимо и достаточно, чтобы $(\mathscr{G} : \mathscr{H}\mathscr{G}^Z) = [L : K] = (\mathscr{G} : \mathscr{H})$, поскольку $\mathscr{H} \subset \mathscr{H}\mathscr{G}^Z$; это эквивалентно тому, что $\mathscr{H}\mathscr{G}^Z = \mathscr{H}$ или включению $\mathscr{G}^Z \subset \mathscr{H}$, или, наконец, включению $L \subset K^Z$.

Предложение 5. *Пусть сохраняются предположения и обозначения теоремы 2. Тогда поле частных k^T кольца $A^T/(\mathfrak{p}' \cap A^T)$ равно наибольшему сепарабельному расширению k'_s поля k, содержащемуся в k'.*

Так же как в предложении 4, все можно свести к случаю, когда $\mathfrak{p}$ есть максимальный идеал кольца A, а это влечет за собой, что идеалы $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}' \cap A^Z$ и $\mathfrak{p}' \cap A^T$ максимальны в кольцах A', A^Z и A^T соответственно (n° 1, предложение 1).

Для любого $x \in A'$ многочлен $P(X) = \prod_{\sigma \in \mathscr{G}^T} (x - \sigma \cdot x)$ имеет в качестве коэффициентов элементы кольца инерции A^T и по определению группы $\mathscr{G}^T$ все корни этого многочлена в A' сравнимы $\bmod \mathfrak{p}'$; следовательно, для многочлена $\pi'(P)$ над кольцом $A^T/(\mathfrak{p}' \cap A^T)$, все коэффициенты которого являются каноническими образами коэффициентов многочлена P при гомоморфизме π': $A' \to A'/\mathfrak{p}'$, все его корни в кольце $A'/\mathfrak{p}'$ равны образу элемента x; это означает, что расширение k' является радикальным над k^T, откуда $k'_s \subset k^T$, так как каждый элемент из k'_s сепарабелен над k и тем более над k^T.

Известно, что k'_s является расширением Галуа поля k (*Алгебра*, гл. V, § 10, n° 9, предложение 14), а из теоремы 2 следует, что группа Галуа этого расширения изоморфна $\mathscr{G}' = \mathscr{G}^Z/\mathscr{G}^T$. Поскольку k^T представляет собой радикальное расширение поля k'_s, оно является расширением типа Галуа над k и его сепарабельная степень над k равна $q = (\mathscr{G}^Z : \mathscr{G}^T)$. Остается установить, что k^T — *сепарабельное* расширение поля k. Выше мы уже видели, что группа $\mathscr{G}'$ отождествляется с группой автоморфизмов кольца A^T и что A^Z является кольцом инвариантов группы $\mathscr{G}'$. Если $x \in A^T$, то коэффициенты многочлена $Q(X) = \prod_{\sigma' \in \mathscr{G}'} (X - \sigma'(x))$ лежат, следовательно, в A^Z; многочлен над кольцом $A^Z/(\mathfrak{p}' \cap A^Z)$, коэффициентами которого служат образы коэффициентов многочлена Q при гомоморфизме π', имеет степень q и его корнем является элемент $\pi'(x) \in A^T/(\mathfrak{p}' \cap A^T)$. Так как $A^Z/(\mathfrak{p}' \cap A^Z) = k$, в силу предложения 4 (ii), мы видим, что любой элемент поля k^T имеет степень $\leqslant q$ над k.

Учитывая это, рассмотрим поле k_1 инвариантов группы k-автоморфизмов расширения типа Галуа k^T поля k; имеем $[k^T : k_1] = q$ (*Алгебра*, гл. V, § 10, n° 9, предложение 14). Пусть u — примитивный элемент расширения k^T над полем k_1; поскольку этот элемент имеет степень q над k_1 и степень $\leqslant q$ над k, его степень над k равна q и коэффициенты его минимального многочлена над полем k_1 лежат в k; это доказывает, что u сепарабелен над k. С другой стороны, для всякого $v \in k_1$ существует такая степень p^f характеристической экспоненты p, что $v^{p^f} \in k$. Отсюда мы заключаем, что поле $k(u - v)$, содержащее элемент

$$(u - v)^{p^f} = u^{p^f} - v^{p^f},$$

содержит u^{p^f} и, следовательно, расширение $k(u^{p^f})$. Но так как элемент u сепарабелен над k, то $k(u) = k(u^{p^f})$ (*Алгебра*, гл. V, § 8, n° 4, предложение 4), откуда $k(u) \subset k(u - v)$. Поскольку u

имеет степень q над k, а элемент $u-v$ — степень $\leqslant q$, то $k(u)=k(u-v)$, откуда $v\in k(u)$. Это доказывает, что элемент v сепарабелен над k, так что $k_1=k$ и k^T сепарабельно над k.

Следствие. *Если порядок группы инерции $\mathfrak{G}^T(\mathfrak{p}')$ взаимно прост с характеристической экспонентой p поля k, то поле k' является расширением Галуа поля k.*

Действительно, в обозначениях доказательства предложения 5 коэффициенты многочлена $\pi'(P)$ лежат в $k^T=k'_s$ и все его корни равны $\pi'(x)$. Отсюда немедленно следует, что многочлен $\pi'(P)$ является степенью минимального многочлена элемента $\pi'(x)$ над k'_s; но степень последнего многочлена равна некоторой степени числа p; следовательно, ввиду того, что степень многочлена $\pi'(P)$ равна порядку группы $\mathfrak{G}^T$, из нашего предположения вытекает, что $\pi'(x)\in k'_s$; иначе говоря, $k'_s=k'$.

3. Разложение и инерция в случае целозамкнутых колец

Лемма 4. *Пусть A — целозамкнутое кольцо, K — его поле частных, p — характеристическая экспонента поля K, K' — некоторое радикальное расширение поля K и A' — подкольцо поля K', содержащее A и целое над A. Тогда для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A существует, и притом единственный, простой идеал $\mathfrak{p}'$ кольца A', лежащий над $\mathfrak{p}$, и идеал $\mathfrak{p}'$ равен множеству тех $x\in A'$, для которых существует такое целое число $m\geqslant 0$, что $x^{p^m}\in\mathfrak{p}$.*

Существование идеала $\mathfrak{p}'$ следует из теоремы 1 n° 1. Если $x\in\mathfrak{p}'$, то существует такое $m\geqslant 0$, что $x^{p^m}\in K$, откуда $x^{p^m}\in A$, так как кольцо A целозамкнуто; следовательно, $x^{p^m}\in\mathfrak{p}'\cap A=\mathfrak{p}$. Обратно, если $x\in A'$ является таким элементом, что $x^{p^m}\in\mathfrak{p}\subset\mathfrak{p}'$, то $x\in\mathfrak{p}'$, так как идеал $\mathfrak{p}'$ прост.

Замечание 1. Из следствия предложения 11, § 1, n° 3, вытекает, что целое замыкание кольца A в поле K' равно множеству тех $x\in K'$, для которых существует такое $m\geqslant 0$, что $x^{p^m}\in A$ (*Алгебра*, гл. V, § 8, n° 1, предложение 1).

Предложение 6. *Пусть A — целозамкнутое кольцо, K — его поле частных, K' — некоторое расширение типа Галуа поля K и A' — целое замыкание кольца A в поле K'. Тогда:*

(i) *Для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A группа $\mathfrak{G}$ K-автоморфизмов расширения K' действует транзитивно на множестве простых идеалов кольца A', лежащих над $\mathfrak{p}$.*

(ii) *Для любого простого идеала $\mathfrak{p}'$ кольца A' поле частных k' кольца $A'/\mathfrak{p}'$ является расширением типа Галуа поля*

частных k кольца $A/(A \cap \mathfrak{p}')$, и канонический гомоморфизм $\sigma \to \bar{\sigma}$ группы $\mathcal{G}^Z(\mathfrak{p}')$ в группу Γ k-автоморфизмов поля k' определяет при переходе к факторгруппам биективный гомоморфизм из $\mathcal{G}^Z(\mathfrak{p}')/\mathcal{G}^T(\mathfrak{p}')$ на Γ.

А) Предположим сначала, что K является *расширением Галуа конечной степени* поля K. В силу равенства $A = A' \cap K$, которое выполняется благодаря целозамкнутости A, кольцо A является кольцом инвариантов группы $\mathcal{G}$ в A'. Так как группа $\mathcal{G}$ конечна, предложение в рассматриваемом случае получается из теоремы 2 п° 2.

Б) Предположим, далее, что K' — произвольное *расширение Галуа* поля K. Тогда K представляет собой объединение возрастающего фильтрующегося семейства $(K_\alpha)_{\alpha \in I}$ расширений Галуа конечной степени поля K. Для доказательства (i) рассмотрим два простых идеала $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$ кольца A', лежащих над $\mathfrak{p}$. Для любого $\alpha \in I$ множества $\mathfrak{p}' \cap K_\alpha$ и $\mathfrak{q}' \cap K_\alpha$ являются простыми идеалами кольца $A' \cap K_\alpha$, лежащими над $\mathfrak{p}$. Так как $A' \cap K_\alpha$ является целым замыканием кольца A в поле K_α, а ограничения на K_α элементов группы $\mathcal{G}$ образуют группу K-автоморфизмов расширения K_α, из случая А) следует существование такого элемента $\sigma \in \mathcal{G}^\alpha$, что $\sigma \cdot (\mathfrak{p}' \cap K_\alpha) = \mathfrak{q}' \cap K_\alpha$. Пусть $\mathcal{E}_\alpha$ — множество автоморфизмов $\sigma \in \mathcal{G}$, обладающих этим последним свойством. Пусть $\sigma \in \mathcal{G} - \mathcal{E}_\alpha$; тогда для каждого $\tau \in \mathcal{G}$, оставляющего неподвижными элементы поля K_α, имеет место соотношение $(\sigma\tau) \cdot (\mathfrak{p}' \cap K_\alpha) = \sigma \cdot (\mathfrak{p}' \cap K_\alpha) \neq \mathfrak{q}' \cap K_\alpha$, так что $\sigma\tau \in \mathcal{G} - \mathcal{E}_\alpha$. Отсюда следует, что множество $\mathcal{E}_\alpha$ замкнуто в топологической группе Галуа $\mathcal{G}$ (*Алгебра*, гл. V, Приложение II, п° 1); очевидно, что семейство $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha \in I}$ является фильтрующимся по убыванию. Так как группа $\mathcal{G}$ компактна (loc. cit., п° 2, предложение 3) и множества $\mathcal{E}_\alpha$ непусты, пересечение $\mathcal{E}$ семейства $(\mathcal{E}_\alpha)$ непусто и $\sigma \cdot \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'$ для каждого $\sigma \in \mathcal{E}$, откуда следует (i).

Для доказательства утверждения (ii) заметим, что k' есть объединение фильтрующегося по возрастанию семейства $(k_\alpha)_{\alpha \in I}$, где k_α — поле частных кольца $(A' \cap K_\alpha)/(\mathfrak{p}' \cap K_\alpha)$. Так как каждое k_α является расширением типа Галуа поля k в силу случая А), таким же расширением является и поле k' (*Алгебра*, гл. V, § 6, п° 3, предложение 8). С другой стороны, пусть u — некоторый k-автоморфизм поля k и π': $A' \to A'/\mathfrak{p}'$ — канонический гомоморфизм. В силу теоремы 2 п° 2, примененной к $A' \cap K_\alpha$, существует для каждого α непустое множество $\mathcal{F}_\alpha$ таких элементов $\sigma \in \mathcal{G}$, что $\sigma \cdot (\mathfrak{p}' \cap K_\alpha) = \mathfrak{p}' \cap K_\alpha$ и $u(\pi'(x)) = \pi'(\sigma \cdot x)$ для любого $x \in A' \cap K_\alpha$. Так же, как и выше, показывается, что множество $\mathcal{F}_\alpha$ замкнуто в $\mathcal{G}$, и, поскольку $(\mathcal{F}_\alpha)$ является убывающим фильтрующимся семейством, его пере-

сечение $\mathscr{F}$ непусто. Ясно, что для $\sigma \in \mathscr{F}$ имеет место включение $\sigma \in \mathscr{G}^Z(\mathfrak{p}')$ и $\bar{\sigma} = u$, что и завершает доказательство утверждения (ii) в рассматриваемом случае.

В) *Общий случай.* Поле инвариантов K_1 группы $\mathscr{G}$ является радикальным расширением поля K (*Алгебра*, гл. V, § 10, n° 9, предложение 14); следовательно, существует, и притом единственный, простой идеал $\mathfrak{p}_1$ кольца $A_1 = A' \cap K_1$, лежащий над $\mathfrak{p}$ (лемма 4). Если $\mathfrak{p}'$ и $\mathfrak{q}'$ — два простых идеала кольца A', лежащих над $\mathfrak{p}$, то они лежат и над $\mathfrak{p}_1$. Поскольку K' является расширением Галуа поля K_1 и кольцо $A' \cap K_1$ целозамкнуто (§ 1, n° 2, предложение 7 и следствие предложения 8), из случая Б) вытекает существование такого элемента $\sigma \in \mathscr{G}$, что $\sigma \cdot \mathfrak{p}' = \mathfrak{q}'$, откуда следует (i). С другой стороны, ясно, что поле частных k_1 кольца $A_1/\mathfrak{p}_1$ является радикальным расширением поля k (поскольку A целозамкнуто); так как k' — расширение типа Галуа поля k_1 в силу Б), то k' является расширением типа Галуа и поля k, причем всякий k-изоморфизм расширения k' в некоторое алгебраически замкнутое расширение поля k' является k_1-изоморфизмом. Это последнее замечание показывает также, согласно Б), что любой k-автоморфизм расширения k' имеет вид $\bar{\sigma}$, где $\sigma \in \mathscr{G}^Z(\mathfrak{p}')$, а это завершает доказательство пункта (ii).

Замечание 2. Предположим, что K' является *расширением Галуа* поля K, и сохраним обозначения из доказательства предложения 6; пусть для любого α через $\mathscr{G}_\alpha^Z$ (соответственно $\mathscr{G}_\alpha^T$) обозначена подгруппа группы $\mathscr{G}$, образованная теми σ, ограничения которых на $A' \cap K_\alpha$ принадлежат $\mathscr{G}^Z(\mathfrak{p}' \cap K_\alpha)$ (соответственно $\mathscr{G}^T(\mathfrak{p}' \cap K_\alpha)$). Доказательство предложения 6 показывает, что эти подгруппы *замкнуты* в $\mathscr{G}$ и что

$$\mathscr{G}^Z(\mathfrak{p}') = \bigcap_\alpha \mathscr{G}_\alpha^Z \quad \text{и} \quad \mathscr{G}^T(\mathfrak{p}') = \bigcap_\alpha \mathscr{G}_\alpha^T.$$

Кроме того, множество ограничений на $A' \cap K_\alpha$ элементов группы $\mathscr{G}_\alpha'$ (соответственно $\mathscr{G}_\alpha^T$) совпадает со всей группой $\mathscr{G}^Z(\mathfrak{p}' \cap K_\alpha)$ (соответственно $\mathscr{G}^T(\mathfrak{p}' \cap K_\alpha)$), так как любой K-автоморфизм поля K_α продолжается до некоторого элемента группы $\mathscr{G}$.

При тех же предположениях кольцо $A^Z(\mathfrak{p}')$ (соответственно $A^T(\mathfrak{p}')$) является объединением фильтрующегося семейства колец $A^Z(\mathfrak{p}' \cap K_\alpha)$ (соответственно $A^T(\mathfrak{p}' \cap K_\alpha)$): действительно, любой элемент $x \in A^Z(\mathfrak{p}')$ (соответственно $x \in A^T(\mathfrak{p}')$) принадлежит одному из полей K_α и, в силу изложенного выше, существует такой индекс β, что $K_\alpha \subset K_\beta$, а ограничения на $A' \cap K_\alpha$ элементов группы $\mathscr{G}^Z(\mathfrak{p}')$ (соответственно $\mathscr{G}^T(\mathfrak{p}')$) совпадают

с ограничениями на $A' \cap K_\alpha$ элементов группы $\mathscr{G}^Z(\mathfrak{p}' \cap K_\beta)$ (соответственно $\mathscr{G}'(\mathfrak{p}' \cap K_\beta)$), так как, в силу компактности группы $\mathscr{G}$, для любой окрестности подгруппы $\mathscr{G}^Z_{\mathfrak{p}}$ (соответственно $\mathscr{G}^T_{\mathfrak{p}}$) найдется такой индекс β, что $\mathscr{G}^Z_{\mathfrak{p}}$ (соответственно $\mathscr{G}^T_{\mathfrak{p}}$) содержится в заданной окрестности; следовательно, x принадлежит кольцу $A^Z(\mathfrak{p}' \cap K_\beta)$ (соответственно $A^T(\mathfrak{p}' \cap K_\beta)$).

Следствие 1. *В обозначениях предложения* 6 *пусть* f *— гомоморфизм кольца* A *в поле* L, g_1, g_2 *— два гомоморфизма из* A' *в* L, *продолжающие* f. *Тогда существует такой* K*-автоморфизм* σ *поля* K', *что* $g_1 = g_2 \circ \sigma$.

Доказательство проводится на основе предложения 6 тем же способом, что и доказательство следствия теоремы 2 на основе этой теоремы.

Следствие 2. *Пусть* A *— целозамкнутое кольцо,* K *— его поле частных,* K' *— некоторое алгебраическое расширение конечной степени поля* K *и* A' *— подкольцо поля* K', *содержащее* A *и целое над* A.

(i) *Для любого простого идеала* $\mathfrak{p}$ кольца A *множество простых идеалов кольца* A', *лежащих над* $\mathfrak{p}$, *конечно.*

(ii) *Если* $\mathfrak{p}$ *— какой-нибудь простой идеал кольца* A', *лежащий над* $\mathfrak{p}$, *то любой элемент кольца* $A'/\mathfrak{p}'$ *имеет степень* $\leqslant [K' : K]$ *над полем частных кольца* $A/\mathfrak{p}$.

(i) Пусть K'' — расширение типа Галуа поля K, порожденное полем K' в алгебраическом замыкании поля K', а A'' — целое замыкание кольца A в поле K''. Поле K'' представляет собой расширение поля K конечной степени (*Алгебра*, гл. V, § 6, п° 3, следствие 1 из предложения 9); следовательно, группа K-автоморфизмов этого поля конечна. Отсюда вытекает, что множество простых идеалов кольца A'', лежащих над $\mathfrak{p}$, конечно (предложение 6 (i)). С другой стороны, поскольку кольцо A'' цело над A', отображение $\mathfrak{p}'' \to \mathfrak{p}'' \cap A'$ множества простых идеалов кольца A'', лежащих над $\mathfrak{p}$, в множество простых идеалов кольца A', лежащих над $\mathfrak{p}$, сюръективно (п° 1, теорема 1).

(ii) Коэффициенты минимального многочлена (над K) произвольного элемента $x' \in A'$ принадлежат кольцу A (§ 1, п° 3, следствие предложения 10); применяя к коэффициентам этого многочлена канонический гомоморфизм π': $A' \to A'/\mathfrak{p}'$, мы получаем для класса $\bmod \mathfrak{p}'$ элемента x некоторое уравнение целой зависимости с коэффициентами в $A/\mathfrak{p}$ и степени $\leqslant [K' : K]$; отсюда следует требуемое утверждение.

Следствие 3. *Сохраним предположения и обозначения следствия* 2. *Если кольцо* A *полулокально, то полулокально и* A'.

Действительно, для любого максимального идеала $\mathfrak{m}'$ кольца A' идеал $\mathfrak{m}' \cap A$ является максимальным в A (n° 1, предложение 1); таким образом, следствие вытекает из следствия 2, ибо, по предположению, множество максимальных идеалов кольца A конечно.

Следствие 4. *Пусть кольцо A целозамкнуто, K — его поле частных, K' — некоторое расширение Галуа поля K, A' — целое замыкание кольца A в поле K', $\mathfrak{p}'$ — некоторый простой идеал в A', $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{p}'$, k и k' — поля частных колец $A/\mathfrak{p}$ и $A'/\mathfrak{p}'$ соответственно. Тогда:*

(i) *поле частных кольца $A^Z/(\mathfrak{p}' \cap A^Z)$ равно полю k и максимальный идеал локализации кольца A^Z относительно простого идеала $\mathfrak{p}' \cap Z^Z$ порождается идеалом $\mathfrak{p}$;*

(ii) *поле частных k^T кольца $A^T/(\mathfrak{p}' \cap A^T)$ является наибольшим сепарабельным расширением поля k, содержащимся в k'.*

Кольцо A является кольцом инвариантов в A' группы Галуа поля K' над полем K; когда поле K имеет *конечную* степень над K, рассматриваемое следствие вытекает поэтому из предложений 4 и 5 n° 2. Рассмотрим теперь общий случай, в котором K' представляет собой объединение некоторого возрастающего фильтрующегося семейства (K_α) расширений Галуа конечной степени поля K. Тогда:

(i) Если x, y — элементы кольца A^Z, причем $y \notin \mathfrak{p}'$, то имеется такой индекс α, что x и y принадлежат $A^Z(\mathfrak{p}' \cap K_\alpha)$ (замечание 2). В силу предложения 4 n° 2, существуют такие x_0, y_0 из A, причем $y_0 \notin \mathfrak{p}'$, что $xy_0 - x_0y \notin \mathfrak{p}'$, чем и доказывается первое утверждение пункта (i); если, кроме того, $x \notin \mathfrak{p}'$, то можно выбрать такой элемент $y_0 \in A^Z(\mathfrak{p}' \cap K_\alpha)$, что $y_0 \notin \mathfrak{p}'$ и

$$xy_0 \in \mathfrak{p}A^Z(\mathfrak{p}' \cap K_\alpha) \subset \mathfrak{p}A^Z(\mathfrak{p}'),$$

что доказывает второе утверждение пункта (i).

(ii) Теперь предположим, что $x \in A^T$; существует такой индекс α, что $x \in A^T(\mathfrak{p}' \cap K_\alpha)$ (замечание 2) и предложение 5 n° 2 показывает, что класс $\bar{x} \bmod (\mathfrak{p}' \cap K_\alpha \cap A^T)$ элемента x является сепарабельным алгебраическим над k; *тем более* поэтому класс $\bmod (\mathfrak{p}' \cap A^T)$ элемента x сепарабелен над k; для завершения доказательства этого следствия достаточно показать, что k' является *радикальным* расширением поля k^T. Но k' является объединением возрастающего фильтрующегося семейства полей частных k_α колец $(A' \cap K_\alpha)/(\mathfrak{p}' \cap K_\alpha)$. Следовательно, из предложения 5 получается, что если некоторый элемент из k' принадлежит k_α, то он радикален над полем частных кольца

$$A^T(\mathfrak{p}' \cap K_\alpha)/(\mathfrak{p}' \cap A^T(\mathfrak{p}' \cap K_\alpha))$$

и *тем более* над k^T (в соответствии с замечанием 2).

Определение 5. *В предположениях и обозначениях предложения* 6 *поле инвариантов* $K^Z(\mathfrak{p}')$ (соответственно $K^T(\mathfrak{p}')$) *группы* $\mathcal{G}^Z(\mathfrak{p}')$ (соответственно $\mathcal{G}^T(\mathfrak{p}')$) *в поле* K *называется полем разложения* (соответственно *полем инерции*) *идеала* $\mathfrak{p}'$ *относительно поля* K.

Используют также обозначение K^Z (соответственно K^T) вместо $K^Z(\mathfrak{p}')$ (соответственно $K^T(\mathfrak{p}')$). Из предложения 23 § 1, n° 9, следует, что K^Z (соответственно K^T) является *полем частных* кольца A^Z (соответственно A^T); кольцо A^Z (соответственно A^T) представляет собой целое замыкание кольца A в поле K^Z (соответственно в поле K^T).

Замечания. 3) В условиях следствия 4 предложения 6 и в предположении конечности числа $[K' : K]$ число различных простых идеалов, лежащих над $\mathfrak{p}$, равно $[K^Z : K]$, ибо эта степень равна индексу $(\mathcal{G} : \mathcal{G}^Z)$ в силу теории Галуа; кроме того, из теории Галуа следует, что имеет место равенство

$$[K^T : K^Z] = (\mathcal{G}^Z : \mathcal{G}^T) = [k^T : k]. \tag{6}$$

4) Пусть A — целозамкнутое кольцо, K — его поле частных, K' — некоторое алгебраическое расширение поля K *конечной* степени и A' — целое замыкание кольца A в K'. Тогда для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A *число простых идеалов из* A', *лежащих над* $\mathfrak{p}$, *не превосходит числа* $[K' : K]_s$ (сепарабельной степени K' над K). Действительно, можно с самого начала ограничиться случаем, когда K' — сепарабельное расширение поля K, так как в общей ситуации K' представляет собой радикальное расширение наибольшего сепарабельного расширения K_0 поля K, содержащегося в K', причем $[K' : K]_s = [K_0 : K]$ по определению, и если A_0 — целое замыкание кольца A в K_0, то простые идеалы кольца A_0 находятся в биективном соответствии с простыми идеалами кольца A' (лемма 4). Предположим, следовательно, что K' сепарабельно над K, и пусть N — расширение Галуа поля K, порожденное полем K' в алгебраическом замыкании поля K, $\mathcal{G}$ — группа Галуа этого расширения, B — целое замыкание кольца A в поле N, $\mathfrak{P}$ — некоторый простой идеал кольца B, лежащий над $\mathfrak{p}$. Пусть $\mathcal{H}$ — группа Галуа расширения N над K', $\mathcal{G}^Z$ — группа разложения идеала $\mathfrak{P}$; простые идеалы кольца B, лежащие над $\mathfrak{p}$, — это идеалы $s \cdot \mathfrak{P}$, где $s \in \mathcal{G}$ (n° 2, теорема 2), и соотношение $s \cdot \mathfrak{P} = s' \cdot \mathfrak{P}$ означает, что $s' = sg$, где $g \in \mathcal{G}^Z$. С другой стороны, для того чтобы $s \cdot \mathfrak{P} \cap K' = s' \cdot \mathfrak{P} \cap K'$, необходимо и достаточно, чтобы $s' \cdot \mathfrak{P} = ts \cdot \mathfrak{P}$, где $t \in \mathcal{H}$ (n° 2, теорема 2), откуда окончательно получаем, что $s' = tsg$, где $t \in \mathcal{H}$ и $g \in \mathcal{G}^Z$. Следовательно, число простых идеалов кольца A', лежащих над $\mathfrak{p}$, равно *числу классов группы* $\mathcal{G}$ *относительно следующего отношения эквивалентности: элементы* s *и* s' *эквивалентны,*

если существуют такие $t \in \mathscr{H}$ *и* $g \in \mathscr{G}^Z$, *что* $s' = tsg$; ясно, что это число не превосходит числа $(\mathscr{G} : \mathscr{H})$ — числа правых смежных классов группы $\mathscr{G}$ по подгруппе $\mathscr{H}$, а $(\mathscr{G} : \mathscr{H}) = [K' : K]$ согласно теории Галуа.

Предложение 7. *Пусть* A — *некоторое целозамкнутое кольцо,* K — *его поле частных,* K' — *некоторое расширение Галуа поля* K *с группой Галуа* $\mathscr{G}$, A' — *целое замыкание кольца* A *в поле* K', $\mathfrak{p}'$ — *некоторый простой идеал кольца* A' *и* $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{p}'$. *Наконец, пусть* L — *какое-нибудь подполе расширения* K', *содержащее* K, *и* $\mathfrak{p}(L) = \mathfrak{p}' \cap L$.

(i) *Поле разложения* (соответственно *поле инерции*) *идеала* $\mathfrak{p}'$ *относительно поля* L *равно* $L(K^Z)$ (соответственно $L(K^T)$); *если, кроме того,* L — *расширение Галуа поля* K, *то поле разложения идеала* $\mathfrak{p}(L)$ *относительно* K *равно* $L \cap K^Z$.

(ii) *Если* L *содержится в* K^Z, *то* $A/\mathfrak{p}$ *и* $(A' \cap L)/\mathfrak{p}(L)$ *имеют одно и то же поле частных и в локализации кольца* $A' \cap L$, *соответствующей простому идеалу* $\mathfrak{p}(L)$, *максимальный идеал порождается идеалом* $\mathfrak{p}$. *Обратно, если выполнены эти два условия и если, кроме того,* $\bigcap_{n \geqslant 0} \mathfrak{p}^n A'_{\mathfrak{p}'} = 0$, *то* L *содержит* K^Z.

(i) Если $\mathscr{H}$ — подгруппа группы $\mathscr{G}$, элементы которой оставляют неподвижными элементы из L, то совершенно ясно, что группа разложения (соответственно группа инерции) идеала $\mathfrak{p}'$ относительно L равна $\mathscr{G}^Z \cap \mathscr{H}$ (соответственно $\mathscr{G}^T \cap \mathscr{H}$); таким образом, первое утверждение вытекает из теории Галуа, когда K' является *конечным* расширением Галуа над K (*Алгебра*, гл. V, § 10, n° 6, следствие 1 теоремы 3); в общем же случае это утверждение следует из того, что A^Z (соответственно A^T) является объединением колец $A^Z(\mathfrak{p}' \cap K_\alpha)$ (соответственно $A^T(\mathfrak{p}' \cap K_\alpha)$) в обозначениях замечания 2: любой элемент $x \in K'$ принадлежит некоторому K_α и, если он инвариантен относительно $\mathscr{G}^Z(\mathfrak{p}') \cap \mathscr{H}$ (соответственно $\mathscr{G}^T(\mathfrak{p}') \cap \mathscr{H}$), то он инвариантен и относительно $\mathscr{G}^Z(\mathfrak{p}' \cap K_\beta) \cap \mathscr{H}$ (соответственно $\mathscr{G}^T(\mathfrak{p}' \cap K_\beta) \cap \mathscr{H}$) при некотором подходящим образом подобранном индексе β; следовательно, этот элемент принадлежит полю $L(K^Z(\mathfrak{p}' \cap K_\beta)) \subset L(K^Z)$ (соответственно $L(K^T(\mathfrak{p}' \cap K_\beta)) \subset L(K^T)$) в силу рассуждений, проведенных вначале. Предположим теперь, что L является расширением Галуа поля K; в этом случае идеал $\mathfrak{p}(L) = \mathfrak{p} \cap L$ устойчив относительно ограничения на L любого автоморфизма $\sigma \in \mathscr{G}^Z$, в силу чего это ограничение принадлежит группе разложения идеала $\mathfrak{p}(L)$ относительно поля K. Обратно, пусть τ — некоторый автоморфизм расширения L, принадлежащий этой группе, и пусть σ — некоторое продолжение τ до K-автоморфизма поля K'; положим $\mathfrak{q}' = \sigma \cdot \mathfrak{p}'$. Поскольку $\mathfrak{p}'$ и $\mathfrak{q}'$ оба лежат над $\mathfrak{p}(L)$, существует такой автоморфизм $\rho \in \mathscr{H}$, что $\mathfrak{q}' = \rho \cdot \mathfrak{p}'$,

откуда $\rho^{-1}\sigma \in \mathscr{G}^Z$, и τ оказывается ограничением на L элемента $\rho^{-1}\sigma$, другими словами, группа разложения идеала $\mathfrak{p}(L)$ относительно поля K отождествляется с группой ограничений на L автоморфизмов $\sigma \in \mathscr{G}^Z$, чем и доказывается второе утверждение.

(ii) Включение $L \subset K^Z$ означает, что $\mathscr{H} \supset \mathscr{G}^Z$ и, следовательно, утверждения пункта (ii) представляют собой частный случай предложения 4 (ii) и (iii) n° 2, когда степень $[K' : K]$ конечна. В общем же случае следует рассуждать так же, как при доказательстве предложения 6.

4. *Вторая теорема существования*

Теорема 3. *Пусть A — целозамкнутое кольцо и A' — некоторое кольцо, содержащее A и целое над A. Предположим, что 0 является единственным элементом кольца A, являющимся делителем нуля в A'. Пусть $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ — два простых идеала кольца A, причем $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}$, и $\mathfrak{q}'$ — некоторый простой идеал кольца A', лежащий над $\mathfrak{q}$. Тогда существует простой идеал $\mathfrak{p}'$ кольца A', лежащий над $\mathfrak{p}$ и такой, что $\mathfrak{q}' \supset \mathfrak{p}'$.*

Предположим сначала, что кольцо A' *целостное*. Пусть K, K' — поля частных колец A и A' соответственно. Пусть K'' — алгебраическое замыкание поля K' и A'' — целое замыкание кольца A в K''; очевидно, что $A \subset A' \subset A''$. Пусть $\mathfrak{p}''$ — некоторый простой идеал кольца A'', лежащий над $\mathfrak{p}$ (n° 1, теорема 1), $\mathfrak{q}''$ — некоторый простой идеал кольца A'', лежащий над $\mathfrak{q}$ и такой, что $\mathfrak{p}'' \subset \mathfrak{q}''$ (n° 1, следствие 2 теоремы 1); наконец, пусть $\mathfrak{q}_1''$ — некоторый простой идеал кольца A'', лежащий над $\mathfrak{q}'$ (n° 1, теорема 1). В силу предложения 6 (i) n° 3, существует K-автоморфизм σ поля K'', для которого $\sigma \cdot \mathfrak{q}'' = \mathfrak{q}_1''$. Тогда $\sigma \cdot \mathfrak{p}''$ является простым идеалом кольца A'', лежащим над $\mathfrak{p}$ и таким, что $\sigma \cdot \mathfrak{p}'' \subset \mathfrak{q}_1''$; следовательно, $\mathfrak{p}' = A' \cap \sigma \cdot \mathfrak{p}''$ представляет собой простой идеал кольца A', лежащий над $\mathfrak{p}$ и содержащийся в $A' \cap \mathfrak{q}_1'' = \mathfrak{q}'$.

Перейдем к общему случаю. Поскольку A — целостное кольцо и $\mathfrak{q}'$ — простой идеал, системы $A - \{0\}$ и $A' - \mathfrak{q}'$ мультипликативны; следовательно, их произведение $S = (A - \{0\})(A' - \mathfrak{q}')$ является некоторой мультипликативной системой кольца A', не содержащей нуля, так как ненулевые элементы кольца A не являются делителями нуля в A'. Но тогда (гл. II, § 2, n° 5, следствие 2 предложения 11) существует некоторый простой идеал $\mathfrak{m}'$ кольца A', не пересекающийся с S, т. е. такой, что $\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{q}'$ и $\mathfrak{m}' \cap A = 0$. Пусть h — канонический гомоморфизм $A' \to A'/\mathfrak{m}'$. Ограничение гомоморфизма h на A инъективно, следовательно, кольцо $h(A)$ целозамкнуто. Поскольку $\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{q}'$, множество $h(\mathfrak{q}')$ представляет собой простой идеал кольца

$A'/\mathfrak{m}'$, лежащий над $h(\mathfrak{q})$; так как $A'/\mathfrak{m}'$ — целостное кольцо, то первая часть доказательства показывает, что существует простой идеал $\mathfrak{n}'$ кольца $A'/\mathfrak{m}'$, для которого $\mathfrak{n}' \cap h(A) = h(\mathfrak{p})$ и $h(\mathfrak{q}') \supset \mathfrak{n}'$. Идеал $\mathfrak{p}' = h^{-1}(\mathfrak{n}')$ является простым идеалом в A' и $\mathfrak{q}' \supset \mathfrak{p}'$, так как $\mathfrak{q}'$ содержит ядро гомоморфизма h. Поскольку $\mathfrak{n}' \supset h(\mathfrak{p})$, имеет место включение $\mathfrak{p}' \supset \mathfrak{p}$. Наконец, для $x \in \mathfrak{p}' \cap A$ имеем $h(x) \in \mathfrak{n}' \cap h(A) = h(\mathfrak{p})$; следовательно, $x \in \mathfrak{p}$, так как ограничение гомоморфизма h на кольцо A инъективно; следовательно, $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}$.

Следствие. *Сохраняя те же предположения на A и A', что и в теореме* 3, *допустим, что $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца A. Тогда простые идеалы кольца A', лежащие над $\mathfrak{p}$, являются минимальными элементами множества $\mathscr{E}$ простых идеалов кольца A', содержащих идеал $\mathfrak{p}A'$.*

Действительно, любой простой идеал кольца A', лежащий над $\mathfrak{p}$, минимален в $\mathscr{E}$ в силу следствия 1 предложения 1 n° 1. Обратно, пусть $\mathfrak{q}'$ — произвольный элемент из $\mathscr{E}$. Поскольку $\mathfrak{q}' \cap A \supset \mathfrak{p}$, теорема 3 показывает, что существует некоторый простой идеал $\mathfrak{p}'$ кольца A', лежащий над $\mathfrak{p}$ и такой, что $\mathfrak{q}' \supset \mathfrak{p}'$. Так как $\mathfrak{p}'$ содержит $\mathfrak{p}A'$, то сделанные относительно $\mathfrak{q}'$ предположения влекут за собой равенство $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}'$; следовательно, идеал $\mathfrak{q}'$ лежит над идеалом $\mathfrak{p}$.

* Пусть V, V' — два аффинных алгебраических многообразия, f — некоторый морфизм из V' в V, при котором образ $f(V')$ является плотным в V. Пусть A (соответственно A') — кольцо регулярных функций на V (соответственно на V'); задание морфизма f позволяет отождествить A с некоторым подкольцом в A'; предположим, что A' *цело* над A. Теорема 1 n° 1 показывает, что для любого неприводимого подмногообразия W многообразия V существует некоторое неприводимое подмногообразие W' многообразия V', для которого $f(W')$ является плотным в W подмножеством; в частности, любая точка многообразия V является образом некоторого неприводимого подмногообразия многообразия V', чем доказано, что отображение f *сюръективно*. Аналогичным образом, ограничение морфизма f на любое неприводимое подмногообразие W' многообразия V' переводит W' *на* некоторое неприводимое подмногообразие многообразия V. Следствие 2 теоремы 1 n° 1 показывает, что если W и X — два неприводимых подмногообразия на V, для которых $W \supset X$, и если W' — некоторое неприводимое подмногообразие на V', для которого $f(W') = W$, то существует некоторое неприводимое подмногообразие X' многообразия V', *содержащееся в* W' и такое, что $f(X') = X$.

Когда кольцо A целозамкнуто, говорят, что V *нормально*. Теорема 3 показывает, что если V нормально, а W и X — два неприводимых подмногообразия V, для которых $W \supset X$, и если X' — такое неприводимое подмногообразие многообразия V', что $f(X') = X$, то существует подмногообразие W' многообразия V', *содержащее* X' и такое, что $f(W') = W$. Наконец, следствие теоремы 3 показывает, что если V нормально и если W — неприводимое подмногообразие в V, то неприводимые подмногообразия W' в V', для которых $f(W') = W$, — это не что иное, как неприводимые компоненты многообразия $f^{-1}(W)$.

Упражнения

1) Привести пример инъективного гомоморфизма колец $\rho\colon A \to B$, где B представляет собой конечную A-алгебру, такого, что отображение ${}^a\rho\colon \mathrm{Spec}\,(B) \to \mathrm{Spec}\,(A)$ сюръективно, но B не является плоским A-модулем. Обратно, привести пример строго плоской A-алгебры конечного типа, не являющейся целой над A.

2) Пусть A — такое кольцо, что пространство $\mathrm{Spec}\,(A)$ отделимо (гл. II, § 4, упражнение 16). Показать, что для всякой целой над A A-алгебры B пространство $\mathrm{Spec}\,(B)$ отделимо.

3) Пусть A — кольцо, A' — некоторое кольцо, содержащее A и целое над A. Показать, что для любого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A корень этого идеала представляет собой пересечение кольца A и корня идеала $\mathfrak{a}A'$. Показать, что последний из этих корней совпадает с множеством элементов $x \in A'$, удовлетворяющих уравнению целой зависимости, коэффициенты которого (за исключением старшего) принадлежат $\mathfrak{a}$ (надо заметить, что если y, z — два элемента из A', удовлетворяющие такому уравнению целой зависимости, то такому же уравнению удовлетворяет и элемент $y - z$).

4) Пусть A — нётерово кольцо, $\rho\colon A \to B$ — гомоморфизм колец, превращающий B в A-модуль конечного типа, N — некоторый B-модуль конечного типа. Показать, что простые идеалы $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\,(\rho_*(N))$ представляют собой прообразы относительно ρ простых идеалов $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}\,(N)$.

5) Пусть K — поле; в целостном кольце $K[X, Y]$ многочленов от двух переменных над K рассмотрим подкольца $A = K[X^4, Y^4]$, $A' = K[X^4, X^3Y, XY^3, Y^4]$; кольцо A нётерово, а кольцо A' является конечной A-алгеброй. Пусть $\mathfrak{p} = AY^4$; это простой идеал в A; показать, что $\mathfrak{m} = A'X^4 + A'X^3Y + A'XY^3 + A'Y^4$ является (вложенным) простым идеалом, ассоциированным с идеалом $\mathfrak{p}A'$ кольца A'; однако $\mathfrak{m}$ не лежит над идеалом $\mathfrak{p}$ (заметить, что $\mathfrak{m}$ является аннулятором класса элемента X^2Y^6 в кольце $A'/\mathfrak{p}A'$) (ср. § 1, упражнение 26г)).

6) Построить возрастающую последовательность полей алгебраических чисел $K_0 = \mathbf{Q}$, $K_1, \ldots, K_n, \ldots$, удовлетворяющую следующим условиям: K_n есть квадратичное расширение поля K_{n-1}, и если A_n обозначает целое замыкание кольца $\mathbf{Z}$ в K_n и p — некоторое простое число, то в A_n имеется простой идеал $\mathfrak{p}_n$, лежащий над (p), над которым в A_{n+1} лежат два различных простых идеала $\mathfrak{p}_{n+1}$, $\mathfrak{p}'_{n+1}$ (заметить, что в конечном поле всегда существуют элементы, не являющиеся квадратами). Пусть K — объединение полей K_n и A' — целое замыкание $\mathbf{Z}$ в K; показать, что существует бесконечно много (максимальных) идеалов в A', лежащих над максимальным идеалом (p) кольца целых чисел $\mathbf{Z}$.

¶ 7) Пусть A — целостное нётерово кольцо и A' — его целое замыкание. Показать, что для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A существует лишь конечное число простых идеалов из A', лежащих над $\mathfrak{p}$. (Сначала свести доказательство к случаю, когда A — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{p}$; рассмотреть пополнение $\widehat{A}$ этого кольца и полное кольцо частных B кольца $\widehat{A}$ и отметить, что поле частных K кольца A отождествляется с некоторым подкольцом кольца B (гл. III, § 3, n° 4, следствие 2 теоремы 3). Заметить, что спектр кольца B конечен и, следовательно, B имеет только конечное число попарно ортогональных идемпотентов. Пусть, далее, $C \supset A$ — некоторое подкольцо в K, являющееся A-модулем конечного типа и, следовательно, полулокальное. Установить, что пополнение $\widehat{C}$ кольца C отождествляется с некоторым подкольцом кольца B; закончить доказательство, заметив, что $\widehat{C}$ представляет собой произведение конечного числа локальных колец, причем это число равно числу максимальных идеалов кольца C.) Обобщить результат на случай целого замыкания нётерова кольца в его полном кольце частных (свести доказательство к случаю редуцированного кольца).

8) Говорят, что целостное локальное кольцо является *унаразветвленным*, если его целое замыкание представляет собой локальное кольцо.

а) Пусть A — целостное локальное кольцо, K — его поле частных. Для того чтобы A было унаразветвленным, необходимо и достаточно, чтобы всякая A-подалгебра поля K, являющаяся A-модулем конечного типа, была локальным кольцом.

б) Показать, что если пополнение нётерова локального кольца A является целостным, то A унаразветвленное (если B — конечная A-алгебра, содержащаяся в K, то показать, что подкольцо поля частных кольца $\hat{A}$, порожденное B и $\hat{A}$, изоморфно кольцу $B \otimes_A \hat{A}$; для этого воспользоваться тем, что $\hat{A}$ — плоский A-модуль, а B содержится в некотором свободном A-модуле конечного типа, содержащемся в K; после этого применить пункт а) и следствие предложения 19 гл. III, § 2, n° 13).

9) Пусть k_0 — поле, A' — кольцо многочленов $k_0[X_n]_{n\in\mathbf{N}}$ от бесконечной последовательности переменных; это целозамкнутое кольцо, поле частных которого равно $K' = k_0(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Обозначим через σ такой k_0-автоморфизм кольца A', что

$$\sigma(X_{2n}) = -X_{2n} + X_{2n+1}, \quad \sigma(X_{2n+1}) = X_{2n+1}$$

при любом $n \geqslant 0$; автоморфизм σ и тождественный автоморфизм образуют группу $\mathfrak{G}$ автоморфизмов кольца A'. Пусть A — кольцо инвариантов группы $\mathfrak{G}$ и K — его поле частных; поле K' является сепарабельным расширением степени 2 поля K и A' представляет собой целое замыкание кольца A в K'.

а) Показать, что A' является A-модулем, обладающим *бесконечным* базисом. (Если поле k_0 имеет характеристику, отличную от 2, то надо показать, что A является подкольцом в A', порожденным X_{2n+1} и произведениями $Y_n Y_m$, где $Y_n = X_{2n} - \frac{1}{2} X_{2n+1}$, для $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$. Если же k_0 имеет характеристику 2, то A порождено элементами X_{2n+1} и $X_{2n}^2 + X_{2n}X_{2n+1}$ при $n \geqslant 0$.)

б) Пусть $\mathfrak{m}'$ — максимальный идеал кольца A', порожденный всеми X_n, и пусть $\mathfrak{m} = A \cap \mathfrak{m}'$. Показать, что $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}A'$, что $\mathfrak{m}'$ является единственным идеалом в A', лежащим над $\mathfrak{m}$, и что поля $A/\mathfrak{m}$ и $A'/\mathfrak{m}'$ канонически изоморфны.

в) Пусть $\mathfrak{p}'$ — простой идеал кольца A', порожденный X_{2n+1} при $n \geqslant 0$, и пусть $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A$; пусть k, k' — поля частных колец $A/\mathfrak{p}$ и $A'/\mathfrak{p}'$ соответственно. Идеал $\mathfrak{p}'$ является единственным простым идеалом кольца A', лежащим над $\mathfrak{p}$. Если k_0 имеет характеристику, отличную от 2, то k' представляет собой сепарабельное расширение степени 2 поля k; если же k_0 имеет характеристику 2, то k' представляет собой радикальное расширение бесконечной степени поля k.

10) а) Пусть A' — кольцо многочленов $\mathbf{Z}[X, Y]$ от двух перемеиных и σ — автоморфизм кольца A', оставляющий элемент Y неподвижным, а $\sigma(X) = -X$; σ и тождественный автоморфизм образуют некоторую группу $\mathfrak{G}$ автоморфизмов кольца A' и кольцом инвариантов группы $\mathfrak{G}$ является кольцо $A = [X^2, Y]$. Пусть $\mathfrak{p}'$ — простой идеал $A'(Y - 2X)$ и $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{p}'$. Тогда группа разложения $\mathfrak{G}^Z(\mathfrak{p}')$ равна нейтральному элементу. Показать, что $A/\mathfrak{p}$ и $A'/\mathfrak{p}'$ не изоморфны (рассмотреть тензорные произведения этих колец на кольцо $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$).

б) Пусть K — поле характеристики $\neq 2$, A' — кольцо многочленов $K[X, Y]$, $\mathfrak{G}$ — группа автоморфизмов кольца A', образованная тождественным автоморфизмом и таким $K[Y]$-автоморфизмом σ кольца A', что $\sigma(X) = -X$; тогда кольцо инвариантов A группы $\mathfrak{G}$ равно $K[X^2, Y]$. Пусть $\mathfrak{p}'$ — простой идеал $A'(X^3 - Y)$ кольца A' и $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{p}'$; группа разложения $\mathfrak{G}^Z(\mathfrak{p}')$ сводится

в этом случае к нейтральному элементу, но кольца $A/\mathfrak{p}$ и $A'/\mathfrak{p}'$ не изоморфны.

¶ 11) а) Пусть A — целозамкнутое локальное кольцо, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал, K — поле частных, K' — некоторое расширение Галуа поля K конечной степени, A' — целое замыкание кольца A в поле K', $\mathfrak{m}'$ — какой-нибудь максимальный идеал в A', лежащий над $\mathfrak{m}$, $B = A^Z(\mathfrak{m})$ — его кольцо разложения и $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}' \cap B$. Для любого целого $k > 0$ имеет место равенство $B = A + \mathfrak{n}^k$ (рассуждать так же, как в предложении 4). Кроме того, существует такой примитивный элемент z поля K^Z (поля частных кольца B), что $z \in \mathfrak{n}$; вывести отсюда, что $\mathfrak{n} \cap A[z] = \mathfrak{m}A[z]$.

б) Показать, что для любого целого k имеет место равенство $\mathfrak{m}^k B_{\mathfrak{n}} \cap A = \mathfrak{m}^k$. (Если $x \in \mathfrak{m}^k B_{\mathfrak{n}} \cap A$, то заметить, что существует такой элемент $t \in A[z]$ (где z определен в пункте а)), что $t \notin \mathfrak{n}$ и $tx \in \mathfrak{m}^k A[z]$; записывая $t = t_0 + t_1 z + \ldots + t_{r-1} z^{r-1}$ (где r — степень $[K^Z : K]$), получить отсюда, что $t_0 x \in \mathfrak{m}^k$ и $t_0 \notin \mathfrak{m}$.)

в) Предположим теперь, что K' является *произвольным* расширением Галуа поля K. В тех же обозначениях, что и выше, показать, что по-прежнему выполняются равенства $B = A + \mathfrak{n}^k$ и $\mathfrak{m}^k B_{\mathfrak{n}} \cap A = \mathfrak{m}^k$ (заметить, что любой элемент из $A^Z(\mathfrak{m}')$ содержится в кольце разложения идеала $\mathfrak{m}' \cap C$, где C — целое замыкание кольца A в некотором подрасширении Галуа конечной степени расширения K').

г) В условиях пункта в) показать, что если кольцо A нётерово, то нётерово и $B_{\mathfrak{n}}$. (Обратить внимание на то, что отделимое пополнение кольца $B_{\mathfrak{n}}$ относительно $\mathfrak{m}$-аднческой топологии отождествляется с пополненнем $\hat{A}$ кольца A в силу пункта в); если $\varphi\colon B_{\mathfrak{n}} \to \hat{A}$ — канонический гомоморфизм, то показать, что для любого идеала $\mathfrak{a}$ кольца $B_{\mathfrak{n}}$ имеет место равенство $\varphi^{-1}(\mathfrak{a}\hat{A}) = \mathfrak{a}$, для чего воспользоваться тем фактом, что в $\hat{A}$ любой идеал имеет конечный тип и, в частности, $\mathfrak{a}\hat{A}$ порождается конечным числом элементов из $\mathfrak{a}$, и свести доказательство к случаю, когда K' является расширением Галуа поля K конечной степени.)

12) Пусть K — поле, K' — некоторое расширенне Галуа поля K конечиой степени, C — кольцо многочленов $K'[X, Y]$, B — факторкольцо C/CXY, x и y — канонические образы элементов X и Y в кольце B. Пусть A' — подкольцо $K[x] + yK'[y]$ кольца B. Группа Галуа $\mathfrak{G}$ расширения K' поля K действует точным образом иа A' и кольцо инвариантов A группы $\mathfrak{G}$ в A' равно $K[x, y]$. Пусть S — множество степеней элемента x в кольце A'. Показать, что $S^{-1}A' = S^{-1}A$ и что $\mathfrak{G}$ не действует точным образом на $S^{-1}A'$.

¶ 13) а) Пусть K — поле характеристики 0, $\mathfrak{n}$ — идеал кольца многочленов $K[X, Y, Z]$, порожденный элементом $Y^2 - X^2 - Z^3$. Показать, что идеал $\mathfrak{n}$ прост и что целостное кольцо $A = K[X, Y, Z]/\mathfrak{n}$ не является целозамкнутым; если x, y, z — образы элементов X, Y, Z в A, то элемент $t = y/x$ из поля частных L кольца A является целым над A, но не принадлежит A. Пусть $A' \supset A$ — подкольцо $K[x, t, z]$ поля L, являющееся целым над A. Рассмотрим в A простой идеал $\mathfrak{p}$, порожденный элементами $xz - y$ и $z^2 - 1 - x$, и максимальный идеал $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}$, порожденный элементами x, y, $z - 1$. С другой стороны, рассмотрим в A' максимальный идеал $\mathfrak{q}'$, порожденный элементами x, $t + 1$ и $z - 1$. Показать, что $\mathfrak{q}'$ лежит над $\mathfrak{q}$, но не существует ни одного простого идеала $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{q}'$ кольца A', лежащего над $\mathfrak{p}$. (Рассмотреть гомоморфизм из $A'/\mathfrak{p}A'$ в некоторое надполе поля K и показать, что если ядро его содержится в $\mathfrak{q}'$, то образ $\mathfrak{q}'$ при таком гомоморфизме обязательно равен нулю.)

б) Пусть A' — факторкольцо кольца многочленов $\mathbf{Z}[X]$ по идеалу $\mathfrak{n}$, порожденному элементами $2X$ и $X^2 - X$, и пусть x — образ элемеита X в A';

кольцо A' цело над $\mathbf{Z}$, но число 2 является делителем нуля в A'. Пусть $\mathfrak{q}'$ — простой идеал кольца A', порожденный числом 2 и элементом $x-1$. Тогда $\mathfrak{q}' \cap \mathbf{Z} = 2\mathbf{Z}$; если $\mathfrak{p}$ — простой идеал (0) в $\mathbf{Z}$, то показать, что не существует ни одного простого идеала $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{q}'$ в A', который лежал бы над $\mathfrak{p}$.

в) Пусть K — поле, $\mathfrak{n}$ — идеал кольца многочленов $K[X, Y, Z]$, порожденный элементами X^2, XY, XZ, $YZ-Y$ и Z^2-Z; A' — факторкольцо $K[X, Y, Z]/\mathfrak{n}$, x, y, z — образы элементов X, Y, Z в A', A — подкольцо $K[x, y]$ кольца A'; кольцо A целозамкнуто в своем полном кольце частных, а A' цело над A. Рассмотрим в A простой идеал $\mathfrak{p}$, порожденный элементом x, и максимальный идеал $\mathfrak{q}$, порожденный элементами x и y. С другой стороны, рассмотрим в A' максимальный идеал $\mathfrak{q}'$, порожденный элементами x, y, z; показать, что $\mathfrak{q}'$ лежит над $\mathfrak{q}$, но не существует простого идеала $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{q}'$, лежащего над $\mathfrak{p}$ (метод тот же, что и в пункте а)).

Дать геометрическую интерпретацию примеров а) и в).

¶ 14) а) Пусть A — подкольцо некоторого поля K, x — ненулевой элемент из K. Показать, что если x не является целым над A, то существует максимальный идеал в $A[x^{-1}]$, содержащий x^{-1}, и что для всякого максимального идеала $\mathfrak{m}$ в $A[x^{-1}]$, содержащего x^{-1}, идеал $A \cap \mathfrak{m}$ максимален в A (обратить внимание на то, что x не принадлежит кольцу $A[x^{-1}]$).

б) Пусть A — целостное локальное кольцо, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал, K — некоторое поле, содержащее A, и k — поле вычетов кольца A. Пусть $x \in K$ — такой элемент, что $x \notin A$ и $x^{-1} \notin A$, и предположим, что A целозамкнуто в кольце $A[x]$. Показать, что существует гомоморфизм A-алгебр $A[x] \to k[X]$, который продолжает канонический гомоморфизм $A \to k$ и который переводит x в X. (Нужно доказать, что если $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$, где $a_i \in A$ для всякого i, то все a_i принадлежат $\mathfrak{m}$. В противном случае имело бы место соотношение $a_n x^{n-p} + \ldots + a_p = -(a_{p+1}x^{-1} + \ldots + a_0 x^{-p})$, где a_p — обратимый в A элемент; воспользовавшись упражнением 5 § 1, показать, что общее значение b обеих частей этого равенства принадлежит кольцу A, и, применив а), показать, что тогда обязательно $b \in \mathfrak{m}$; получить отсюда, что x^{-1} должен быть целым над A, а это противоречит условию.)

в) В предположениях пункта б) показать, что идеал $\mathfrak{m}A[x]$ кольца $A[x]$ прост, но не максимален.

15) Пусть A — кольцо, $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A. Показать, что в кольце многочленов $B = A[X]$ идеал $\mathfrak{p}B = \mathfrak{q}$ прост; максимальный идеал локального кольца $B_{\mathfrak{q}}$ равен $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}}$; если k — поле частных кольца $A/\mathfrak{p}$, то $B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}}$ изоморфно полю рациональных дробей $k(X)$. Если A целозамкнуто, то целозамкнуто и $B_{\mathfrak{q}}$.

16) Пусть A — целостное кольцо, K — его поле частных, K' — некоторое расширение конечной степени n поля K, A' — подкольцо поля K', содержащее A, поле частных которого совпадает с K' и которое является целым над A. Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца A, B — локальное кольцо $A[X]_{\mathfrak{m}A[X]}$ (упражнение 15).

а) Подкольцо $B' = B[A']$ поля $K'(X)$ цело над B; его поле частных равно $K'(X)$ и $[K'(X) : K(X)] = n$.

б) Для любого максимального идеала $\mathfrak{m}'$ кольца A', содержащего $\mathfrak{m}$, идеал $\mathfrak{n}' = \mathfrak{m}'B'$ является максимальным в B'; если положить $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}B$, то

$$[(A'/\mathfrak{m}') : (A/\mathfrak{m})] = [(B'/\mathfrak{n}') : (B/\mathfrak{n})] \quad \text{и} \quad [(A'/\mathfrak{m}') : (A/\mathfrak{m})]_s = [(B'/\mathfrak{n}') : (B/\mathfrak{n})]_s.$$

(Заметить, что $(A'/\mathfrak{m}') \otimes_A B$ изоморфно полю $(A'/\mathfrak{m}')(X)$, и вывести отсюда, что $B'/\mathfrak{n}'$ изоморфно $(A'/\mathfrak{m}')(X)$.)

в) Отображение $\mathfrak{m}' \to \mathfrak{m}'B'$ является биективным отображением множества максимальных идеалов кольца A', содержащих $\mathfrak{m}$, на множество мак-

симальных идеалов кольца B'; обратное биективное отображение представляет собой отображение $\mathfrak{n}' \to \mathfrak{n}' \cap A'$.

¶ 17) а) Пусть K — бесконечное поле, E — сепарабельное алгебраическое расширение поля K конечной степени и g — некоторый многочлен из $K[X]$. Показать, что существует такой элемент $x \in E$, что $E = K(x)$ и что минимальный многочлен элемента x над полем K взаимно прост с многочленом g (рассуждать так же, как в предложении 12 из *Алгебры*, гл. V, § 7, n°7).

б) Пусть k — поле, A — некоторая примарная k-алгебра (гл. IV, § 2, упражнение 32) и $\mathfrak{m}$ — ее максимальный идеал. Если $A/\mathfrak{m}$ есть трансцендентное расширение поля k, то в кольце A существуют элементы, не являющиеся алгебраическими над k. Если $A/\mathfrak{m}$ — алгебраическое расширение поля k и если d — целое число, не превосходящее сепарабельную степень поля $A/\mathfrak{m}$ над k (следовательно, d может быть любым целым числом, если эта сепарабельная степень бесконечна), то показать, что в A существуют элементы, степень минимальных многочленов которых над k не меньше d. Если, кроме того, $A/\mathfrak{m}$ не является сепарабельным над k или если $\mathfrak{m} \neq 0$, то в A существует элемент, минимальный многочлен которого над k имеет степень $> d$. (Когда $A/\mathfrak{m}$ не сепарабельно над k, надо применить упражнение 5 из *Алгебры*, гл. V, § 8. Если же $A/\mathfrak{m}$ сепарабельно и имеет степень d над k, а элемент $x \in A$ таков, что его класс $\xi \in A/\mathfrak{m}$ является примитивным элементом в $A/\mathfrak{m}$, и многочлен $f \in k[X]$ — его минимальный многочлен, то показать, что $f'(\xi) \neq 0$, и вывести отсюда, что если $y \neq 0$ — какой-нибудь элемент из $\mathfrak{m}$, то $f(x+y) \neq 0$.)

в) Пусть k — бесконечное поле, A — некоторая k-алгебра, являющаяся прямым произведением r примарных алгебр A_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$, пусть $\mathfrak{m}_i$ — максимальный идеал в A_i, d_i — целое число, не превосходящее сепарабельной степени поля $A_i/\mathfrak{m}_i$ над k, если A_i алгебраично и если эта степень конечна, и являющееся произвольным целым числом в противном случае. Показать, что в A существует элемент, который либо не является алгебраическим над k, либо его минимальный многочлен над k имеет степень $\geqslant \sum_{i=1}^{r} d_i$; если, кроме того, один из идеалов $\mathfrak{m}_i$ отличен от нуля или если одно из полей $A_i/\mathfrak{m}_i$ не является сепарабельным алгебраическим расширением поля k, то в A существует элемент, который либо не является алгебраическим над k, либо его минимальный многочлен над k имеет степень $> \sum_{i=1}^{r} d_i$ (воспользоваться пунктами а) и б)).

¶ 18) Пусть A — целозамкнутое локальное кольцо, K — его поле частных, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал, $k = A/\mathfrak{m}$ — его поле вычетов. Пусть K' — алгебраическое расширение поля K конечной степени n, A' — некоторое подкольцо в K', содержащее A, целое над A и для которого K' служит полем частных, $\mathfrak{m}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ — максимальные идеалы в A'. Говорят, что идеал $\mathfrak{m}$ *неразветвлен* в A', если существует базис $(w_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ поля K' над K, образованный элементами из A' и дискриминант которого $D_{K'/K}(w_1, \ldots, w_n)$ (*Алгебра*, гл. IX, § 2) принадлежит множеству $A - \mathfrak{m}$.

а) Показать, что если идеал $\mathfrak{m}$ неразветвлен в A', то K' является сепарабельным расширением поля K, A' — целым замыканием кольца A в поле K' и представляет собой свободный A-модуль, любой базис которого над A является базисом расширения K' над K. Идеал $\mathfrak{m}A'$ представляет собой радикал кольца A' и факторкольцо $A'/\mathfrak{m}A'$ является полупростой k-алгеброй ранга n над полем k, сепарабельной над k и являющейся прямой суммой полей $A'/\mathfrak{m}_i'$.

б) Пусть d_i — сепарабельная степень поля $A'/\mathfrak{m}'_i$ над $A/\mathfrak{m}$. Показать, что если k бесконечно, то $\sum_i d_i \leqslant n$ (воспользоваться упражнением 17в)); кроме того, эквивалентны следующие условия:

α) идеал $\mathfrak{m}$ неразветвлен в A';

β) A' является A-модулем конечного типа и $A'/\mathfrak{m}A'$ является полупростой k-алгеброй, сепарабельной над k;

γ) $\sum_{i=1}^{r} d_i \geqslant n$.

(Чтобы установить, что из β) следует γ), надо заметить, что существует система образующих A-модуля A', классы которых mod $\mathfrak{m}A'$ образуют базис алгебры $A'/\mathfrak{m}A'$ над k, и воспользоваться следствием 2 предложения 4 гл. II, § 3, n° 2; вывести отсюда, что $[K' : K] \leqslant [(A'/\mathfrak{m}A') : k]$. Чтобы установить, что из γ) следует α), надо, воспользовавшись упражнением 17в), показать, что существует базис алгебры $A'/\mathfrak{m}A'$ над k, образованный степенями ξ^i некоторого элемента ξ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$; если $x \in A'$ — некоторый элемент из класса ξ, то вывести, что дискриминант $D_{K'/K}(1, x, \ldots, x^{n-1})$ принадлежит множеству $A - \mathfrak{m}$.) Привести пример, когда K' сепарабельно над K, $A'/\mathfrak{m}A' = A/\mathfrak{m}$ и A' не является A-модулем конечного типа (ср. упражнение 9в)).

в) Распространить результаты пункта б) на случай, когда k является конечным (в обозначениях упражнения 16 показать, что если $\mathfrak{n}$ неразветвлен в B', то $\mathfrak{m}$ неразветвлен в A'; приняв во внимание тот факт, что $B/\mathfrak{n}$ бесконечно, воспользоваться упражнением 16в) и получить тем самым такой элемент $z \in B'$, что

$$D_{K'(X)/K(X)}(1, z, \ldots, z^{n-1}) \in B - \mathfrak{n};$$

показать, что можно считать z многочленом из $A'[X]$, представляя предыдущий дискриминант как многочлен от X, доказать существование системы из n элементов w_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ кольца A', для которой $D_{K'/K}(w_1, \ldots, w_n) \in A - \mathfrak{m}$).

¶ 19) Пусть A — целозамкнутое кольцо, K — его поле частных, K' — алгебраическое расширение поля K конечной степени n, A' — подкольцо в K', содержащее A, целое над A и поле частных которого совпадает с K'; если $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A, то через $A'_{\mathfrak{p}}$ обозначается кольцо частных кольца A', знаменатели которого лежат в системе $A - \mathfrak{p}$. Говорят, что $\mathfrak{p}$ *неразветвлен* в A', если идеал $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ неразветвлен в $A'_{\mathfrak{p}}$.

а) Пусть $\mathfrak{p}'_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ — простые идеалы кольца A', лежащие над $\mathfrak{p}$. Пусть d_i — сепарабельная степень поля частных кольца $A'/\mathfrak{p}'_i$ над полем частных кольца $A/\mathfrak{p}$; показать, что $\sum_{i=1}^{r} d_i \leqslant n$. (Свести к упражнению 18.)

б) Следующие условия эквивалентны:

α) идеал $\mathfrak{p}$ неразветвлен в кольце A';

β) кольцо A' содержит некоторый базис поля K' над K, дискриминант которого принадлежит $A - \mathfrak{p}$;

γ) имеет место равенство $\sum_{i=1}^{r} d_i = n$.

В частности, если $r = n$, то идеал $\mathfrak{p}$ неразветвлен в A'.

Привести пример, когда $\mathfrak{p}$ неразветвлен в A', но само A не является A-модулем конечного типа (ср. с упражнением 9а)).

в) Говорят, что кольцо A *неразветвлено* в A' (или в поле K'), если любой простой идеал из A неразветвлён в A'. Показать, что тогда A' является *строго плоским* A-модулем (гл. II, § 3, n° 4, следствие предложения 15). Пусть K'' — алгебраическое расширение поля K' конечной степени n; пусть A' — целое замыкание кольца A в K'; A'' — целое замыкание кольца A' в K''; для того чтобы A было неразветвлено в A'', необходимо и достаточно, чтобы A было неразветвлено в A' и чтобы A' было неразветвлено в A''.

г) Пусть k — поле, A — целозамкнутая k-алгебра и K — ее поле частных. Пусть k' — сепарабельное алгебраическое расширение поля k конечной степени n над k. Показать, что если $k' \otimes_k K$ является полем, то A неразветвлено в $k' \otimes_k K$ (рассмотреть примитивный элемент x поля k' над k и базис поля $k' \otimes_k K$ над K, образованный степенями x^i для $0 \leqslant i \leqslant n-1$).

20) Пусть A — целостное кольцо, определенное в гл. III, § 3, упражнение 15б), C — локальное кольцо $A_{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ — максимальный идеал кольца C, L — поле частных кольца A и кольца C. Если x, y — канонические образы элементов X и Y в C, то показать, что $t = y/x$ не принадлежит C, но $t^2 \in C$, так что C не является целозамкнутым. Кроме того, $C' = C[Z]$ есть целое замыкание кольца C и оно изоморфно кольцу $S^{-1}K[T]$ (T — переменное), где S — мультипликативная система кольца $K[T]$, образованная многочленами, которые не делятся ни на $T-1$, ни на $T+1$. Показать, что C' является C-модулем конечного типа и что идеалами (максимальными) в C', лежащими над $\mathfrak{n}$, являются главные идеалы $\mathfrak{q}_1 = (t-1)C'$ и $\mathfrak{q}_2 = (t+1)C'$, однако локальные кольца $C'_{\mathfrak{q}_1}$ и $C'_{\mathfrak{q}_2}$ не являются целыми C-алгебрами.

21) Пусть A — целозамкнутое кольцо, содержащее поле $\mathbf{Q}$, K — его поле частных, L — некоторое алгебраическое расширение поля K, B — относительное целое замыкание кольца A в L. Показать, что для любого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A имеет место равенство $A \cap \mathfrak{a}B = \mathfrak{a}$.

¶ 22) Пусть A — целостное нётерово кольцо, K — его поле частных, A' — подкольцо в K, содержащее A. Предположим, что A целозамкнуто в A' и что для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A существует простой идеал $\mathfrak{p}'$ в A', лежащий над $\mathfrak{p}$. Тогда $A' = A$. (Рассуждать от противного: пусть $x \in A' \cap \complement A$, и пусть $\mathfrak{a} = A \cap (x^{-1}A)$; $\mathfrak{a}$ есть идеал, отличный от A. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал, ассоциированный с $A/\mathfrak{a}$; кондуктор $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} : \mathfrak{p}$ в этом случае отличен от $\mathfrak{a}$ (гл. IV, § 1, n° 4, предложение 9) и, следовательно, существует такой элемент $y \in \mathfrak{b}$, что $xy \notin A$ и $xy\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}A' \cap A = \mathfrak{p}$; получить отсюда противоречие.)

§ 3. Алгебры конечного типа над полем

1. Лемма о нормализации

В этом и следующем пунктах через k обозначается некоторое поле.

Теорема 1 (лемма о нормализации). *Пусть A — некоторая k-алгебра конечного типа и $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{a}_p$ — конечная возрастающая последовательность идеалов кольца A, для которой $p \geqslant 1$ и $\mathfrak{a}_p \neq A$. Тогда существует конечная последовательность $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ элементов кольца A, алгебраически независимых над k* (гл. III, § 1, n° 1) *и таких, что:*

а) *кольцо A целое над кольцом $B = k[x_1, \ldots, x_n]$;*

б) *для любого* j, *удовлетворяющего неравенствам* $1 \leqslant j \leqslant p$, *существует такая возрастающая последовательность* $h(j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ *целых чисел, что для всякого* j *идеал* $\mathfrak{a}_j \cap B$ *кольца* B *порождается элементами* $x_1, \ldots, x_{h(j)}$.

Прежде всего заметим, что достаточно доказать теорему для случая, *когда кольцо* A *является алгеброй многочленов* $k[Y_1, \ldots, Y_m]$. Действительно, в общем случае A изоморфно факторалгебре такой алгебры A' по некоторому идеалу $\mathfrak{a}'_0$; обозначим через $\mathfrak{a}'_j$ прообраз идеала $\mathfrak{a}_j$ в A' и предположим, что элементы x'_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ кольца A' удовлетворяют условиям, перечисленным в формулировке теоремы, но для случая кольца A' и возрастающей последовательности идеалов $\mathfrak{a}'_0 \subset \mathfrak{a}'_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{a}'_p$. Тогда образы x_i элементов x'_i в кольце A для $i > h(0)$ удовлетворяют требуемым условиям; это очевидно для условия б), а для условия а) это вытекает из предложения 2 § 1, n° 1; наконец, если бы x_i $(h(0)+1 \leqslant i \leqslant r)$ не были алгебраически независимыми над k, то существовал бы многочлен $Q \in k[X_{h(0)+1}, \ldots, X_r]$, отличный от нуля и такой, что $Q(x'_{h(0)+1}, \ldots, x'_r) \in \mathfrak{a}'_0 \cap B$, если считать, что $B' = k[x'_1, \ldots, x'_r]$; но по условию любой элемент из $\mathfrak{a}'_0 \cap B'$ может быть записан единственным образом как многочлен от x'_j $(1 \leqslant j \leqslant r)$ с коэффициентами в k, причем каждый одночлен-слагаемое этого многочлена содержит по крайней мере один из элементов x'_j для $1 \leqslant j \leqslant h(0)$; мы приходим к противоречию, что и требовалось для завершения доказательства.

Будем, следовательно, на протяжении всего доказательства предполагать, что $A = k[Y_1, \ldots, Y_m]$, и рассуждать индукцией по p.

А) $p = 1$. Рассмотрим два случая:

А1) *Идеал* $\mathfrak{a}_1$ *является главным и порождается некоторым элементом* $x_1 \notin k$.

В этом случае $x_1 = P(Y_1, \ldots, Y_m)$, где P — некоторый многочлен, отличный от константы. Мы сейчас увидим, что при подходящем подборе целых чисел $r_i > 0$ кольцо A оказывается *целым над* $B = k[x_1, x_2, \ldots, x_m]$, где

$$x_i = Y_i - Y_1^{r_i} \qquad (2 \leqslant i \leqslant m). \tag{1}$$

Для этого достаточно выбрать r_i так, чтобы элемент Y_1 был *целым над* B (§ 1, n° 1, предложение 4). Но имеет место соотношение

$$P\left(Y_1, x_2 + Y_1^{r_2}, \ldots, x_m + Y_1^{r_m}\right) - x_1 = 0. \tag{2}$$

Пусть $P = \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} Y^{\mathbf{p}}$, где $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, p_i — целые неотрицательные числа, $Y^{\mathbf{p}} = Y_1^{p_1} \ldots Y_m^{p_m}$, $a_{\mathbf{p}}$ — некоторые ненулевые элементы из k и по крайней мере один из индексов $\mathbf{p}$ отличен от $(0, \ldots, 0)$; соотношение (2) расписывается так:

$$\sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} Y_1^{p_1} \left(x_2 + Y_1^{r_2}\right)^{p_2} \ldots \left(x_m + Y_1^{r_m}\right)^{p_m} - x_1 = 0. \tag{3}$$

Положим $f(\mathbf{p}) = p_1 + r_2 p_2 + \ldots + r_m p_m$ и допустим, что r_i выбраны так, что все числа $f(\mathbf{p})$ различны (достаточно взять, например, $r_i = h^i$, где h — некоторое целое число, строго большее, чем все p_j (*Теория множеств*, гл. III, § 5, n° 7, предложение 8)). Тогда существует, и притом единственная, система $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, такая, что число $f(\mathbf{p})$ максимально; соотношение (3) расписывается теперь так:

$$a_{\mathbf{p}} Y_1^{f(\mathbf{p})} + \sum_{j < f(\mathbf{p})} Q_j(x_1, \ldots, x_m) Y_1^j = 0, \tag{4}$$

где Q_j — многочлены из $k[Y_1, \ldots, Y_m]$; поскольку элемент $a_{\mathbf{p}} \neq 0$ обратим в k, соотношение (4) представляет собой уравнение целой зависимости с коэффициентами в B, откуда следует утверждение.

Поле частных $k(Y_1, \ldots, Y_m)$ кольца A является, следовательно, алгебраическим над полем частных $k(x_1, \ldots, x_m)$ кольца B, откуда получается (*Алгебра*, гл. V, § 5, n° 3, теорема 4), что x_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ алгебраически независимы. Кроме того, $\mathfrak{a}_1 \cap B = Bx_1$; действительно, любой элемент $z \in \mathfrak{a}_1 \cap B$ записывается в виде $z = x_1 z'$, где $z' \in A \cap k(x_1, \ldots, x_m)$; но $A \cap k(x_1, \ldots, x_m) = k[x_1, \ldots, x_m] = B$, так как кольцо B целозамкнуто (§ 1, n° 3, следствие 2 предложения 13); следовательно, $z' \in B$, что и доказывает свойства а) и б) в рассматриваемом случае.

А2) *Общий случай* $(p = 1)$.

Проведем индукцию по m; случай $m = 0$ тривиален. Очевидно, что можно предположить, что $\mathfrak{a}_1 \neq 0$ (в противном случае можно положить $x_i = Y_i$ для $1 \leqslant i \leqslant m$ и $h(1) = 0$). Пусть x_1 — ненулевой элемент из $\mathfrak{a}_1$; в силу случая А1), существуют такие $t_2, \ldots, t_m$, что элементы $x_1, t_2, \ldots, t_m$ алгебраически независимы над k, кольцо A — целое над $C = k[x_1, t_2, \ldots, t_m]$ и $x_1 A \cap C = x_1 C$. В силу предположения индукции, существуют такие элементы $x_2, \ldots, x_m$ кольца $k[t_2, \ldots, t_m]$ и такое целое число h, что кольцо $k[t_2, \ldots, t_m]$ является целым над $B' = k[x_2, \ldots, x_m]$, $x_2, \ldots, x_m$ алгебраически независимы над k, а идеал $\mathfrak{a}_1 \cap B'$ порождается набором $x_2, \ldots, x_h$. Тогда C является целым над $B = k[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ (§ 1, n° 1, следствие предложения 5), а потому то же верно и для A (§ 1, n° 1, предло-

жение 6); рассуждение, аналогичное проведенному в случае A1), показывает, что элементы $x_1, \ldots, x_m$ алгебраически независимы над k; наконец, поскольку $x_1 \in \mathfrak{a}$ и $B = B'[x_1]$, имеют место равенства $\mathfrak{a}_1 \cap B = Bx_1 + (\mathfrak{a}_1 + B')$, и поскольку $\mathfrak{a}_1 \cap B'$ порождается (в кольце B') элементами $x_2, \ldots, x_h$, идеал $\mathfrak{a}_1 \cap B$ порождается (в кольце B) элементами $x_1, x_2, \ldots, x_h$.

Б) *Переход от $p-1$ к p.*

Пусть $t_1, \ldots, t_m$ — элементы кольца A, удовлетворяющие условиям теоремы применительно к возрастающей последовательности идеалов $\mathfrak{a}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{a}_{p-1}$; положим $r = h(p-1)$. В силу A2), существуют такие элементы $x_{r+1}, \ldots, x_m$ кольца $k[t_{r+1}, \ldots, t_m]$ и такое целое число s, что кольцо

$$C = k[t_{r+1}, \ldots, t_m]$$

является целым над $B' = k[x_{r+1}, \ldots, x_m]$, $x_{r+1}, \ldots, x_m$ алгебраически независимы над k и идеал $\mathfrak{a}_p \cap B'$ порождается набором $x_{r+1}, \ldots, x_s$. Положив $x_i = t_i$ для $i \leqslant r$, мы получаем семейство $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$, удовлетворяющее требуемым условиям при $h(p) = s$. Действительно, A цело над $C[t_1, \ldots, t_r] = C[x_1, \ldots, x_r]$ и, следовательно, над $B = k[x_1, \ldots, x_m] = B'[x_1, \ldots, x_r]$, так как C является целым над кольцом B' (§ 1, п° 1, следствие предложения 5 и предложение 6); так же, как в случае A1), доказывается, что элементы x_i алгебраически независимы над k. С другой стороны, при $j \leqslant p-1$ идеал

$$\mathfrak{a}_j \cap k[x_1, \ldots, x_r, t_{r+1}, \ldots, t_m]$$

является по условию множеством многочленов от $x_1, \ldots, x_r, t_{r+1}, \ldots, t_m$, все одночлены которых содержат один из элементов $x_1, \ldots, x_{h(j)}$; так как $x_{r+1}, \ldots, x_m$ являются многочленами от $t_{r+1}, \ldots, t_m$ с коэффициентами в k, мы видим, что некоторый многочлен от $x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_m$ (с коэффициентами из k) может принадлежать идеалу $\mathfrak{a}_j$ только в том случае, если все его одночлены содержат один из элементов $x_1, \ldots, x_{h(j)}$. Наконец, поскольку $x_1, \ldots, x_r$ принадлежат $\mathfrak{a}_{p-1}$ и, следовательно, идеалу $\mathfrak{a}_p$, идеал $\mathfrak{a}_p \cap B'[x_1, \ldots, x_r]$ образован многочленами от $x_1, \ldots, x_r$ с коэффициентами из B', свободные члены которых принадлежат $\mathfrak{a}_p \cap B'$; следовательно, этот идеал порожден элементами $x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_m$.

Следствие 1. *Пусть A — целостное кольцо, B — некоторая A-алгебра конечного типа, содержащая A в качестве подкольца. Тогда существует такой элемент $s \neq 0$ кольца A и такая подалгебра B' кольца B, изоморфная алгебре многочленов $A[Y_1, \ldots, Y_n]$, что кольцо $B[s^{-1}]$* (гл. II, § 2, п° 1) *является целым над $B'[s^{-1}]$.*

Положим $S = A - \{0\}$, и пусть $k = S^{-1}A$ — поле частных кольца A; ясно, что $S^{-1}B$ является k-алгеброй конечного типа и, поскольку она, по условию, содержит k (гл. II, § 2, n° 4, теорема 1), она не сводится к нулю. В силу теоремы 1 (применительно к случаю $p = 1$ и $a_1 = 0$), существует, следовательно, некоторая конечная последовательность $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ элементов кольца $S^{-1}B$, алгебраически независимых над k и таких, что $S^{-1}B$ является целым над $k[x_1, \ldots, x_n]$. Пусть $(z_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ — какая-нибудь система образующих A-алгебры B; в кольце $S^{-1}B$ каждый из элементов $z_j/1$ удовлетворяет некоторому уравнению целой зависимости

$$(z_j/1)^{q_j} + \sum_{h < q_j} P_{hj}(x_1, \ldots, x_n)(z_j/1)^h = 0, \tag{5}$$

где P_{hj} — многочлены от x_i с коэффициентами в k. Существует такой элемент $s \neq 0$ кольца A, что можно записать $x_i = y_i/s$, где $y_i \in B$, для $1 \leqslant i \leqslant n$, а все коэффициенты многочленов P_{hj} имеют вид c/s, где $c \in A$; наконец, заменяя при необходимости s на произведение элементов из S, можно предположить, что в кольце B имеет место соотношение

$$sz_j^{q_j} + \sum_{h < q_j} Q_{hj} z_j^h = 0, \tag{6}$$

где Q_{hj} — многочлены от $y_1, \ldots, y_n$ с коэффициентами в A; если положить $z'_j = sz_j$, то станет ясно, что при домножении (6) на $s^{q_j - 1}$ элемент z'_j оказывается целым над $B' = A[y_1, \ldots, y_n]$. Покажем, что элементы y_i алгебраически независимы над A; действительно, если выполняется соотношение вида $\sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} y_1^{p_1} \ldots y_n^{p_n} = 0$ при $a_{\mathbf{p}} \in A$ для любого $\mathbf{p}$, то из него получается, что $\sum_{\mathbf{p}} a'_{\mathbf{p}} x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n} = 0$ в кольце $S^{-1}B$, где $a'_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}} s^{p_1 + \cdots + p_n}$ в k; по условию, в силу сказанного, $a'_{\mathbf{p}} = 0$ при любом $\mathbf{p}$, откуда $a_{\mathbf{p}} = 0$ для любого $\mathbf{p}$. Кроме того, в кольце $B[s^{-1}]$ каждый элемент $z'_j/1$ является целым над $B'[s^{-1}]$ (§ 1, n° 1, предложение 2); поскольку $z_j/1 = (z'_j/1)(1/s)$ в $B[s^{-1}]$, мы видим, что элементы $z_j/1$ являются целыми над $B'[s^{-1}]$; это завершает доказательство (§ 1, n° 1, предложение 4).

Следствие 2. *Пусть K — поле, A — некоторое подкольцо в K и L — поле частных кольца A. Если K является A-алгеброй конечного типа, то степень $[K : L]$ конечна и в кольце A существует такой элемент $a \neq 0$, что $L = A[a^{-1}]$.*

Действительно, из следствия 1 вытекает, что существуют такие элементы $x_1, \ldots, x_n$ поля K и такой элемент $a \neq 0$ кольца A, что элементы $x_1, \ldots, x_n$ алгебраически независимы над A (и, следовательно, над L) и кольцо K цело над подкольцом $A[x_1, \ldots, x_n, a^{-1}]$. Следовательно, из леммы 2 § 2, n° 1, получается, что кольцо $A[x_1, \ldots, x_n, a^{-1}]$ является полем. Но единственными обратимыми элементами кольца многочленов $C[Y_1, \ldots, Y_n]$ над целостным кольцом C являются элементы самого кольца C; применяя это замечание к случаю $C = A[a^{-1}]$, мы видим, что обязательно должно выполняться равенство $n = 0$ и что кольцо $A[a^{-1}]$ является полем, равным полю L в силу определения этого последнего. Поскольку K цело над L и является L-алгеброй конечного типа, степень $[K : L]$ конечна (§ 1, n° 1, предложение 4).

Следствие 3. *Пусть A — целостное кольцо, B — некоторая A-алгебра конечного типа, b — некоторый элемент кольца B, для которого $zb^n \neq 0$ при любом $z \neq 0$ из A и любом целом $n > 0$. Пусть ρ: $A \to B$ — канонический гомоморфизм. Тогда существует такой элемент $a \neq 0$ в кольце A, что для любого гомоморфизма f кольца A в некоторое алгебраически замкнутое поле L, при котором $f(a) \neq 0$, существует гомоморфизм g кольца B в L, при котором $g(b) \neq 0$ и $f = g \circ \rho$.*

Из предположения об элементе b следует, что если h — канонический гомоморфизм $x \to x/1$ кольца B в $B[b^{-1}]$, то гомоморфизм $h \circ \rho$ кольца A в кольцо $B[b^{-1}]$ инъективен. Поэтому, в силу следствия 1, существует такой элемент $a \neq 0$ в A и такое подкольцо B' в $B[b^{-1}]$, что кольцо $B[b^{-1}, a^{-1}]$ является целым над $B'[a^{-1}]$, а B' изоморфно алгебре многочленов $A[Y_1, \ldots, Y_n]$. Пусть f — гомоморфизм кольца A в некоторое алгебраически замкнутое поле L, при котором $f(a) \neq 0$; поскольку существует гомоморфизм кольца $A[Y_1, \ldots, Y_n]$ в поле L, продолжающий f, существует гомоморфизм f' кольца B' в L, продолжающий f. Так как $f'(a) \neq 0$ в поле L, существует такой гомоморфизм f'' кольца $B'[a^{-1}]$ в L, что

$$f''(x/a^n) = f'(x) \cdot (f(a))^{-n}$$

для любого $x \in B'$ и любого $n > 0$ (гл. II, § 2, n° 1, предложение 1). Наконец, в силу того что кольцо $B[b^{-1}, a^{-1}]$ целое над $B'[a^{-1}]$, существует некоторый гомоморфизм f''' кольца $B[b^{-1}, a^{-1}]$ в L, продолжающий f'' (§ 2, n° 1, следствие 4 теоремы 1). Если j: $x \to x/1$ — канонический гомоморфизм кольца B в $B[b^{-1}, a^{-1}]$, то отображение $g = f''' \circ j$ удовлетворяет поставленным требованиям, ибо $j(b)$ — обратимый элемент в $B[b^{-1}, a^{-1}]$ и, следовательно, $f'''(j(b)) \neq 0$ в L.

Отметим, что если в следствии 3 предположить, что кольцо B целостное и $A \subset B$, то предположение, сделанное относительно элемента b, эквивалентно тому, что $b \neq 0$.

2. *Целое замыкание алгебры конечного типа над полем*

Теорема 2. *Пусть A — целостная k-алгебра конечного типа, K — ее поле частных, A' — целое замыкание кольца A в поле K', являющемся алгебраическим расширением конечной степени поля K. Тогда A' представляет собой A-модуль конечного типа и k-алгебру конечного типа.*

Согласно теореме 1, существует подалгебра C в A, изоморфная алгебре многочленов $k[X_1, \ldots, X_n]$ и такая, что алгебра A — целая над C; кольцо A' является, очевидно, целым замыканием кольца C в поле K' (§ 1, n° 1, предложение 6); следовательно, можно ограничиться случаем $A = k[X_1, \ldots, X_n]$. Пусть N — расширение типа Галуа поля K' (в некотором алгебраическом замыкании поля K'), порожденное полем K'; оно представляет собой алгебраическое расширение конечной степени поля K (*Алгебра*, гл. V, § 6, n° 3, следствие 1 предложения 9). Достаточно доказать, что целое замыкание B кольца A в поле N является A-модулем конечного типа, так как A' представляет собой A-подмодуль кольца B и A — нётерово кольцо (гл. III, § 2, n° 10, следствие 2 теоремы 2). Значит, можно ограничиться случаем, когда K' — *расширение типа Галуа* поля K. В этом случае известно (*Алгебра*, гл. V, § 10, n° 9, предложение 14), что K' является *расширением Галуа* (конечной степени) некоторого *радикального расширения* K'' (конечной степени) поля K. Если A'' — целое замыкание кольца A в K'', то A' — целое замыкание кольца A'' в поле K' и достаточно доказать, что A'' является A-модулем конечного типа, а A' является A''-модулем конечного типа. Однако, если уже доказано, что A'' является A-модулем конечного типа, то это кольцо оказывается нётеровым и целозамкнутым по определению; тот факт, что A' есть A''-модуль конечного типа, будет вытекать из следствия 1 предложения 18 § 1, n° 6.

Следовательно, мы видим, что можно ограничиться случаем $A = k[X_1, \ldots, X_n]$, считая K' *радикальным* расширением конечной степени поля $K = k(X_1, \ldots, X_n)$. Тогда K' порождено некоторым конечным семейством $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ и существует такая степень q характеристической экспоненты поля k, что $y_i^q \in k(X_1, \ldots, X_n)$. Пусть $c_j\,(1 \leqslant j \leqslant r)$ — коэффициенты числителей и знаменателей тех рациональных дробей от переменных $X_1, \ldots, X_n$, которые равны элементам y_i^q $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Тогда K'

содержится в расширении $L = k'\left(X_1^{q^{-1}}, \ldots, X_n^{q^{-1}}\right)$, где $k' = k\left(c_1^{q^{-1}}, \ldots, c_r^{q^{-1}}\right)$ (все происходит в некотором алгебраическом замыкании поля K') и A' содержится в целом замыкании B' кольца A в поле L'. Но k' алгебраично над k; следовательно, $C' = k'[X_1, \ldots, X_n]$ является целым над A (§ 1, n° 1, предложение 5); так как $k'\left[X_1^{q^{-1}}, \ldots, X_n^{q^{-1}}\right]$ целозамкнуто (§ 1, n° 3, следствие 2 предложения 13), то это кольцо представляет собой целое замыкание кольца C' в поле L'; следовательно, оно же будет и целым замыканием кольца A в поле L' (§ 1, n° 1, предложение 6); другими словами, $B' = k'\left[X_1^{q^{-1}}, \ldots, X_n^{q^{-1}}\right]$. Но очевидно, что B' является C'-модулем конечного типа (§ 1, n° 1, предложение 4), и так как k' — расширение конечной степени поля k, C' является A-модулем конечного типа; следовательно, B' является A-модулем конечного типа; так как A нётерово и $A' \subset B'$, то A' представляет собой A-модуль конечного типа.

3. Теорема о нулях

Предложение 1. *Пусть A — некоторая алгебра конечного типа над полем k и L — алгебраическое замыкание поля k.*

(i) *Если $A \neq \{0\}$, то существует некоторый k-гомоморфизм алгебры A в поле L.*

(ii) *Пусть f_1, f_2 — два k-гомоморфизма из A в L. Для того чтобы f_1 и f_2 имели одно и то же ядро, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой k-автоморфизм s поля L, что $f_2 = s \circ f_1$.*

(iii) *Пусть $\mathfrak{a}$ — какой-нибудь идеал кольца A. Для того чтобы идеал $\mathfrak{a}$ был максимальным, необходимо и достаточно, чтобы он служил ядром некоторого k-гомоморфизма кольца A в поле L.*

(iv) *Для того чтобы некоторый элемент x кольца A удовлетворял равенству $f(x) = 0$ при любом k-гомоморфизме f кольца A в поле L, необходимо и достаточно, чтобы элемент x был нильпотентным.*

Утверждение (i) вытекает из следствия 3 теоремы 1 n° 1, примененного к случаю, когда A заменено на k, b — на единичный элемент из B и f — на каноническое вложение поля k в расширение L.

Если f — некоторый k-гомоморфизм кольца A в L, то $f(A)$ является подкольцом в L, содержащим k; поскольку L — алгебраическое расширение поля k, то $f(A)$ — поле (*Алгебра*, гл. V, § 3, n° 2, предложение 3), и если $\mathfrak{a}$ — ядро гомоморфизма f, то $A/\mathfrak{a}$ изоморфно $f(A)$ и, следовательно, является полем; это

означает, что идеал $\mathfrak{a}$ максимален. Обратно, если $\mathfrak{a}$ — максимальный идеал кольца A, то из (i) следует, что существует некоторый k-гомоморфизм из $A/\mathfrak{a}$ в L, а потому и k-гомоморфизм из A в L, ядро $\mathfrak{b}$ которого содержит $\mathfrak{a}$; но так как $\mathfrak{a}$ — максимальный идеал, $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$. Этим доказано (iii).

Докажем (ii). Если s — некоторый k-автоморфизм поля L, при котором $f_2 = s \circ f_1$, то ясно, что гомоморфизмы f_1 и f_2 имеют одно и то же ядро. Обратно, предположим, что f_1 и f_2 имеют одно и то же ядро. Тогда существует такой k-изоморфизм s_0 поля $f_1(A)$ на поле $f_2(A)$, что $f_2 = s_0 \circ f_1$; но в силу предложения 7 из *Алгебры*, гл. V, § 6, n° 3, отображение s_0 продолжается до некоторого k-автоморфизма s расширения L и, следовательно, $f_2 = s \circ f_1$.

Наконец, если $x \in A$ — такой элемент, что $x^n = 0$, то при любом k-гомоморфизме f кольца A в поле L имеет место равенство $(f(x))^n = f(x^n) = 0$; следовательно, $f(x) = 0$, так как L — поле. Обратно, пусть элемент $x \in A$ не нильпотентен. Тогда $A[x^{-1}]$ является A-алгеброй конечного типа (и, следовательно, k-алгеброй конечного типа), не равной нулю (гл. II, § 2, n° 1, замечание 3); следовательно, в силу (i), существует k-гомоморфизм g кольца $A[x^{-1}]$ в L. Если j: $A \to A[x^{-1}]$ — канонический гомоморфизм, то $f = g \circ j$ является k-гомоморфизмом из A в L, и $f(x)\,g(1/x) = g(x/1)\,g(1/x) = g(1) = 1$, откуда $f(x) \neq 0$.

Пусть k — поле и L — некоторое надполе k; говорят, что некоторый элемент $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ из L^n является *нулем в* L^n *некоторого идеала* $\mathfrak{r}$ *кольца многочленов* $k[X_1, \ldots, X_n]$, если

$$P(\mathbf{x}) = P(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

при любом $P \in \mathfrak{r}$.

Лемма 1. *Пусть* A — *алгебра конечного типа над полем* k, $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — *некоторая система образующих этой алгебры*, $\mathfrak{r}$ — *идеал алгебраических соотношений между элементами* a_i *с коэффициентами в* k (*Алгебра*, гл. IV, § 2, n° 1). *Тогда для любого надполя* L *поля* k *отображение* $f \to (f(a_i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *является биективным отображением множества* k-*гомоморфизмов из* A *в* L *на множество нулей идеала* $\mathfrak{r}$ *в модуле* L^n.

Существует гомоморфизм k-алгебр h алгебры $k[X_1, \ldots, X_n]$ на A, и притом единственный, для которого $h(X_i) = a_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n$, и идеал $\mathfrak{r}$ по определению служит ядром гомоморфизма h. Отображение $f \to f \circ h$ является биективным отображением множества k-гомоморфизмов кольца A в поле L на множество k-гомоморфизмов кольца $k[X_1, \ldots, X_n]$ в поле L, равных нулю на $\mathfrak{r}$. Для любого многочлена $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$ и любого элемента $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in L^n$ положим $h_{\mathbf{x}}(P) = P(\mathbf{x})$;

тогда отображение $\mathbf{x} \to h_{\mathbf{x}}$ будет биективным отображением модуля L^n на множество k-гомоморфизмов кольца $k[X_1, \ldots, X_n]$ в поле L (каждый такой гомоморфизм определяется своими значениями на X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; утверждение, что $h_{\mathbf{x}}$ равно нулю на $\mathfrak{r}$, означает, что $\mathbf{x}$ является нулем идеала $\mathfrak{r}$ в L^n, откуда следует лемма.

Если применить предложение 1 к алгебре $A = k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{r}$, где $\mathfrak{r}$ — идеал в $k[X_1, \ldots, X_n]$, отличный от всего кольца, то, в силу леммы 1, получится следующий результат:

Предложение 2 (теорема Гильберта о нулях). *Пусть k — поле и L — некоторое алгебраическое замыкание поля k.*

(i) *Любой идеал $\mathfrak{r}$ кольца $k[X_1, \ldots, X_n]$, не содержащий единицы, обладает по крайней мере одним нулем в L^n.*

(ii) *Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ — два элемента из L^n; для того чтобы множество многочленов из $k[X_1, \ldots, X_n]$, равных нулю на $\mathbf{x}$, совпадало с множеством многочленов из $k[X_1, \ldots, X_n]$, равных нулю на $\mathbf{y}$, необходимо и достаточно, чтобы существовал k-автоморфизм s поля L, при котором $y_i = s(x_i)$ для $1 \leqslant i \leqslant n$.*

(iii) *Для того чтобы идеал $\mathfrak{a}$ кольца $k[X_1, \ldots, X_n]$ был максимальным, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой элемент $\mathbf{x}$ в L^n, что идеал $\mathfrak{a}$ совпадает с множеством многочленов из $k[X_1, \ldots, X_n]$, равных нулю на $\mathbf{x}$.*

(iv) *Для того чтобы некоторый многочлен Q кольца $k[X_1, \ldots, X_n]$ был равен нулю на множестве нулей в L^n некоторого идеала $\mathfrak{r}$ кольца $k[X_1, \ldots, X_n]$, необходимо и достаточно, чтобы $Q^m \in \mathfrak{r}$ для некоторого целого числа $m > 0$.*

4. Кольца Джекобсона

Определение 1. *Кольцо A называется кольцом Джекобсона, если любой простой идеал кольца A является пересечением некоторого семейства максимальных идеалов.*

Примеры. 1) Любое поле является кольцом Джекобсона.

2) Кольцо целых чисел $\mathbf{Z}$ является кольцом Джекобсона, единственным простым немаксимальным идеалом которого служит (0), являющийся пересечением максимальных идеалов (p) кольца $\mathbf{Z}$, где p пробегает множество простых чисел (ср. предложение 4).

3) Пусть A — кольцо Джекобсона и $\mathfrak{a}$ — идеал в нем. Тогда $A/\mathfrak{a}$ является кольцом Джекобсона, потому что идеалы кольца $A/\mathfrak{a}$ имеют вид $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$, где $\mathfrak{b}$ — идеал в A, содержащий $\mathfrak{a}$; идеал $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ прост (соответственно максимален) тогда и только тогда, когда соответствующим свойством обладает $\mathfrak{b}$.

Предложение 3. *Для того чтобы кольцо A было кольцом Джекобсона, необходимо и достаточно, чтобы для любого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A радикал кольца $A/\mathfrak{a}$ был равен его нильрадикалу* (гл. II, § 2, n° 6).

Радикал (соответственно нильрадикал) кольца $A/\mathfrak{a}$ равен пересечению максимальных (соответственно простых) идеалов кольца $A/\mathfrak{a}$ (*Алгебра*, гл. VIII, § 6, n° 3, определение 3, и *Коммутативная алгебра*, гл. II, § 2, n° 6, предложение 13). Сформулированное условие означает, следовательно, что для любого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A пересечение простых идеалов, содержащих $\mathfrak{a}$, равно пересечению максимальных идеалов, содержащих $\mathfrak{a}$. Это условие, очевидно, выполняется для любого идеала $\mathfrak{a}$ в A, если A — кольцо Джекобсона; обратно, если это условие выполнено для любого простого идеала кольца A, то A — кольцо Джекобсона по определению.

Следствие. *Пусть A — кольцо Джекобсона; для любого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A корень идеала $\mathfrak{a}$ является пересечением максимальных идеалов, содержащих $\mathfrak{a}$.*

Достаточно заметить, что $A/\mathfrak{a}$ является кольцом Джекобсона.

Предложение 4. *Пусть A — кольцо главных идеалов, $(p_\lambda)_{\lambda\in L}$ — система представителей экстремальных элементов кольца A* (*Алгебра*, гл. VII, § 1, n° 3, определение 2). *Для того чтобы A было кольцом Джекобсона, необходимо и достаточно, чтобы множество L было бесконечным.*

Действительно, максимальные идеалы кольца A — это идеалы Ap_λ (loc. cit., n° 2, предложение 2). Если множество L конечно, то соответствующее пересечение есть идеал Ax, где $x = \prod_{\lambda\in L} p_\lambda$ (loc. cit.); следовательно, этот идеал отличен от (0). Напротив, если L бесконечно, пересечение идеалов Ap_λ равно (0), так как каждый ненулевой элемент из A делится лишь на конечное число экстремальных элементов (loc. cit., n° 3, теорема 2). Теперь предложение вытекает из того, что (0) является единственным немаксимальным простым идеалом в A (*Алгебра*, гл. VI, § 1, n° 13, предложение 14 (ДЕЛ)).

Предложение 5. *Пусть A — кольцо, B — некоторая A-алгебра, целая над A. Если A — кольцо Джекобсона, то и B — кольцо Джекобсона.*

Заменив A на его канонический образ в кольце B, можно предполагать, что $A \subset B$. Пусть $\mathfrak{p}'$ — простой идеал в B и $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{p}'$. Существует, согласно условию, семейство $(m_\lambda)_{\lambda\in L}$

максимальных идеалов кольца A, пересечение которого равно $\mathfrak{p}$. Для любого $\lambda \in L$ существует максимальный идеал $\mathfrak{m}'_\lambda$ в B, лежащий над $\mathfrak{m}_\lambda$ и содержащий $\mathfrak{p}'$ (§ 2, n° 1, предложение 1 и следствие 2 теоремы 1). Если положить $\mathfrak{q}' = \bigcap_{\lambda \in L} \mathfrak{m}'_\lambda$, то, следовательно, окажется, что $\mathfrak{q}' \cap A = \bigcap_{\lambda \in L} \mathfrak{m}_\lambda = \mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}' \supset \mathfrak{p}'$, откуда $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}'$ (§ 2, n° 1, следствие 1 предложения 1).

Теорема 3. *Пусть A — кольцо Джекобсона, B — некоторая A-алгебра конечного типа и $\rho\colon A \to B$ — канонический гомоморфизм. Тогда*

(i) *кольцо B является кольцом Джекобсона;*

(ii) *для любого максимального идеала $\mathfrak{m}'$ кольца B прообраз $\mathfrak{m} = \rho^{-1}(\mathfrak{m}')$ является максимальным идеалом кольца A и $B/\mathfrak{m}'$ является алгебраическим расширением конечной степени поля $A/\mathfrak{m}$.*

Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца B и $\mathfrak{p} = \rho^{-1}(\mathfrak{p}')$. Пусть v — ненулевой элемент из $B/\mathfrak{p}'$. Так как $B/\mathfrak{p}'$ является целостной $(A/\mathfrak{p})$-алгеброй конечного типа и канонический гомоморфизм $\varphi\colon A/\mathfrak{p} \to B/\mathfrak{p}$ инъективен, существует элемент $u \neq 0$ в $A/\mathfrak{p}$, такой, что для любого гомоморфизма f кольца $A/\mathfrak{p}$ в некоторое алгебраически замкнутое поле L, ядро которого не содержит u, существует гомоморфизм g из $B/\mathfrak{p}'$ в L, ядро которого не содержит v и для которого $f = g \circ \varphi$ (n° 1, следствие 3 теоремы 1). Поскольку A является кольцом Джекобсона, существует максимальный идеал $\mathfrak{m}$ кольца A, содержащий $\mathfrak{p}$ и такой, что $u \notin \mathfrak{m}/\mathfrak{p}$. Возьмем в качестве L алгебраическое замыкание поля $A/\mathfrak{m}$ и в качестве f — канонический гомоморфизм $A/\mathfrak{p} \to L$; пусть

$$g\colon B/\mathfrak{p}' \to L$$

— такой гомоморфизм, что $f = g \circ \varphi$ и $g(v) \neq 0$. Тогда $A/\mathfrak{m} \subset g(B/\mathfrak{p}') \subset L$; следовательно, $g(B/\mathfrak{p}')$ является подполем в K (*Алгебра*, гл. V, § 3, n° 2, предложение 3) и ядро гомоморфизма g есть максимальный идеал в $B/\mathfrak{p}'$, не содержащий v. Мы видим, тем самым, что пересечение максимальных идеалов кольца $B/\mathfrak{p}'$ равно нулю, откуда вытекает, что B — кольцо Джекобсона. Кроме того, если $\mathfrak{p}'$ — максимальный идеал, то гомоморфизм g обязательно инъективен; поэтому $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ максимален. Наконец, кольцо $B/\mathfrak{p}$ является алгеброй конечного типа над полем $A/\mathfrak{m}$, а поэтому оно является расширением конечной степени поля $A/\mathfrak{m}$ (n° 1, следствие 2 теоремы 1).

Следствие 1. *Любая алгебра A конечного типа над кольцом $\mathbf{Z}$ является кольцом Джекобсона; для того чтобы простой идеал $\mathfrak{p}$ в A был максимальным, необходимо и достаточно, чтобы кольцо $A/\mathfrak{p}$ было конечным.*

Если целостное кольцо $A/\mathfrak{p}$ конечно, то оно является полем, так как для каждого $u \neq 0$ в $A/\mathfrak{p}$ отображение $v \to uv$ кольца $A/\mathfrak{p}$ в себя инъективно, а потому и биективно, поскольку кольцо $A/\mathfrak{p}$ конечно. Обратно, для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A его прообраз в $\mathbf{Z}$ является максимальным идеалом (p) и $A/\mathfrak{m}$ является расширением конечной степени над простым полем $\mathbf{Z}/(p) = \mathbf{F}_p$ в силу теоремы 3.

Следствие 2. *Пусть $(P_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство многочленов кольца $\mathbf{Z}(X_1, \ldots, X_n)$ и Q — такой многочлен в $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$, что для любой системы элементов $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, принадлежащей некоторому конечному полю и удовлетворяющей уравнениям $P_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = 0$ при любом λ, оказывается справедливым равенство $Q(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Тогда если $\mathfrak{a}$ — идеал кольца $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$, порожденный многочленами P_λ, то $Q^m \in \mathfrak{a}$ для некоторого целого числа $m > 0$. Кроме того, для любого редуцированного кольца R и любой системы $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ элементов из R, удовлетворяющей уравнениям $P_\lambda(y_1, \ldots, y_n) = 0$ при любом λ, оказывается справедливым равенство $Q(y_1, \ldots, y_n) = 0$.*

Второе утверждение следует из первого, так как идеал кольца $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$, образованный такими многочленами P, что $P(y_1, \ldots, y_n) = 0$, содержит идеал $\mathfrak{a}$. Для доказательства первого утверждения достаточно заметить, что для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца $A = \mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$, содержащего $\mathfrak{a}$, кольцо $A/\mathfrak{m}$ представляет собой конечное поле (следствие 1). Тогда условие будет означать, что канонический образ многочлена Q в $A/\mathfrak{m}$ равен нулю. Следовательно, Q принадлежит пересечению максимальных идеалов кольца A, содержащих идеал $\mathfrak{a}$, которое является корнем для $\mathfrak{a}$ (следствие предложения 3).

Следствие 3. *Пусть A — кольцо Джекобсона. Если существует A-алгебра конечного типа B, содержащая A и являющаяся полем, то A представляет собой поле, а B — его алгебраическое расширение.*

Действительно, достаточно применить теорему 3(ii) при $\mathfrak{m}' = (0)$.

Упражнения

¶ 1) Пусть A — некоторое кольцо, $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A, а B — некоторая A-алгебра конечного типа, и пусть $\mathfrak{r}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{r}_m$ — непустая возрастающая последовательность идеалов из B, лежащих над $\mathfrak{p}$. Показать, что существуют элемент $a \in A - \mathfrak{p}$ и конечное семейство $(y_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ элементов из B, обладающие следующими свойствами:

1° Если положить $B' = A[y_1, \ldots, y_q]$ и через S обозначить множество степеней элемента a, то кольцо $S^{-1}B$ цело над $S^{-1}B'$.

2° Для всякого i, удовлетворяющего условиям $1 \leqslant i \leqslant m$, существует такое целое число $h(i) \geqslant 0$, что $\mathfrak{r}_i$ содержит $y_1, \ldots, y_{h(i)}$, и для любого многочлена $P \in A[X_{h(i)+1}, \ldots, X_q]$ из соотношения $P(y_{h(i)+1}, \ldots, y_q) \in \mathfrak{r}_i$ вытекает, что все коэффициенты многочлена P принадлежат $\mathfrak{p}$.

Идеал $\mathfrak{r}_i \cap B'$ в этом случае порождается идеалом $\mathfrak{p}$ и элементами y_k, для которых $k \leqslant h(i)$. (Рассуждать индукцией по m, благодаря чему все будет сведено к рассмотрению лишь случая $m = 1$. Пусть теперь $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1$; в этом случае надо рассуждать с помощью индукции по числу n образующих A-алгебры B. Пусть $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — некоторая такая система образующих, и пусть $\mathfrak{s}$ — идеал в $A[X_1, \ldots, X_n]$, образованный такими многочленами P, что $P(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{r}$; имеем: $\mathfrak{s} \supset \mathfrak{p}A[X_1, \ldots, X_n]$. Далее различаются два случая в зависимости от того, равен или нет идеал $\mathfrak{s}$ идеалу $\mathfrak{p}A[X_1, \ldots, X_n]$. Во втором случае существует многочлен $Q \in A[X_1, \ldots, X_n]$, содержащийся в $\mathfrak{s}$, никакой коэффициент которого, отличный от нуля, не лежит в $\mathfrak{p}$. Показать, что можно определить такие целые числа m_i $(2 \leqslant i \leqslant n)$, что если положить $x_1' = Q(x_1, \ldots, x_n)$, $x_i' = x_i - x_1^{m_i}$ $(2 \leqslant i \leqslant n)$, то будет существовать элемент $b \in A - \mathfrak{p}$, для которого элемент bx_1 цел над $C = A[x_2', \ldots, x_n']$; применить предположение индукции к A-алгебре $B_1 = A[x_2', \ldots, x_n']$ и идеалу $\mathfrak{r} \cap B_1$.)

2) Пусть K — поле, B — факторкольцо кольца многочленов $K[X, Y]$ от двух переменных по идеалу $\mathfrak{a}$ из $K[X, Y]$, порожденному элементами X^2 и XY; обозначим через x и y образы в B элементов X и Y; пусть A — подкольцо $K[x]$ в B. Показать, что элементы x и y^n $(n \geqslant 0)$ образуют базис алгебры B над K и что кольцо B не является целым над A. С другой стороны, в B не существует алгебраически свободного над A элемента. Вывести отсюда контрпример к следствию 1 теоремы 1 п° 1 для случая, когда A не является целостным.

3) Пусть K — бесконечное поле, L — некоторое надполе поля K, $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — некоторое конечное семейство элементов из L, d — степень трансцендентности расширения $K(x_1, \ldots, x_n)$ над K. Показать, что существует d элементов $z_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i$ поля L (где $a_{ji} \in K$), для которых $K[x_1, \ldots, x_n]$ цело над $K[z_1, \ldots, z_d]$. Если, кроме того, предполагается, что $K(x_1, \ldots, x_n)$ является сепарабельным расширением поля K, показать, что можно выбрать элементы a_{ji} таким образом, что z_j будут составлять сепарабельный базис трансцендентности расширения $K(x_1, \ldots, x_n)$ над K (рассуждать с помощью индукции по n, когда $n > d$).

4) Пусть B — целостное кольцо, A — подкольцо в B. Предположим, что существует $n \geqslant 1$ элементов $t_1, \ldots, t_n$ в B, алгебраически независимых над A и таких, что B цело над $A[t_1, \ldots, t_n]$. Пусть $\mathfrak{n}$ — некоторый максимальный идеал в B и $\mathfrak{p} = \mathfrak{n} \cap A$. Тогда в B имеется простой идеал $\mathfrak{q}$, содержащийся в $\mathfrak{n}$, отличный от $\mathfrak{n}$ и содержащий $\mathfrak{p}$. (Свести сначала к случаю, когда A целозамкнуто, рассматривая целое замыкание A' кольца A (содержащееся в поле частных кольца B) и кольцо $B' = B[A']$; в случае когда A целозамкнуто, надо воспользоваться теоремой 3 § 2, п° 4.)

¶ 5) Пусть A — целостное кольцо, $B \supset A$ — подкольцо поля частных K кольца A; предположим, что A целозамкнуто в B и что B содержит элемент t, для которого B является $A[t]$-модулем конечного типа.

а) Пусть F — такой многочлен $\neq 0$ из $A[X]$, что $F(t)$ принадлежит кондуктору $\mathfrak{f}$ кольца B относительно $A[t]$; показать, что если c — старший

коэффициент многочлена F, то c принадлежит корню идеала $\mathfrak{f}$. (Рассматривая кольца $A[c^{-1}]$ и $B[c^{-1}]$, свести все к доказательству того, что если $c=1$, то обязательно $B=A[t]$. С другой стороны, можно предполагать, что $F(t)\neq 0$, ибо в противном случае $t\in A$. Для любого $x\in B$, по предположению имеем

$$xF(t)=F(t)\,Q(t)+R(t),$$

где Q и R — многочлены из $A[X]$ и $\deg(R)<\deg(F)$; можно ограничиться случаем, когда $R(t)\neq 0$; если $y=R(t)\,(F(t))^{-1}=x-Q(t)$, то показать, что t — целый элемент над $A[y^{-1}]$, и вывести отсюда, что y цел над A.)

б) Предположим, кроме того, что кольцо A нётерово; пусть $\mathfrak{q}$ — простой идеал в B, принадлежащий множеству $\mathrm{Ass}(B/\mathfrak{f})$. Показать, что если ω — канонический гомоморфизм из B в поле частных кольца $B/\mathfrak{q}$, то элемент $\omega(t)$ трансцендентен над полем частных кольца $A/(\mathfrak{q}\cap A)$. (Имеется такой элемент $y\in B$, что $\mathfrak{q}$ представляет собой множество элементов $z\in B$, для которых $zy\in\mathfrak{f}$; показать, что $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}\cap A[t]$ является кондуктором кольца $B'=A[t]+By$ относительно $A[t]$. Затем рассуждать от противного, используя а).)

в) Предположим, что кольцо A нётерово. Пусть $\mathfrak{n}$ — некоторый максимальный идеал в B и $\mathfrak{p}=A\cap\mathfrak{n}$. Показать, что если $A_{\mathfrak{p}}\neq B_{\mathfrak{n}}$, то существует простой идеал кольца B, содержащийся в $\mathfrak{n}$, отличный от $\mathfrak{n}$ и содержащий $\mathfrak{p}$. (Пусть $\mathfrak{f}$ — кондуктор кольца B относительно $A[t]$. Предположим сначала, что $\mathfrak{n}\supset\mathfrak{f}$; в этом случае надо рассмотреть минимальный элемент $\mathfrak{q}$ в множестве простых идеалов кольца B, содержащихся в $\mathfrak{n}$ и содержащих $\mathfrak{f}$; далее рассмотреть канонический образ кольца A в $B/\mathfrak{q}$ и воспользоваться пунктом б) и упражнением 4. Если $\mathfrak{n}\not\supset\mathfrak{f}$, то локальное кольцо $B_{\mathfrak{n}}$ равно локальному кольцу $A[t]_{\mathfrak{n}_1}$, где $\mathfrak{n}_1=\mathfrak{n}\cap A[t]$ (§ 1, упражнение 16). Если $t\in A_{\mathfrak{p}}$, то показать, что $A_{\mathfrak{p}}=B_{\mathfrak{n}}$. Если же, напротив, $A_{\mathfrak{p}}\neq B_{\mathfrak{n}}$, то вывести из упражнения 14в) § 2, что $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}[t]$ является простым немаксимальным идеалом в $A_{\mathfrak{p}}[t]$, и получить отсюда, что $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{n}}$ является простым идеалом в $B_{\mathfrak{n}}$, отличным от $\mathfrak{n}B_{\mathfrak{n}}$.)

6) Кольцо A называется *целонётеровым*, если оно целостное, нётерово и если для любой конечной последовательности $(t_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ элементов из произвольного надполя поля частных кольца A целое замыкание кольца $A[t_1,\ldots,t_n]$ является $A[t_1,\ldots,t_n]$-модулем конечного типа. Всякая целостная алгебра конечного типа над полем представляет собой целонётерово кольцо (n° 2, теорема 2).

а) Любая целостная алгебра конечного типа над целонётеровым кольцом есть целонётерово кольцо. Всякое не равное нулю кольцо частных целонётерова кольца является целонётеровым кольцом.

б) Пусть A — целонётерово кольцо, $(t_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — конечная последовательность элементов из некоторого надполя поля частных K кольца A, B — подкольцо поля $K(t_1,\ldots,t_n)$, содержащее A и целое над A. Тогда B является A-модулем конечного типа. (Заметить, что поле частных кольца B является алгебраическим расширением конечной степени поля K, воспользовавшись *Алгеброй*, гл. V, § 5, n° 7.)

¶ 7) Пусть A — целонётерово кольцо (упражнение 6), $(t_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — какая-либо конечная последовательность элементов из некоторого надполя поля частных кольца A, B — кольцо $A[t_1,\ldots,t_n]$, $\mathfrak{n}$ — максимальный идеал в B, $\mathfrak{p}=A\cap\mathfrak{n}$, A' — целое замыкание кольца A в кольце B, $\mathfrak{p}'=\mathfrak{n}\cap A'$. Тогда, если локальные кольца $A'_{\mathfrak{p}'}$ и $B_{\mathfrak{n}}$ различны, существует простой идеал кольца B, содержащийся в $\mathfrak{n}$, отличный от $\mathfrak{n}$ и содержащий $\mathfrak{p}$ (*основная теорема Зарисского*). (С помощью упражнения 6б) свести доказательство к случаю

$A' = A$, затем свести все к случаю, когда A — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{p}$. Показать, что тогда $B/\mathfrak{n}$ является алгебраическим расширением конечной степени поля $A/\mathfrak{p}$ (ср. n° 4, теорема 3); получить отсюда, что для всякого кольца C, удовлетворяющего включениям $A \subset C \subset B$, идеал $\mathfrak{n} \cap C$ максимален в C. После этого рассуждать с помощью индукции по n, обозначив через B_i целое замыкание кольца $A[t_1, \ldots, t_i]$ в кольце B; различать два случая в зависимости от того, является элемент t_{i+1} трансцендентным или алгебраическим над полем частных кольца B_i. В первом случае воспользоваться упражнением 4, а во втором — упражнением 5в).)

8) Пусть A — некоторое кольцо. Для того чтобы A было кольцом Джекобсона, необходимо и достаточно, чтобы для всякого максимального идеала $\mathfrak{m}'$ кольца многочленов $A[X]$ идеал $\mathfrak{m}' \cap A$ был максимальным в A. (Заметить, что если некоторое целостное кольцо B обладает радикалом $\mathfrak{R} \neq 0$ и если $b \in \mathfrak{R}$, $b \neq 0$, то пересечение кольца B и максимального идеала из $B[X]$, содержащего $1 + bX$, не может содержать b.)

9) Привести пример целостного кольца Джекобсона A и такого кольца Джекобсона B, содержащего A, что пересечение некоторого максимального идеала из B с кольцом A не является максимальным идеалом в A.

¶ 10) Пусть k — некоторое поле, L — бесконечное множество, A — кольцо многочленов $k[X_\lambda]_{\lambda \in L}$. Если k_0 — простое поле, содержащееся в k, то обозначим через b кардинальное число, равное мощности базиса трансцендентности k над k_0, и положим $c = \mathrm{Card}\,(L)$.

а) Показать, что для любого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A существует такая система образующих S этого идеала, что $\mathrm{Card}\,(S) \leqslant c$. (Рассмотреть пересечения идеала $\mathfrak{a}$ с подкольцами $k[X_\lambda]_{\lambda \in J}$, где J пробегает конечные подмножества в L.)

б) Предположим, что $c < b$. Показать, что если $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца A, то $A/\mathfrak{m}$ представляет собой алгебраическое расширение поля k. (Пусть K — подполе в k, порожденное над k_0 коэффициентами многочленов, составляющих систему образующих идеала $\mathfrak{m}$ мощности $\leqslant c$; пусть $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m} \cap K[X_\lambda]_{\lambda \in L}$, так что $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \otimes_K k$ и $A/\mathfrak{m} = \left(K[X_\lambda]_{\lambda \in L}/\mathfrak{m}_0\right) \otimes_K k$. Заметить, наконец, что существует некоторый K-изоморфизм поля частных кольца $K[X_\lambda]_{\lambda \in L}/\mathfrak{m}_0$ в алгебраическое замыкание поля k.) Вывести отсюда, что A является кольцом Джекобсона (применить упражнение 8).

в) Предположим, что $b < c$; тогда $\mathrm{Card}\,(k) \leqslant c$, так что существует биективное отображение $\lambda \to \xi_\lambda$ некоторого подмножества L' множества L на k, причем L' имеет непустое дополнение в L. Пусть $\lambda_0 \in L - L'$; показать, что существует k-гомоморфизм u из A на подполе поля рациональных дробей $k(Y)$, при котором $u(X_{\lambda_0}) = Y$, $u(X_\lambda) = 1/(Y - \xi_\lambda)$ для $\lambda \in L'$ и $u(X_\lambda) = 0$ для $\lambda \in L - (L' \cup \{\lambda_0\})$; если $\mathfrak{m}$ — ядро гомоморфизма u, то $A/\mathfrak{m}$ не является, следовательно, алгебраическим расширением поля k.

г) При тех же предположениях, что и в пункте в), показать, что A не является кольцом Джекобсона. (Заметить, что существуют k-алгебры B, не являющиеся кольцами Джекобсона (например, локальные кольца), для которых $\mathrm{Card}\,(B) = b$.)

ГЛАВА VI

НОРМИРОВАНИЯ

Если не сделано специальных оговорок, то все кольца, рассматриваемые в этой главе, предполагаются коммутативными и обладающими единичным элементом. Относительно всех гомоморфизмов колец предполагается, что они переводят единичный элемент в единичный. Предполагается также, что любое подкольцо некоторого кольца A содержит единичный элемент самого кольца A.

Если A — локальное кольцо, то его максимальный идеал будет обозначаться через $\mathfrak{m}(A)$, его поле вычетов $A/\mathfrak{m}(A)$ — через $k(A)$ и группа обратимых элементов из A — через $U(A)$; таким образом, $U(A) = A - \mathfrak{m}(A)$.

§ 1. Кольца нормирования

1. Отношение доминирования между локальными кольцами

Определение 1. *Пусть A и B — два локальных кольца. Говорят, что B доминирует над A, если A является подкольцом кольца B и при этом $\mathfrak{m}(A) = A \cap \mathfrak{m}(B)$.*

Предложение 1. *Пусть A и B — такие локальные кольца, что A является подкольцом в B. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *имеет место включение $\mathfrak{m}(A) \subset \mathfrak{m}(B)$;*

б) *B доминирует над A;*

в) *идеал $B\mathfrak{m}(A)$, порожденный в кольце B идеалом $\mathfrak{m}(A)$, не содержит 1.*

Если $\mathfrak{m}(A) \subset \mathfrak{m}(B)$, то $\mathfrak{m}(B) \cap A$ представляет собой идеал в A, не содержащий 1 и содержащий максимальный идеал $\mathfrak{m}(A)$; следовательно, эти два идеала равны и из а) вытекает б). Если же B доминирует над A, то идеал $B\mathfrak{m}(A)$ содержится в $\mathfrak{m}(B)$, а потому он не содержит 1; следовательно, из б) вытекает в). Если имеет место в), то $B\mathfrak{m}(A)$ содержится в единственном максимальном идеале $\mathfrak{m}(B)$ кольца B, откуда вытекает а).

Следует отметить, что если K — некоторое кольцо, то отношение „B доминирует над A“ представляет собой *отношение порядка* в множестве локальных подколец кольца K.

Пусть A и B — такие два локальных кольца, что B доминирует над A. Тогда каноническое вложение $A \to B$ определяет при переходе к факторкольцам изоморфизм поля $\kappa(A)$ на некоторое подполе поля $\kappa(B)$; этот изоморфизм позволяет отождествить $\kappa(A)$ с некоторым подполем в $\kappa(B)$.

Примеры. 1) Пусть A — нётерово локальное кольцо и $\hat{A}$ — его пополнение; тогда локальное кольцо $\hat{A}$ доминирует над A (гл. III, § 3, п° 5, предложение 9).

2) Пусть B — целостное кольцо, A — подкольцо в B, $\mathfrak{p}'$ — простой идеал в B и $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{p}'$. Тогда $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{p}'B_{\mathfrak{p}'}$, так что $B_{\mathfrak{p}'}$ доминирует над $A_{\mathfrak{p}}$.

2. Кольца нормирования

Теорема 1. *Пусть K — поле и V — некоторое подкольцо в K. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *кольцо V является максимальным элементом в множестве локальных подколец поля K, которое упорядочено отношением „B доминирует над A“ для локальных подколец A и B;*

б) *существует алгебраически замкнутое поле L и гомоморфизм h кольца V в L, являющийся максимальным в множестве гомоморфизмов подколец поля K в поле L, которое упорядочено отношением „g есть продолжение f“ для гомоморфизмов f и g;*

в) *если $x \in K - V$, то $x^{-1} \in V$;*

г) *полем частных кольца V является K, и множество главных идеалов кольца V совершенно упорядочено относительно включения;*

д) *полем частных кольца V является K, и множество всех идеалов кольца V совершенно упорядочено относительно включения.*

Мы докажем эту теорему, следуя такой логической схеме:

$$\text{а)} \Rightarrow \text{б)} \Rightarrow \text{в)} \Rightarrow \text{г)} \Rightarrow \text{д)} \Rightarrow \text{а)}.$$

Допустим, что выполнено условие а). Тогда V — локальное кольцо. Пусть L — любое алгебраическое замыкание поля вычетов $\kappa(V)$ и h — канонический гомоморфизм из V в L. Пусть V' — подкольцо поля K, содержащее V, и h' — гомоморфизм из V' в L, продолжающий гомоморфизм h. Если $\mathfrak{p}'$ — ядро гомоморфизма h', то $\mathfrak{p}' \cap V = \mathfrak{m}(V)$; следовательно (п° 1, пример 2), кольцо $V'_{\mathfrak{p}'}$ доминирует над кольцом V, откуда вытекает

равенство $V'_{\mathfrak{p}'}=V$ и равенство $V'=V$. Таким образом, условие б) выполнено.

Предположим теперь, что выполнено условие б). Пусть L — некоторое алгебраически замкнутое поле, h — гомоморфизм кольца V в L; предположим, что гомоморфизм h максимален в множестве гомоморфизмов подколец поля K в поле L; пусть $\mathfrak{p}$ — ядро гомоморфизма h. Поскольку элементы множества $h(V-\mathfrak{p})$ обратимы в L, то h продолжается до гомоморфизма кольца $V_{\mathfrak{p}}$ в поле L (гл. II, § 2, n° 1, предложение 1); следовательно, $V=V_{\mathfrak{p}}$, и тем самым установлена локальность кольца V и максимальность идеала $\mathfrak{p}$. Пусть x — ненулевой элемент из K; нам нужно показать, что по крайней мере один из элементов x или x^{-1} принадлежит V, т. е. (в силу максимальности гомоморфизма h) что h может быть продолжен на $V[x]$ или на $V[x^{-1}]$. Если элемент x цел над V, то это вытекает из следствия 4 теоремы 1 гл. V, § 2, n° 1. Если же x не цел над V, то мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма 1. *Пусть A — подкольцо некоторого кольца B, а x — какой-либо элемент из B, не являющийся целым над A; тогда кольцо частных B_x* (гл. II, § 5, n° 1) *не сводится к нулю и в подкольце $A[1/x]$ кольца B_x существуют максимальные идеалы, содержащие $1/x$; кроме того, если $\mathfrak{M}$ — один из этих идеалов, то прообраз идеала $\mathfrak{M}$ в A есть максимальный идеал.*

Поскольку элемент x не является целым над A, он не нильпотентен и, следовательно, $B_x\neq 0$. Кроме того, $x/1\notin A[1/x]$, ибо в противном случае выполнялось бы соотношение $x/1=a_0/1+a_1/x+\ldots+a_n/x^n$ при некотором $n\geqslant 0$ (где $a_i\in A$ для $0\leqslant i\leqslant n$), а это эквивалентно равенству

$$x^{n+h}-a_0x^{n+h-1}-a_1x^{n+h-2}-\ldots-a_nx^{h-1}=0$$

при надлежащем $h\geqslant 1$; однако это соотношение означало бы, что элемент x является целым над A, что противоречит нашему предположению. Следовательно, существование максимального идеала в $A[1/x]$, содержащего $1/x$, вытекает из того, что элемент $1/x$ не обратим в $A[1/x]$ (*Алгебра*, гл. I, § 8, n° 7, теорема 2).

Пусть теперь $\mathfrak{M}$ — некоторый максимальный идеал в $A[1/x]$, содержащий $1/x$; пусть $\varphi\colon A\to A[1/x]$, $p\colon A[1/x]\to A[1/x]/\mathfrak{M}$ — канонические гомоморфизмы. Тогда $p(A[1/x])=p(\varphi(A))[p(1/x)]=p(\varphi(A))$, ибо $p(1/x)=0$; это доказывает, что $p(\varphi(A))$ является полем, а потому прообраз $\varphi^{-1}(\mathfrak{M})$ представляет собой максимальный идеал в A.

Применим эту лемму к $A=V$ и $B=K$; имеется, таким образом, некоторый максимальный идеал $\mathfrak{M}$ в $V[x^{-1}]$, содержа-

щий x^{-1}, и $\mathfrak{M} \cap V$ представляет собой максимальный идеал локального кольца V. Обозначая через f канонический гомоморфизм из $V[x^{-1}]$ на $V[x^{-1}]/\mathfrak{M}$, получаем $f(x^{-1}) = 0$, откуда $V/\mathfrak{p} = f(V) = f(V[x^{-1}])$; поскольку h определяет при переходе к факторкольцам инъективный гомоморфизм $\bar{h}$ из $V/\mathfrak{p}$ в L, композиция $\bar{h} \circ f$ представляет собой гомоморфизм из $V[x^{-1}]$ в L, продолжающий гомоморфизм h. Следовательно, имеет место условие в).

Допустим теперь, что выполнено условие в). Ясно, что K есть поле частных кольца V. Пусть a и b — элементы из V, для которых $Va \not\subset Vb$. Покажем, что $Vb \subset Va$. Это так, если $b = 0$; в противном случае соотношение $a \notin Vb$ означает, что $b^{-1}a \notin V$, откуда, в силу условия в), следует включение $a^{-1}b \in V$ и, значит, $Vb \subset Va$. Следовательно, выполнено условие г).

Предположим, что имеет место условие г). Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — такие два идеала кольца V, что $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{b}$. Существует такой элемент $a \in \mathfrak{a}$, что $a \notin \mathfrak{b}$. Для любого $b \in \mathfrak{b}$ имеем $a \notin Vb$, откуда $Va \not\subset Vb$ и, следовательно, $Vb \subset Va \subset \mathfrak{a}$ (в силу в)), так что $b \in \mathfrak{a}$. Следовательно, $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$, так что условие д) выполнено.

Наконец, предположим, что имеет место условие д). Поскольку V обладает максимальным идеалом, то этот максимальный идеал единственный, так что кольцо V локально. Пусть V' — локальное подкольцо поля K, доминирующее над V, и пусть x — некоторый ненулевой элемент из V'; положим $x = ab^{-1}$ при $a \in V$, $b \in V$. Один из идеалов Va или Vb содержится в другом. Если $Va \subset Vb$, то $x \in V$. Если $Vb \subset Va$, то $x^{-1} \in V$. Поскольку идеал $V'\mathfrak{m}(V)$ не содержит 1 (n° 1, предложение 1), то $x^{-1} \notin \mathfrak{m}(V)$, откуда получаем, что $x \in V$, так как кольцо V локально. Любой элемент из V' принадлежит, следовательно, кольцу V. Отсюда мы заключаем, что выполнено условие а).

Определение 2. *Сохраним обозначения теоремы* 1. *Говорят, что V является кольцом нормирования для поля K, если выполняются эквивалентные условия* а) — д). *Говорят, что кольцо является кольцом нормирования, если оно целостное и служит кольцом нормирования для своего поля частных.*

Теорема 2. *Пусть K — поле и h — некоторый гомоморфизм из какого-либо подкольца A поля K в алгебраически замкнутое поле L. Тогда существует такое кольцо нормирования V для поля K и такой гомоморфизм h' из V в L, что кольцо V содержит A, гомоморфизм h' продолжает h и $h'^{-1}(0) = \mathfrak{m}(V)$.*

Пусть $\mathfrak{H}$ — множество гомоморфизмов подколец поля K в поле L, упорядоченное с помощью отношения продолжения. Это множество индуктивно; в самом деле, если $(h_\alpha)_{\alpha\in I}$ — некоторое совершенно упорядоченное непустое семейство элементов из $\mathfrak{H}$ и если B_α — кольцо определения гомоморфизма h_α, то B_α образуют совершенно упорядоченное семейство подколец поля K и их объединение B является, следовательно, подкольцом поля K. Значит, существует, и притом единственное, отображение $\bar{h}$ из B в L, которое продолжает h_α (*Теория множеств*, гл. II, § 4, n° 6, предложение 7), и немедленно проверяется, что $\bar{h}$ есть гомоморфизм из B в L. Таким образом, теорема Цорна показывает, что существует максимальный элемент h' в $\mathfrak{H}$, продолжающий h. Кольцо определения V гомоморфизма h' является кольцом нормирования для K (теорема 1). Если $\mathfrak{p}$ — ядро гомоморфизма h', то h' продолжается до гомоморфизма из $V_\mathfrak{p}$ в L (гл. II, § 2, n° 1, предложение 1), откуда $V_\mathfrak{p}=V$ и $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}(V)$.

Следствие. *Любое локальное подкольцо A поля K доминируется по крайней мере одним кольцом нормирования для поля K.*

Применим теорему 2 к каноническому гомоморфизму h кольца A в некоторое алгебраическое замыкание L поля $A/\mathfrak{m}(A)$.

3. Характеризация целых элементов

Теорема 3. *Пусть A — подкольцо некоторого поля K. Целое замыкание A' кольца A в поле K является пересечением колец нормирования для поля K, содержащих кольцо A. Если кольцо A локально, то A' представляет собой пересечение колец нормирования для K, доминирующих над A.*

Пусть x — элемент из A' и V — кольцо нормирования для K, содержащее A. Так как x является целым над V, то существует такой простой идеал $\mathfrak{p}'$ кольца $V[x]$, что $\mathfrak{p}'\cap V=\mathfrak{m}(V)$ (гл. V, § 2, n° 1, теорема 1); очевидно, что локальное кольцо $(V[x])_{\mathfrak{p}'}$ доминирует над V, так что в действительности эти кольца совпадают; отсюда следует, что $x\in V$. Обратно, пусть y — какой-нибудь элемент из K, не являющийся целым над A. Тогда существует максимальный идеал $\mathfrak{M}$ кольца $A[y^{-1}]$, содержащий y^{-1} (n° 2, лемма 1); кроме того, существует кольцо нормирования V для поля K, доминирующее над $(A[y^{-1}])_\mathfrak{M}$ (n° 2, следствие теоремы 2); поскольку $y^{-1}\in\mathfrak{m}(V)$, то $y\notin V$. Более того, $\mathfrak{M}\cap A$ является максимальным идеалом в A (n° 2, лемма 1); следовательно, если A — локальное кольцо, то $\mathfrak{M}\cap A=\mathfrak{m}(A)$ и V доминирует над A.

Следствие 1. *Любое кольцо нормирования целозамкнуто.*

Следствие 2. *Для того чтобы целостное кольцо было целозамкнутым, необходимо и достаточно, чтобы оно представляло собой пересечение некоторого семейства колец нормирования для своего поля частных.*

В случае нётерова кольца следствие 2 может быть уточнено (гл. VII, § 1, n° 3, следствие теоремы 1).

Следствие 3. *Пусть K — поле, K' — некоторое расширение поля K и A — кольцо нормирования для K. Целое замыкание кольца A в K является пересечением колец нормирования V' для поля K', удовлетворяющих равенству $V' \cap K = A$.*

Действительно, теорема 1в) показывает, что если V' — некоторое кольцо нормирования для K', то $V' \cap K$ является кольцом нормирования для K и V' доминирует над $V' \cap K$. Для того чтобы V' доминировало над A, необходимо и достаточно, чтобы $V' \cap K$ доминировало над A, т. е. чтобы $V' \cap K$ было равно A.

4. *Примеры колец нормирования*

1) Любое поле является кольцом нормирования.

2) Если V' — кольцо нормирования для поля K' и K — подполе в K', то $V' \cap K$ является, в силу теоремы 1в) n° 2, кольцом нормирования для K.

3) Следующее предложение доставляет целую серию примеров колец нормирования:

Предложение 2. *Пусть A — локальное кольцо, максимальным идеалом которого служит главный идеал Ap. Если $\bigcap_{n=1}^{\infty} Ap^n = (0)$* (например, если A нётерово; ср. следствие предложения 5 гл. III, § 3, n° 2), *то идеалы кольца A исчерпываются идеалами (0) и Ap^n. В этом случае или p — нильпотентный элемент, или A — кольцо нормирования.*

Действительно, зададим в кольце A фильтрацию идеалами Ap^n и обозначим через v соответствующую функцию порядка (гл. III, § 2, n° 2). Поскольку

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Ap^n = (0),$$

соотношение $v(x) = +\infty$ означает, что $x = 0$. Пусть $\mathfrak{a}$ — какой-нибудь ненулевой идеал из A и a — элемент из $\mathfrak{a}$, для которого v принимает свое наименьшее значение. Положим $v(a) = s$

($s \neq +\infty$). Тогда $\mathfrak{a} \subset Ap^s$. В частности, существует такой элемент $u \in A$, что $a = up^s$; поскольку $a \notin Ap^{s+1}$, имеем $u \notin Ap$. Следовательно, элемент u обратим и $p^s \in Aa \subset \mathfrak{a}$. Отсюда получается, что $\mathfrak{a} = Ap^s$, в силу чего первое утверждение предложения справедливо. Мы видим также, что любой элемент $a \neq 0$ из A записывается в виде $a = up^{v(a)}$, где u — некоторый обратимый элемент. Если $a' = u'p^{v(a')}$ (u' обратим) — другой ненулевой элемент из A, то $aa' = uu'p^{v(a)+v(a')}$; следовательно, если p не нильпотентен, то $aa' \neq 0$ и кольцо A целостное. Поскольку множество идеалов кольца A совершенно упорядочено по включению, отсюда следует, что A является кольцом нормирования (теорема 1д)).

Например, если p — простое число, то локальное кольцо $\mathbf{Z}_p$ представляет собой кольцо нормирования. Пусть $B = K[X_1, \ldots, X_n]$ — кольцо многочленов от n переменных над полем K. Идеал BX_1 прост, ибо факторкольцо B/BX_1 изоморфно кольцу $K[X_2, \ldots, X_n]$; следовательно, B_{BX_1} есть кольцо нормирования; оно состоит из рациональных дробей PQ^{-1}, где P и Q — многочлены и $Q(0, X_2, \ldots, X_n) \neq 0$.

Более общо́, мы увидим, что если F — экстремальный элемент из $B = K[X_1, \ldots, X_n]$, то B_{BF} есть кольцо нормирования (гл. VII, § 3, n° 5).

Кольцо формальных рядов $K[[T]]$ от одной переменной над полем K является целостным нётеровым локальным кольцом, максимальный идеал которого — главный. Следовательно, это кольцо нормирования. Напротив, кольцо $K[[T_1, T_2]]$ формальных рядов от двух переменных, являющееся локальным нётеровым и целостным, не есть кольцо нормирования, так как никакой из элементов T_1, T_2 не кратен другому.

Предложение 3. *Пусть A — кольцо главных идеалов и K — его поле частных. Кольца нормирования для поля K, содержащие A и отличные от K, — это кольца вида A_{Ap}, где p — экстремальный элемент из A.*

Ясно, что A_{Ap} (p — экстремальный элемент) является кольцом нормирования, содержащим A и отличным от K (предложение 2). Обратно, пусть V — кольцо нормирования, отличное от K и содержащее A. Поскольку $V \neq K$, идеал $\mathfrak{m}(V)$ содержит некоторый элемент $x \neq 0$; записывая $x = a/b$ при $a \in A$ и $b \in A$, мы видим, что $A \cap \mathfrak{m}(V)$ содержит ненулевой элемент a. Так как идеал $A \cap \mathfrak{m}(V)$ прост, то он имеет вид Ap, где p — экстремальный элемент из A. Но тогда $A_{Ap} \subset V$, $pA_{Ap} \subset \mathfrak{m}(V)$, так что V доминирует над A_{Ap}. Поскольку A_{Ap} является кольцом нормирования для K (предложение 2), то $V = A_{Ap}$.

Следствие 1. *Всякое кольцо нормирования для поля рациональных чисел* $\mathbf{Q}$, *отличное от* $\mathbf{Q}$, *имеет вид* $\mathbf{Z}_p$, *где* p — *некоторое простое число*.

Действительно, всякое подкольцо поля $\mathbf{Q}$ содержит кольцо целых чисел $\mathbf{Z}$.

Следствие 2. *Пусть* K — *поле*, $K(X)$ — *поле рациональных дробей от одной переменной над* K *и* V — *некоторое кольцо нормирования для* $K(X)$, *содержащее* K *и отличное от* $K(X)$. *Если* $X \in V$, *то существует такой неприводимый многочлен* $P \in K[X]$, *что* $V = (K[X])_{(P)}$. *Если же* $X \notin V$, *то* V *есть локализация кольца* $K[X^{-1}]$ *относительно простого идеала* $X^{-1}K[X^{-1}]$ (*другими словами*, V *состоит из дробей* A/B, *где* $A \in K[X]$ *и* $B \in K[X]$, *причем* $\deg(A) \leqslant \deg(B)$).

Если $X \in V$, то $K[X] \subset V$, и утверждение следует из предложения 3. Если же $X \notin V$, то $X^{-1} \in V$, откуда $K[X^{-1}] \subset V$; тогда V является локализацией кольца $K[X^{-1}]$ по некоторому простому идеалу $\mathfrak{p}$ (предложение 3), и этот идеал содержит X^{-1}, так как X^{-1} — необратимый элемент в V; следовательно, $\mathfrak{p} = X^{-1}K[X^{-1}]$, так как этот последний идеал максимален. Наконец, рассмотрим произвольную рациональную дробь $A(X)/B(X)$, в которой A и B — многочлены степеней a и b соответственно. Тогда $A(X) = X^a A'(X^{-1})$ и $B(X) = X^b B'(X^{-1})$, где A' и B' — такие многочлены, что $A'(0) \neq 0$ *и* $B'(0) \neq 0$; следовательно, для того чтобы дробь A/B принадлежала локальному кольцу кольца $K[X^{-1}]$ относительно идеала $X^{-1}K[X^{-1}]$, необходимо и достаточно, чтобы $a \leqslant b$.

Упражнения

1) Пусть K—поле; для любого подкольца A поля K обозначим через $L(A)$ множество локализаций $A_{\mathfrak{p}}$ кольца A для простых идеалов $\mathfrak{p}$ в A (эти локальные кольца отождествляются с подкольцами в K).

а) Для того чтобы локальное подкольцо M поля K доминировало над некоторым кольцом $A_{\mathfrak{p}} \in L(A)$, необходимо и достаточно, чтобы $A \subset M$; локальное кольцо $A_{\mathfrak{p}}$, над которым доминирует M, в этом случае единственно и соответствует простому идеалу $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}(M) \cap A$.

б) Пусть M, N — два локальных подкольца в K, P — подкольцо в K, порожденное множеством $M \cup N$. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) существует простой идеал $\mathfrak{p}$ кольца P, для которого $\mathfrak{m}(M) = \mathfrak{p} \cap M$, $\mathfrak{m}(N) = \mathfrak{p} \cap N$;

β) идеал $\mathfrak{a}$, порожденный в P множеством $\mathfrak{m}(M) \cup \mathfrak{m}(N)$, отличен от P;

γ) существует локальное подкольцо Q поля K, доминирующее одновременно над M и над N. Когда выполнены эти условия, говорят, что кольца M и N *родственные*.

в) Пусть A, B — два подкольца поля K и C — подкольцо в K, порожденное множеством $A \cup B$. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) для всякого локального кольца $Q \subset K$, содержащего A и B, имеет место равенство $A_\mathfrak{p} = B_\mathfrak{q}$, где $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}(Q) \cap A$ и $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}(Q) \cap B$;

β) для любого простого идеала $\mathfrak{r}$ кольца C имеет место равенство $A_\mathfrak{p} = B_\mathfrak{q}$, где $\mathfrak{p} = \mathfrak{r} \cap A$ и $\mathfrak{q} = \mathfrak{r} \cap B$;

γ) если $M \in L(A)$ и $N \in L(B)$ — родственные кольца, то они совпадают;

δ) имеет место равенство $L(A) \cap L(B) = L(C)$.

(Воспользоваться пунктами а) и б).)

2) Для того чтобы целостное кольцо A было кольцом нормирования, необходимо и достаточно, чтобы любой идеал в A был неприводим (*Algebre*, chap. II, 3e éd., § 2, exercice 16).

3) Показать, что всякое кольцо нормирования когерентно (гл. 1, § 2, упражнение 12).

4) Пусть K — поле и $\mathfrak{F}$ — множество колец нормирования для K, упорядоченное по включению. Показать, что пересечение колец, принадлежащих множеству $\mathfrak{F}$, является кольцом нормирования для K.

5) Пусть K — поле, A — целозамкнутое подкольцо в K, для которого K является полем частных, (A_α) — некоторое семейство колец нормирования для K, пересечение которого равно A. Тогда если L — расширение K, то целое замыкание кольца A в поле L будет пересечением колец нормирования поля L, доминирующих над A_α.

¶ 6) Пусть R — кольцо, A — такое подкольцо в R, что множество $S = R - A$ непусто и произведение любых двух элементов этого множества снова принадлежит S.

а) Пусть a, a' — два элемента из A, s, s' — два таких элемента из S, что $sa \in A$ и $s'a' \in A$. Показать, что один из двух элементов sa', $s'a$ принадлежит A. Получить отсюда, что множество $\mathfrak{p}_1$ элементов $a \in A$, для которых существует такой элемент $s \in S$, что $sa \in A$, является простым идеалом в A.

б) Показать, что множество $\mathfrak{p}_0$ таких элементов $a \in A$, что $sa \in A$ при любом $s \in S$, является простым идеалом в R и в A; это наибольший из идеалов в R, содержащихся в A, и $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1$.

в) Множество $\mathfrak{n}$ тех элементов $x \in R$, для которых существует элемент $s \in S$, удовлетворяющий условию $sx = 0$, является одновременно идеалом в R и идеалом в A; кроме того, имеет место включение $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{p}_0$.

г) Кольцо A целозамкнуто в R.

д) Если R является полем, то A служит кольцом нормирования для R, $\mathfrak{p}_0 = (0)$ и $\mathfrak{p}_1$ является максимальным идеалом в A.

¶ 7) Пусть R — кольцо. Говорят, что пара $(A, \mathfrak{p})$, образованная подкольцом A из R и простым идеалом $\mathfrak{p}$ из A, *максимальна* относительно R, если не существует пары $(A', \mathfrak{p}')$, образованной подкольцом A' в R и простым идеалом $\mathfrak{p}'$ в A', для которых $A \subset A'$, $A' \neq A$ и $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}$.

а) Для любого подкольца B кольца R и любого простого идеала $\mathfrak{q}$ из B существует пара $(A, \mathfrak{p})$, максимальная относительно R и такая, что $A \supset B$ и $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap B$.

б) Для того чтобы пара $(A, \mathfrak{p})$ была максимальна относительно кольца R, необходимо и достаточно, чтобы для любого $s \in R - A$ существовало такое конечное семейство элементов $c_i \in \mathfrak{p}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, что элемент $b = c_1 s + c_2 s^2 + \ldots + c_n s^n$ принадлежит множеству $A - \mathfrak{p}$ (воспользоваться следствием 3 предложения 11 гл. II, §2, n° 5).

в) Показать, что если пара $(A, \mathfrak{p})$ максимальна относительно R, то произведение любых двух элементов из $R - A$ принадлежит $R - A$. (Если s, s' — два элемента из $R - A$ и $ss' = a \in A$, то надо рассмотреть такие наименьшие целые числа n, m, для которых существуют элементы $c_i \in \mathfrak{p}$

$(1 \leqslant i \leqslant n)$ и элементы $c'_j \in \mathfrak{p}$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$, удовлетворяющие условиям $b = \sum_i c_i s^i \in A - \mathfrak{p}$, $b' = \sum_j c'_j s'^j \in A - \mathfrak{p}$. Предполагая, например, что $n \geqslant m$, надо рассмотреть произведение $bb' \in A - \mathfrak{p}$ и получить противоречие с определением числа n.)

г) В предположениях пункта в) положим $S = R - A$. Показать, что идеал $\mathfrak{p}_1$ кольца A, образованный такими элементами $a \in A$, что существует $s \in S$, при котором $sa \in A$, содержится в идеале $\mathfrak{p}$ (применить б)); a fortiori идеал $\mathfrak{p}_0$ кольца A, образованный такими $a \in A$, что $sa \in A$ при любом $s \in S$, содержится в $\mathfrak{p}$ (упражнение 6б)). Положим $A' = A/\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}/\mathfrak{p}_0$, $R' = R/\mathfrak{p}_0$. Пара $(A', \mathfrak{p}')$ является максимальной относительно целостного кольца R' и для всякого $a' \in A'$, отличного от нуля, существует такой элемент $s' \in S' = R' - A'$, что $s'a' \in S'$.

д) Пусть $(A, \mathfrak{p})$ — максимальная пара относительно целостного кольца R, обладающая следующим свойством: для любого ненулевого элемента $a \in A$ существует такой элемент $s \in S = R - A$, что $sa \in S$. Положим $S_0 = S \cup \{1\}$ и обозначим через R_0 кольцо частных $S_0^{-1}R$. Канонический гомоморфизм $R \to R_0$ инъективен и, следовательно, отождествляет кольцо R с некоторым подкольцом в R_0. Показать, что R_0 является полем, совпадающим с полем частных K. Пусть $(B, \mathfrak{q})$ — такая максимальная пара относительно R_0, что $B \supset A$ и $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$. Показать, что $B \cap R = A$; другими словами, кольцо A является пересечением кольца R и некоторого кольца нормирования поля R_0, а $\mathfrak{p}$ — пересечением кольца A и максимального идеала этого кольца нормирования.

е) Пусть K_0 — поле, A_0 — кольцо многочленов $K_0[X]$, B — кольцо формальных рядов $A_0[[Y]]$, R — кольцо частных B_Y, образованное формальными рядами $Y^{-h}f(Y)$, где $f \in B$ и $h \geqslant 0$. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал YB формальных рядов без свободного члена, $A = K_0 + \mathfrak{p}$ — кольцо, являющееся подкольцом в B. Показать, что A представляет собой пересечение R и некоторого кольца нормирования C для поля частных K кольца R, а $\mathfrak{p}$ — пересечение A и максимального идеала кольца C; кроме того, поле частных кольца A равно полю частных кольца R и любой элемент $a \neq 0$ из A имеет вид $s^{-1}s'$, где s, s' лежат в $S = R - A$. В то же время пара $(A, \mathfrak{p})$ не является максимальной относительно кольца R.

¶ 8) Если задано кольцо A, то говорят, что многочлен $P(X_1, \ldots, X_n)$ с коэффициентами из A является *доминирующим*, если он имеет вид $X^\alpha + \sum_\beta c_\beta X^\beta$, где $\beta < \alpha$ в упорядоченном произведении $\mathbf{N}^n$ для всех тех β, при которых $c_\beta \neq 0$. Говорят, что подкольцо A кольца R *паранормировано*, если для любого доминирующего многочлена $P \in A[X_1, \ldots, X_n]$ (n — произвольное) имеет место условие $P(s_1, \ldots, s_n) \neq 0$, каковы бы ни были элементы $s_i \in R - A$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

а) Показать, что если A — паранормированное подкольцо в R, то произведение двух любых элементов из $S = R - A$ снова принадлежит S.

б) Пусть A — такое подкольцо кольца R, что произведение любых двух элементов из $S = R - A$ принадлежит S. Пусть $\mathfrak{p}_0$ — простой идеал в A и в R, образованный такими $a \in A$, что $sa \in A$ при любом $s \in S$ (упражнение 6б)). Для того чтобы A было паранормированным в R, необходимо и достаточно, чтобы $A/\mathfrak{p}_0$ было паранормированным в $R/\mathfrak{p}_0$.

в) Пусть R — кольцо, $h\colon R \to R'$ — гомоморфизм колец. Если A' — паранормированное подкольцо в R', то $A = h^{-1}(A')$ паранормировано в R. Вывести отсюда, что если $(A, \mathfrak{p})$ — максимальная пара относительно R (упражнение 7), то A паранормировано в R (воспользоваться б) и упражнениями 7г) и д)).

г) Пусть R' — кольцо и R — некоторое подкольцо в R'. Если A — паранормированное кольцо в R, то показать, что существует такое параиормированное подкольцо A' в R', что $A' \cap R = A$. (Если $S = R - A$ и $S_0 = S \cup \{1\}$, то рассмотреть кольцо $T' = S_0^{-1}R'$ и канонический гомоморфизм h: $R' \to T'$. Пусть B — подкольцо в T', порожденное множеством $h(A) \cup (h(S))^{-1}$, и $\mathfrak{b}$ — идеал в B, порожденный множеством $(h(S))^{-1}$. Показать, что $\mathfrak{b} \neq B$; рассмотреть максимальную относительно T' пару $(A'', \mathfrak{p}'')$, для которой $B \subset A''$ и $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}''$, и взять $A' = h^{-1}(A'')$.)

Сделать отсюда следующий вывод: если R — целостное кольцо, то паранормированные подкольца в R — это пересечения R и *колец нормирования* для поля частных кольца R.

¶ 9) а) Пусть R — кольцо, A — подкольцо в R, x — некоторый элемент из R и S — множество степеней x^k ($k \geqslant 0$) в R. Показать, что, для того чтобы элемент x был целым над A, необходимо и достаточно, чтобы $x/1 \in A[1/x]$ в кольце $S^{-1}R$. Если x не является целым над A элементом, то показать, что существует максимальный идеал $\mathfrak{m}$ в $A[1/x]$, содержащий $1/x$, прообраз которого относительно канонического гомоморфизма $A \to A[1/x]$ является максимальным идеалом в A.

б) Показать, что целое замыкание A' кольца A в кольце R является пересечением паранормированных подколец кольца R (упражнение 8), содержащих A. (Чтобы увидеть, что A' содержится в каждом из этих колец, надо применить упражнения 8а) и 8г); чтобы для всякого элемеита $x \in R$, не являющегося целым над A, найти подкольцо B в R, паранормированное в R и не содержащее x, надо воспользоваться упражнениями 7а) и 8в), рассуждая при этом так же, как в теореме 3n° 3.)

§ 2. Точки

1. *Понятие морфизма для не всюду определенных законов композиции*

Определение 1. *Пусть E и E' — два множества, каждое из которых наделено внутренним законом композиции, обозначаемым через $(x, y) \to x * y$, причем этот закон не обязательно определен всюду. Говорят, что некоторое отображение f: $E \to E'$ является морфизмом, если для любых x, y из E, таких, что для них определен элемент $f(x) * f(y)$, определен также и элемент $x * y$ и выполняется равенство*

$$f(x * y) = f(x) * f(y). \tag{1}$$

Короче говоря, мы должны потребовать, чтобы формула (1) выполнялась всякий раз, когда ее *правая* часть имеет смысл.

Понятие морфизма отличается от понятия *представления* (*Алгебра*, гл. I, § 1, n° 1), в определении которого требуется, чтобы формула (1) выполнялась всякий раз, когда имеет смысл ее *левая* часть. Объединяя оба случая, можно сказать, что оба эти понятия совпадают, когда законы композиции определены всюду.

Определение 2. *Пусть E и E' — два множества, каждое из которых наделено семейством внутренних законов композиц-*

ции $(x, y) \to x *_\alpha y$, $\alpha \in I$. *Говорят, что некоторое отображение* $f\colon E \to E'$ *является морфизмом, если оно представляет собой морфизм для каждого закона композиции* $(x, y) \to x *_\alpha y$.

Точно так же, как и представления, морфизмы удовлетворяют аксиомам (MO_I), (MO_{II}), (MO_{III}) из *Теории множеств*, гл. IV, § 2. Если $f\colon E \to E'$ — некоторый морфизм, то $f(E)$ является устойчивым подмножеством множества E'.

2. Точки

Если K — поле, то напомним, что через $\tilde{K}$ обозначается множество, являющееся *объединением* K и некоторого элемента, обозначаемого символом ∞ (*Algebre*, chap, II, 3e éd., § 9, n° 9); законы композиции на K продолжаются на $\tilde{K}$ с помощью формул (loc. cit.):

(2) $a + \infty = \infty$ для $a \in K$, $a \neq \infty$,

(3) $\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty$ для $a \in \tilde{K}$, $a \neq 0$.

Единственными случаями, в которых композиции не определены, являются, следовательно, $\infty + \infty$, $\infty \cdot 0$ и $0 \cdot \infty$. С другой стороны, отображения $x \to -x$ и $x \to x^{-1}$ продолжаются на $\tilde{K}$, если положить $-\infty = \infty$, $0^{-1} = \infty$, $\infty^{-1} = 0$. Мы будем также употреблять запись $x + (-y) = x - y$.

Множество $\tilde{K}$, называемое *проективным полем*, ассоциированным с полем K, может быть отождествлено с *проективной прямой* $\mathbf{P}_1(K)$ (loc. cit.).

Определение 3. *Пусть* K *и* L *— два поля. Точкой поля* K *со значениями в поле* L *называется любой морфизм* f *из множества* $\tilde{K}$ *в множество* $\tilde{L}$ *(относительно сложения и умножения), для которого* $f(1) = 1$.

Другими словами, если x и y — элементы из $\tilde{K}$ и если определен элемент $f(x) + f(y)$ (соответственно $f(x)f(y)$), то определен элемент $x + y$ (соответственно xy) и

(4) $f(x + y) = f(x) + f(y)$,

(5) $f(xy) = f(x)f(y)$.

Поскольку элемент $\infty + \infty$ не определен, то не определен и элемент $f(\infty) + f(\infty)$; тем самым доказано равенство

(6) $f(\infty) = \infty$.

Аналогичным образом, так как не определен элемент $0 \cdot \infty$, то не определен и элемент $f(0)f(\infty)$, откуда, в силу равенства (6), следует, что

(7) $f(0) = 0$.

С другой стороны,

(8) $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ для всякого $a \in \tilde{K}$.

Действительно, если определен элемент $f(a)f(a^{-1})$, то определен и элемент aa^{-1}, который, следовательно, равен 1. Но тогда $f(a)f(a^{-1})=f(1)=1$, что и доказывает (8) в этом случае. Если же элемент $f(a)f(a)^{-1}$ не определен, то либо $f(a)=0$ и $f(a^{-1})=\infty$, либо $f(a)=\infty$ и $f(a^{-1})=0$, и равенство (8) снова выполнено.

Аналогично доказывается формула

(9) $f(-a)=-f(a)$ для любого $a\in\tilde{K}$.

Формулы (8) и (9) означают, что f является также морфизмом и для законов композиции $(x, y)\to x-y$ и $(x, y)\to xy^{-1}$.

Для элемента $x\in\tilde{K}$ морфизм f называют *конечным* в x, если $f(x)\neq\infty$; согласно (6), это влечет за собой $x\in K$.

Если f: $\tilde{K}\to L$ — некоторая точка, то $f(\tilde{K})$ представляет собой некоторое подмножество в $\tilde{L}$, которое устойчиво относительно законов композиции $(x, y)\to x+y$, $(x, y)\to x-y$, $(x, y)\to xy$ и $(x, y)\to xy^{-1}$ и содержит 1. Если E является множеством конечных элементов из $f(\tilde{K})$, то E представляет собой *подполе* в L и $f(\tilde{K})=\tilde{E}$. Для краткости принято говорить, что E является *полем значений* точки f.

Отображение, являющееся *композицией* двух точек, снова есть точка.

Пусть f — изоморфизм некоторого поля K на некоторое подполе поля L; продолжим f на $\tilde{K}$, полагая $f(\infty)=\infty$. Мы получаем таким образом некоторую точку поля K со значениями в поле L, которая называется *тривиальной* и часто отождествляется с изоморфизмом f.

3. Точки и кольца нормирования

Предложение 1. *Пусть K — поле, A — кольцо нормирования для K и $\kappa(A)$ — поле вычетов кольца A. Продолжим каноническое отображение кольца A на $\kappa(A)$ до отображения h_A: $\tilde{K}\to\widetilde{(\kappa(A))}$ при помощи формулы $h_A(x)=\infty$, если $x\notin A$. Отображение h_A определяет некоторую точку поля K, полем значений которой является поле $\kappa(A)$.*

Ясно, что $h_A(1)=1$.

Покажем, что h_A является морфизмом относительно сложения. Пусть x, y — два элемента из $\tilde{K}$, для которых элемент $h_A(x)+h_A(y)$ определен. Тогда один из двух элементов x, y принадлежит A, так что элемент $x+y$ определен. Если $x\in A$ и $y\in A$, то ясно, что выполняется равенство

$$h_A(x)+h_A(y)=h_A(x+y).$$

Если $x\in A$ и $y\notin A$, то $x+y\notin A$ и обе части приведенной выше формулы обращаются в ∞.

Покажем, наконец, что h_A является морфизмом относительно умножения. Пусть $x \in \tilde{K}$, $y \in \tilde{K}$ — такие элементы, что элемент $h_A(x)\,h_A(y)$ определен. Если $x \in A$ и $y \in A$, то ясно, что элемент xy определен и $h_A(x)\,h_A(y) = h_A(xy)$. Предположим теперь, что один из элементов x, y, например y, не принадлежит кольцу A; поскольку $h_A(y) = \infty$, то $h_A(x) \neq 0$, т. е. $x \notin \mathfrak{m}(A)$, откуда $x^{-1} \in A$; отсюда немедленно следует, что $xy \in A$, и, значит, $h_A(xy) = \infty = h_A(x)\,h_A(y)$. Этим доказано предложение 1.

Если j — некоторый изоморфизм поля $\kappa(A)$ на подполе некоторого поля L, то $j \circ h_A$: $\tilde{K} \to L$ является точкой поля K со значениями в поле L. Этим способом можно получить *все* точки поля K. Точнее, имеет место следующее предложение:

Предложение 2. *Пусть K и L — два поля и f — некоторая точка поля K со значениями в поле L. Тогда существует кольцо нормирования A для поля K и изоморфизм j из $\kappa(A)$ на подполе поля L, для которых $f = j \circ h_A$. Эти условия определяют A и j единственным образом. Кольцо A представляет собой множество тех $x \in K$, для которых $f(x) \neq \infty$, и $\mathfrak{m}(A)$ — множество тех $x \in K$, для которых $f(x) = 0$.*

Если $f = j \circ h_A$, то условие $f(x) \neq \infty$ (соответственно $f(x) = 0$) эквивалентно условию $h_A(x) \neq \infty$ (соответственно $h_A(x) = 0$); следовательно, оно эквивалентно и условию $x \in A$ (соответственно $x \in \mathfrak{m}(A)$). Поэтому A определяется единственным образом и, так как h_A — сюръективное отображение, изоморфизм j также определен однозначно.

Пусть теперь f — произвольная точка поля K со значениями в L; обозначим через A множество тех $x \in K$, для которых $f(x) \neq \infty$. Если $x \in A$ и $y \in A$, то композиции $f(x) - f(y)$ и $f(x)\,f(y)$ определены и $\neq \infty$; тем самым доказаны включения $x - y \in A$ и $xy \in A$; следовательно, A является подкольцом в K. Если $x \notin A$, то $f(x) = \infty$; значит, $f(x^{-1}) = 0$ и x^{-1} принадлежит ядру $\mathfrak{m}$ гомоморфизма f', полученного ограничением f на A. Обратно, если $y \in \mathfrak{m}$, то $y^{-1} \notin A$. Это показывает, что A является кольцом нормирования для K, а $\mathfrak{m}$ служит максимальным идеалом этого кольца. Пусть j — инъективный гомоморфизм из $\kappa(A)$ в поле L, полученный из f' переходом к факторкольцам. Тогда $f(x) = j(h_A(x))$ для любого $x \in A$, и это равенство остается верным для $x \notin A$, ибо обе его части обращаются тогда в ∞.

Композиция $f = j \circ h_A$ называется *каноническим разложением* точки f. Говорят, что A является *кольцом* точки f, $\mathfrak{m}(A)$ — *идеалом* точки f и $\kappa(A)$ — *полем вычетов* точки f. Для того чтобы две точки f: $\tilde{K} \to \tilde{L}$ и f': $\tilde{K} \to \tilde{L}'$ имели одно и то же кольцо, необходимо и достаточно, чтобы существовал изоморфизм s поля

значений точки f на поле значений точки f', при котором $f' = s \circ f$. В этом случае говорят, что f и f' *эквивалентны*. Мы видим, что любой результат о кольцах нормирования можно переформулировать как результат о точках и обратно; так мы и будем поступать в последующих разделах.

Примеры точек. 1) Пусть K — поле. Тождественное отображение поля K на себя является тривиальной точкой с кольцом K и идеалом (0).

2) Пусть k — поле. Для любого $u \in k(\widetilde{(T)})$ положим $f(u) = \infty$, если $u \notin k[\widetilde{[T]}]$, и определим $f(u)$ как свободный член ряда u, если $u \in k[[T]]$. Тогда f является точкой поля $k((T))$ с полем вычетов k и кольцом $k[[T]]$. Действительно, $k[[T]]$ представляет собой кольцо нормирования для поля $k((T))$ (§ 1, n° 4, пример 3), и ограничение функции f на $k[[T]]$ отождествляется с каноническим гомоморфизмом поля $k[[T]]$ на поле вычетов этого кольца.

3) Пусть k — поле, a — некоторый элемент из k и A — множество таких рациональных дробей $u \in k(X)$, что a допускает подстановку в u (*Алгебра*, гл. IV, § 3, n° 2). Если через $\mathfrak{p}$ обозначить простой идеал $(X - a)$ кольца $k[X]$, то $A = k[X]_{\mathfrak{p}}$, так что A представляет собой кольцо нормирования для поля $k(X)$ (§ 1, n° 4, предложение 2). Для любого $u \in \widetilde{k(X)}$ положим $f(u) = \infty$, если $u \notin A$, и $f(u) = u(a)$, если $u \in A$. Тогда отображение f является точкой поля $k(X)$ с полем вычетов k и кольцом A; действительно, ограничение отображения f на кольцо A есть гомоморфизм кольца A на k (*Алгебра*, гл. IV, § 3, предложение 2) с ядром $\mathfrak{p}A = \mathfrak{m}(A)$. Говорят, что элемент $f(u) \in k$ получается подстановкой $X = a$ в u.

4) Пусть S — связное комплексное аналитическое многообразие размерности 1 и K — поле мероморфных функций на S. Для любой точки $z_0 \in S$ отображение $f \to f(z_0)$ поля K в $\tilde{\mathbf{C}}$ является точкой поля K, кольцо которой равно множеству тех функций $f \in K$, которые голоморфны в z_0, и идеал которой является множеством функций $f \in K$, равных нулю в z_0. Этот пример, а также некоторые другие аналогии оправдывают введение термина „точка“.

4. *Продолжение точек*

Предложение 3. *Пусть K — поле, S — некоторое подкольцо в K и f — гомоморфизм кольца S в некоторое алгебраически замкнутое поле L. Тогда существует точка поля K со значениями в поле L, являющаяся продолжением гомоморфизма f.*

Согласно предложению 1, это предложение является переформулировкой теоремы 2 § 1, n°2.

Предложение 4. *Пусть K — поле, f — точка поля K со значениями в некотором поле L и K' — расширение поля K. Тогда существует расширение L' поля L и точка f' поля K' со значениями в поле L', являющаяся продолжением точки f. Если $x_1, \ldots, x_n$ — элементы поля K', алгебраически независимые над K, и $a_1, \ldots, a_n$ — произвольные элементы из L, то можно выбрать точку f' таким образом, чтобы $f'(x_i) = a_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Пусть V — кольцо точки f, g — ограничение отображения f на V и g' — продолжение отображения g на кольцо $V[x_1, \ldots, x_n]$, при котором $g'(x_i) = a_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. В качестве L' достаточно выбрать какое-нибудь алгебраическое замыкание поля L, а затем к g' и L' применить предложение 3: мы получаем точку f': $\tilde{K}' \to \tilde{L}'$, продолжающую g'; если $x \in \tilde{K} - V$, то $x^{-1} \in \mathfrak{m}(V)$, откуда $f'(x^{-1}) = g(x^{-1}) = 0$ и $f'(x) = \infty = f(x)$. Следовательно, f' продолжает f.

5. Характеризация целых элементов с помощью точек

Предложение 5. *Пусть K — поле, S — некоторое подкольцо в K, h — некоторый гомоморфизм подкольца S в какое-либо поле и $\mathfrak{p}$ — ядро гомоморфизма h. Для того чтобы элемент x поля K был целым над локальным кольцом $S_{\mathfrak{p}}$, необходимо и достаточно, чтобы всякая точка поля K, продолжающая гомоморфизм h, была конечна в x.*

Если f — некоторая точка поля K, продолжающая гомоморфизм h, то f конечна на $S_{\mathfrak{p}}$ и равна нулю на $\mathfrak{p}S_{\mathfrak{p}}$. Следовательно, кольцо точки f доминирует над $S_{\mathfrak{p}}$. Обратно, если V — кольцо нормирования для поля K, доминирующее над $S_{\mathfrak{p}}$, то V является кольцом некоторой точки f, ограничение которой на S есть гомоморфизм с тем же ядром, что и у гомоморфизма h. Заменяя f на некоторую эквивалентную точку, мы видим, что V представляет собой кольцо точки поля K, продолжающей гомоморфизм h. Утверждать, что всякая точка поля K, продолжающая h, конечна в точке x, это все равно, что утверждать, что x принадлежит всем кольцам нормирования для поля K, доминирующим над $S_{\mathfrak{p}}$. Предложение 5 следует теперь из теоремы 3 § 1, n°3.

Предложение 6. *Пусть K — поле, S — некоторое подкольцо K. Для того чтобы некоторый элемент x из K был целым над S, необходимо и достаточно, чтобы любая точка поля K, конечная на S, была конечной и в x.*

Это также сразу следует из теоремы 3 § 1, n°3.

Упражнения

1) Пусть Ω — расширение поля K, E и F — два расширения поля K, содержащиеся в Ω и линейно свободные над K, L — расширение поля K, содержащееся в E. Пусть f — точка поля E со значениями в поле L, которая сводится к тождественному автоморфизму на поле K. Показать, что существует, и притом единственная, точка поля $K(E \cup F)$ со значениями в $K(L \cup F)$, продолжающая f и сводящаяся к тождественному автоморфизму на F. (Если A — кольцо точки f, то заметить, что f продолжается единственным образом до гомоморфизма g из $F(A)$ в $K[L \cup F]$, сводящегося к тождественному отображению на F, и что если $\mathfrak{m}$ — идеал точки f, то любой элемент $z \in F(A)$, для которого $g(z) = 0$, можно записать в виде xu, где $x \in \mathfrak{m}$, $u \in F(A)$ и $g(u) \neq 0$. Закончить рассуждения, заметив, что $K(E \cup F)$ есть поле частных кольца $F[A]$.)

2) Пусть K, K' — два расширения поля k и f, f' — точки полей K и K' соответственно со значениями в одном и том же алгебраически замкнутом поле L. Предположим, что ограничения f и f' на k совпадают. Показать, что существует композит (F, i, i') расширений K и K' (*Алгебра*, гл. VIII, § 8) и точка g поля F со значениями в L, такие, что $f(x) = g(i(x))$ для $x \in \tilde{K}$ и $f'(x) = g(i'(x'))$ для $x' \in \tilde{K'}$. (Пусть V, V' — кольца точек f и f', A — их общее пересечение с k, h: $V \otimes_A V' \to L$ — такой гомоморфизм, что $h(a \otimes a') = f(a) f'(a')$ при $a \in V$, $a' \in V'$. Используя тот факт, что V и V' — плоские A-модули (§ 3, п° 5, лемма 1), доказать, что если $a \neq 0$, $a' \neq 0$, то элемент $a \otimes a' = (a \otimes 1)(1 \otimes a')$ не является делителем нуля; если S — мультипликативная система в $B = V \otimes_A V'$, образованная этими элементами, то $S^{-1}B$ содержит подполя K_1, K_1', изоморфные соответственно полям K и K', и представляет собой кольцо, порожденное множеством $K_1 \cup K_1'$. Показать, что если $\mathfrak{q}$ — ядро гомоморфизма h, то существует такой простой идеал $\mathfrak{p}$ в B, что $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ и $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, и показать, что можно взять в качестве F поле частных кольца $S^{-1}B/S^{-1}\mathfrak{p}$.)

3) а) Пусть K — поле, f — точка поля K со значениями в некотором упорядочиваемом поле L (*Алгебра*, гл. VI, § 2, упражнение 8); показать, что K упорядочиваемое. (Заметить, что для любого конечного семейства элементов $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ поля K всегда имеется такой индекс j, что $f(a_i/a_j) \neq \infty$ для любого i.)

Если $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — такая последовательность элементов поля K, что $f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \neq \infty$, то показать, что $f(x_i) \neq \infty$ для всех i.

б) Пусть K — упорядоченное поле, а G — некоторое подполе в K; показать, что кольцо $F(G)$ элементов из K, не являющихся бесконечно большими относительно G (loc. cit., упражнение 11), есть кольцо нормирования для K и идеал $I(G)$ бесконечно малых относительно G элементов из $F(G)$ является максимальным идеалом этого кольца; следовательно, на K имеется точка со значениями в поле $k(G) = F(G)/I(G)$, обращающаяся в тождественное отображение на G; эту точку называют *канонической точкой* поля K относительно подполя G.

в) Показать, что если не существует расширения поля G, содержащегося в K, отличного от G и сравнимого с G, то $k(G)$ алгебраично над G (заметить, что если $t \in K$ не принадлежит G, то поле $G(t)$ содержит некоторый бесконечно малый относительно G элемент $u \neq 0$ и $G(t)$ является алгебраическим расширением поля $G(u)$).

¶ 4) Упорядоченное поле K называется *евклидовым*, если для любого $x \geqslant 0$ из K существует такой элемент $y \in K$, что $x = y^2$.

а) Пусть K — евклидово упорядоченное поле, G — такое подполе в K, что не существует расширения поля G, содержащегося в K, отличного от G и сравнимого с G. Показать, что если f — тождественная на G точка поля K со значениями в некотором упорядоченном поле L, являющемся алгебраическим расширением поля G, то f эквивалентна канонической точке поля K относительно подполя G. (Можно считать, что f принимает значения в максимальном упорядоченном поле N, являющемся алгебраическим расширением поля L. Заметить, что поле G евклидово и что если $x \in G$, $y \in K$ и $x < y$, то $f(y) = \infty$ или $f(y) > x$. Если A и $\mathfrak{p}$ обозначают кольцо и идеал точки f, то показать последовательно, что $\mathfrak{p} \subset I(G)$, $F(G) \subset A$, $I(G) \subset \mathfrak{p}$ и $A \subset F(G)$, учитывая при этом, что N сравнимо с G.)

б) Пусть K — евклидово упорядоченное поле, f — точка поля K со значениями в некотором максимальном упорядоченном поле L, A и $\mathfrak{p}$ — кольцо и идеал точки f. Пусть G — подполе поля K, максимальное среди таких подполей E в K, что $E \cap \mathfrak{p} = 0$. Показать, что $G \subset A$ и что G алгебраически замкнуто в K, а потому G — евклидово. Доказать, что не существует расширения поля G, содержащегося в K, отличного от G и сравнимого с G. Кроме того, подполе поля L, порожденное множеством $f(A)$, алгебраично над $f(G)$ и, следовательно, точка f эквивалентна канонической точке поля K относительно подполя G.

в) Пусть K — максимальное упорядоченное поле, L — максимальное упорядоченное подполе в K, отличное от K и такое, что K сравнимо с L (*Алгебра*, гл. VI, § 2, упражнение 15). Показать, что не существует точки f поля K со значениями в L, сводящейся к тождественному автоморфизму на L.

¶ 5) Пусть K — поле, f — точка поля K со значениями в некотором максимальном упорядоченном поле L.

а) Для любого элемента $\alpha \in K$ показать, что существует продолжение точки f или на $K(\sqrt{\alpha})$, или на $K(\sqrt{-\alpha})$, являющееся точкой со значениями в L. (Рассмотреть два случая в зависимости от того, существует или нет такой элемент $a \in K$, что $f(a^2\alpha)$ не равно ни 0, ни ∞.)

б) Вывести из а), что существуют расширение E поля K, являющееся максимальным упорядоченным полем, и продолжение точки f на E, являющееся точкой поля E со значениями в L. (Свести к случаю, когда K является евклидовым и применить упражнение 4а).)

6) Пусть A — целозамкнутое кольцо, K — его поле частных, $\mathfrak{p}$ — некоторый простой идеал в A и k — поле частных факторкольца $A/\mathfrak{p}$. Показать, что если кольцо $A_{\mathfrak{p}}$ не является кольцом нормирования, то существует кольцо нормирования V поля K, доминирующее над $A_{\mathfrak{p}}$, поле вычетов которого является трансцендентным расширением поля k (воспользоваться упражнением 14б) гл. V, § 2).

§ 3. Нормирования

1. Нормирования на кольце

Пусть Γ — *совершенно упорядоченная* коммутативная группа, операция в которой записывается аддитивно. Начиная с этого параграфа, всюду в этой главе мы будем рассматривать для такой группы множество, получаемое присоединением к Γ некоторого элемента, обозначаемого через $+\infty$. Это множество мы будем обозначать через Γ_∞ и наделим его: 1) отношением совершенного порядка, в котором $+\infty$ является *наибольшим элементом*, т. е. таким элементом, что $\alpha < +\infty$ для всякого

$\alpha \in \Gamma$; 2) структурой коммутативного моноида, закон композиции которого индуцирует на Γ закон композиции заданной группы и который определяется условиями

$$(+\infty)+(+\infty)=+\infty, \qquad \alpha+(+\infty)=+\infty$$

для любого $\alpha \in \Gamma$. Немедленно проверяется, что этот закон коммутативен и ассоциативен и что отношение $\alpha \leqslant \beta$ в Γ_∞ влечет за собой $\alpha+\gamma \leqslant \beta+\gamma$ для всякого $\gamma \in \Gamma_\infty$.

Определение 1. *Пусть C — некоторое кольцо (не обязательно коммутативное), Γ — совершенно упорядоченная коммутативная группа, записываемая аддитивно. Нормированием кольца C со значениями в группе Γ называется любое отображение $v\colon C \to \Gamma_\infty$, удовлетворяющее следующим условиям:*

($\mathrm{VL_I}$) $v(xy)=v(x)+v(y)$ *для* $x \in C$, $y \in C$;

($\mathrm{VL_{II}}$) $v(x+y) \geqslant \inf(v(x), v(y))$ *для* $x \in C$, $y \in C$;

($\mathrm{VL_{III}}$) $v(1)=0$ *и* $v(0)=+\infty$.

Если кольцо C не имеет делителей нуля, отличных от 0, то единственное отображение v_0 кольца C в Γ_∞, при котором $v_0(x)=0$ для $x \neq 0$ и $v_0(0)=+\infty$, является нормированием, называемым *несобственным нормированием* кольца C. Если $z \in C$ — такой элемент, что $z^n=1$ для некоторого целого $n \geqslant 1$, то, в силу условия ($\mathrm{VL_I}$), имеет место равенство $nv(z)=v(z^n)=0$ и, следовательно, $v(z)=0$ для *любого* нормирования v кольца C, так как Γ — совершенно упорядоченная группа. В частности, $v(-1)=0$, откуда $v(-x)=v(x)$ для любого $x \in C$. Кроме того, из условия ($\mathrm{VL_I}$) следует, что $v(xy)=v(yx)$, какими бы ни были x, $y \in C$. Если x — обратимый элемент кольца C, то $v(x^{-1})=-v(x)$.

Предложение 1. *Пусть v — нормирование (не обязательно коммутативного) кольца C. Для любых элементов $x_i \in C$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ имеет место соотношение*

$$v\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geqslant \inf_{1 \leqslant i \leqslant n} v(x_i). \tag{1}$$

Кроме того, если существует единственный индекс k, для которого $v(x_k)=\inf\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} v(x_i)$, то это соотношение превращается в равенство. В частности, если $v(x) \neq v(y)$, то $v(x+y)=\inf(v(x), v(y))$.

Соотношение (1) выводится из аксиомы ($\mathrm{VL_{II}}$) с помощью индукции по n. Если существует единственный индекс k, для которого $v(x_k)=\inf\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} v(x_i)$, то положим $y=\sum\limits_{i \neq k} x_i$ и $z=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$;

тогда $v(y) > v(x_k)$ и $v(z) \geqslant v(x_k)$ в силу (1). Если бы выполнялось неравенство $v(z) > v(x_k)$, то равенство $x_k = z - y$ приводило бы к тому, что $v(x_k) \geqslant \inf(v(z), v(y)) > v(x_k)$, т. е. к противоречию; отсюда следует, что $v(z) = v(x_k)$. Тем самым второе утверждение доказано.

Следствие. *Если конечная последовательность элементов* $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *кольца* C *такова, что* $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ *(при* $n \geqslant 2$*), то существуют по крайней мере два различных индекса* j, k, *для которых* $v(x_j) = v(x_k) = \inf_{1 \leqslant i \leqslant n} v(x_i)$.

Если бы существовал лишь один индекс k, для которого $v(x_k) = \inf_{1 \leqslant i \leqslant n} (v(x_i))$, то из предложения 1 следовало бы, что $v(x_k) = v(0) = +\infty$, откуда $v(x_i) = +\infty$ при любом i, а это противоречит тому, что $n \geqslant 2$, и предположению, сделанному относительно индекса k.

Замечания. 1) Если $v\colon C \to \Gamma_\infty$ — любое нормирование кольца C и $u\colon B \to C$ — гомоморфизм некоторого кольца B в C, то немедленно проверяется, что композиция отображений $B \xrightarrow{u} C \xrightarrow{v} \Gamma_\infty$ является *нормированием* кольца B со значениями в группе Γ.

2) Из условий (VL_I) и (VL_{II}) сразу же видно, что множество $v^{-1}(+\infty)$ представляет собой *двусторонний идеал* $\mathfrak{p}$ в кольце C, отличный от C в силу (VL_{III}). Кроме того, если x, y — два элемента из C, для которых $v(xy) = +\infty$, то из (VL_I) следует, что обязательно $v(x) = +\infty$ или $v(y) = +\infty$. Другими словами, факторкольцо $C/\mathfrak{p}$ *не имеет делителей нуля, отличных от нуля*. Непосредственно проверяется, что отображение $\bar{v}\colon C/\mathfrak{p} \to \Gamma_\infty$, полученное из v при переходе к факторкольцу, представляет собой *нормирование* кольца $C/\mathfrak{p}$, и прообраз элемента $+\infty$ при этом нормировании сводится к 0.

2. *Нормирования на теле*

Предложение 2. *Пусть* K *— некоторое тело (не обязательно коммутативное),* v *— нормирование тела* K *со значениями в группе* Γ. *Тогда*

(i) *для* $x \neq 0$ *имеет место соотношение* $v(x) \neq +\infty$;

(ii) *множество* A *тех элементов* $x \in K$, *для которых* $v(x) \geqslant 0$, *представляет собой подкольцо в* K;

(iii) *для любого* $\alpha \geqslant 0$ *из группы* Γ *множество* V_α (соответственно *множество* V'_α) *тех элементов* $x \in A$, *для которых* $v(x) > \alpha$ (соответственно $v(x) \geqslant \alpha$), *представляет собой двусто-*

ронний идеал в A и всякий ненулевой идеал кольца A (левый или правый) содержит один из идеалов V'_α;

(iv) *множество $\mathfrak{m}(A)$ тех элементов $x \in A$, для которых $v(x) > 0$, является наибольшим идеалом в A, отличным от A; множество $U(A) = A - \mathfrak{m}(A)$ представляет собой совокупность обратимых элементов кольца A и $\kappa(A) = A/\mathfrak{m}(A)$ является телом (не обязательно коммутативным);*

(v) *для всякого $x \in K - A$ справедливо включение $x^{-1} \in \mathfrak{m}(A)$.*

Утверждение (i) следует из того, что множество $v^{-1}(+\infty)$ есть идеал тела K, отличный от K. Проверка того, что A — кольцо, а V_α, V'_α — двусторонние идеалы, тривиальна в силу аксиом (VL_I), (VL_{II}) и (VL_{III}). Если $\mathfrak{a}$ — любой идеал (например, левый) кольца A и если $x \neq 0$ — элемент из A, то для всякого $y \in A$, удовлетворяющего условию $v(y) \geqslant v(x)$, можно записать $y = zx$, где $z = yx^{-1}$; следовательно, $v(z) = v(y) - v(x) \geqslant 0$ и, значит, $z \in A$. Иначе говоря, левый идеал Ax содержит идеалы V'_α, где $\alpha \geqslant v(x)$. Множество $U(A) = A - \mathfrak{m}(A)$ представляет собой совокупность таких $x \in K$, что $v(x) = 0$; если $x \in U(A)$, то

$$v(x^{-1}) = -v(x) = 0,$$

откуда $x^{-1} \in U(A)$. Обратно, если $y \in A$ — обратимый элемент в A, то $v(y) \geqslant 0$, $v(y^{-1}) \geqslant 0$ и $v(y) + v(y^{-1}) = 0$, откуда $v(y) = 0$ и $y \in U(A)$. Тем самым доказано (iv), а (v) следует непосредственно из определений.

Говорят, что A (соответственно $\mathfrak{m}(A)$, $\kappa(A)$) является *кольцом* (соответственно *идеалом*, *телом вычетов*) нормирования v на теле K.

Ясно, что $U(A)$ представляет собой ядро гомоморфизма $v\colon K^* \to \Gamma$ и что *образ* $v(K^*)$ при гомоморфизме v мультипликативной группы K^* является *подгруппой* аддитивной группы Γ, называемой *группой порядков* или *группой значений* нормирования v, которая, следовательно, изоморфна группе $K^*/U(A)$. Для любого $x \in K$ элемент $v(x)$ моноида Γ_∞ иногда называется *нормированием* или *порядком* элемента x относительно v. Говорят, что два нормирования v, v' тела K *эквивалентны*, если они имеют *одно и то же кольцо*.

Предложение 3. *Для того чтобы два нормирования v, v' на теле K (не обязательно коммутативном) были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой изоморфизм λ упорядоченной группы $v(K^*)$ на упорядоченную группу $v'(K^*)$, что $v' = \lambda \circ v$.*

Действительно, пусть v и v' эквивалентны. По предположению кольцо A нормирования v совпадает с кольцом нормирования v' и отображения v, v' (ограниченные на K^*) раз-

лагаются на гомоморфизмы $K^* \to K^*/U(A) \xrightarrow{\mu} v(K^*)$, $K^* \to K^*/U(A) \xrightarrow{\nu} \xrightarrow{\nu} v'(K^*)$, где μ и ν — изоморфизмы. Кроме того, множество (строго) положительных элементов группы $v(K^*)$ (соответственно группы $v'(K^*)$) есть образ относительно μ (соответственно ν) множества классов $\bmod(U(A))$ элементов $\neq 0$ из $\mathfrak{m}(A)$; отсюда мы заключаем, что отображение $\lambda = \nu \circ \mu^{-1}$ и есть искомое отображение. Доказательство обратного утверждения очевидно.

Предположим теперь, что K — поле. Тогда для всякого нормирования v поля K кольцо A нормирования v является *кольцом нормирования для поля* K в смысле определения 2 § 1, n° 2 (это оправдывает нашу терминологию). Предыдущее утверждение следует из предложения 2в) и теоремы 1в) § 1, n° 2. *Обратно*, напомним, что для всякого целостного кольца B с полем частных K отношение делимости $x \mid y$ (эквивалентное включению $y \in Bx$) превращает K^* в предупорядоченную группу, для которой *ассоциированная упорядоченная* группа Γ_B представляет собой факторгруппу $K^*/U(B)$ группы K^* по группе $U(B)$ обратимых элементов кольца B; положительными элементами в этой группе являются элементы из $B^*/U(B)$ (где $B^* = B - \{0\}$); отображение $x \to Bx$ определяет при переходе к факторгруппе изоморфизм упорядоченной группы $K^*/U(B)$ на группу (упорядоченную отношением $\supset$) ненулевых главных дробных идеалов поля K (*Алгебра*, гл. VI, § 1, n° 5). Кольца A с полем частных K, для которых группа $\Gamma_A = K^*/U(A)$ *совершенно упорядочена*, — это в точности *кольца нормирования для поля* K (§ 1, n° 2, теорема 1г)). Если через v_A обозначить канонический гомоморфизм из K^* на Γ_A, то немедленно проверяется, что отображение v_A (продолженное с помощью равенства $v_A(0) = +\infty$) представляет собой *нормирование* (называемое *каноническим*) поля K, кольцо которого есть A. Каждое нормирование, эквивалентное нормированию v_A, записывается в виде $v = \sigma \circ v_A$, где σ — некоторый изоморфизм группы Γ_A на подгруппу группы, в которой v принимает свои значения (предложение 3). Говорят, что $\sigma \circ v_A$ есть *каноническое разложение нормирования* v.

Предложение 4. *Пусть C — целостное кольцо, K — его поле частных, $C^* = C - \{0\}$ и v: $C \to \Gamma_\infty$ — некоторое нормирование кольца C, при котором $v^{-1}(\infty) = \{0\}$. Тогда существует, и притом единственное, нормирование w поля K, которое продолжает v, и $w(K^*)$ является подгруппой группы Γ, порожденной группой $v(C^*)$.*

В силу теоремы 2 из *Алгебры*, гл. I, § 2, n° 7, существует, и притом единственный, гомоморфизм w группы K^* в группу Γ, который продолжает $v \mid C^*$, и группа $w(K^*)$ порождается моно-

идом $v(C^*)$. Остается поэтому доказать, что отображение w удовлетворяет аксиоме (VL_{II}). Таким образом, пусть $x \in K^*$, $y \in K^*$ — такие элементы, что $x+y \in K^*$. Существует такой элемент $a \in C^*$, что $ax \in C^*$ и $ay \in C^*$, откуда $a(x+y) \in C^*$. Поскольку ограничение отображения w на C^* удовлетворяет (VL_{II}),

$$w(a(x+y)) \geqslant \inf(w(ax),\ w(ay)).$$

Отбрасывая $w(a)$ в обеих частях этого неравенства, получаем

$$w(x+y) \geqslant \inf(w(x),\ w(y)).$$

3. *Переформулировки*

Пусть K — поле, f — некоторая точка поля K, v — некоторое нормирование поля K и A — некоторое кольцо нормирования для поля K. Мы будем говорить, что A, f и v *ассоциированы*, если A — кольцо точки f и кольцо нормирования v. В силу результатов n° 1 и § 2, n° 3, каждый из трех объектов A, f и v определяется двумя другими (с точностью до эквивалентности, с которой рассматриваются точки и нормирования). В частности, имеют место следующие эквивалентности:

$$\begin{array}{lll}
x \in A & \Leftrightarrow f(x) \neq \infty & \Leftrightarrow v(x) \geqslant 0, \\
x \in \mathfrak{m}(A) & \Leftrightarrow f(x) = 0 & \Leftrightarrow v(x) > 0, \\
x \in A - \mathfrak{m}(A) = U(A) & \Leftrightarrow f(x) \neq 0 \text{ и } f(x) \neq \infty & \Leftrightarrow v(x) = 0, \\
x \in K - A & \Leftrightarrow f(x) = \infty & \Leftrightarrow v(x) < 0.
\end{array}$$

Любой результат, справедливый для колец нормирования, точек или нормирований, можно переформулировать как результат относительно остальных двух понятий. Так, например, из предложения 4 § 2, n° 4, мы получаем

Предложение 5. *Пусть K — поле, v — нормирование поля K и K' — некоторое расширение поля K. Тогда существует нормирование v' поля K', ограничение которого на K эквивалентно нормированию v.*

Пусть Γ_v и $\Gamma_{v'}$ — группы порядков нормирований v и v'. Так как ограничение v' на K эквивалентно v, существует изоморфизм λ группы $\Gamma_{v'}$ на некоторую подгруппу группы Γ_v, при котором $v' = \lambda \circ v$ на поле K. Если отождествить Γ_v и $\lambda(\Gamma_{v'})$ с помощью λ, то будет ясно, что v' продолжает v.

Следует заметить, что $\Gamma_{v'}$ является, вообще говоря, группой, отличной от $\lambda(\Gamma_v)$, и класс эквивалентности нормирования v' не обязательно единствен. Мы вернемся к обсуждению этого вопроса в § 8.

Истолковав в соответствующих терминах теорему 3 § 1, n° 3 (или предложение 6 § 2, n° 5), получаем:

Предложение 6. *Пусть K — поле, A — подкольцо в K и x — некоторый элемент из K. Для того чтобы x был целым над A, необходимо и достаточно, чтобы всякое нормирование поля K, положительное на A, было положительно в x.*

Начиная с этого момента мы будем, как правило, оставлять читателю заботу об истолкованиях в тех или иных терминах утверждений, аналогичных предыдущим.

4. Примеры нормирований

Примеры колец нормирования, приведенные в § 1, n° 4, дают нам первые четыре из следующих примеров:

Пример 1. Любое нормирование *конечного* поля F является несобственным, так как каждый элемент из F^* представляет собой корень из единицы.

Пример 2. Если K — подполе поля K', то *ограничение на K* любого нормирования поля K' является нормированием поля K.

Пример 3. Пусть k — поле и $K = k((T))$. Отображение v, сопоставляющее каждому ненулевому формальному ряду его *порядок* (*Алгебра*, гл. IV, § 5, n° 7), является нормированием поля K, группа порядков которого есть $\mathbf{Z}$, а кольцом служит $k[[T]]$. Ассоциированная точка представляет собой канонический гомоморфизм $f\colon k[[T]] \to k$, продолженный на $k((T))$ с помощью равенства $f(u) = \infty$, если $u \notin k[[T]]$.

Пример 4. Пусть A — кольцо главных идеалов, K — его поле частных и p — какой-нибудь экстремальный элемент из A. Для $x \in K^*$ обозначим через $v_p(x)$ показатель элемента p в разложении элемента x на экстремальные (*Алгебра*, гл. VII, § 1, n° 3, теорема 2); немедленно проверяется, что v_p является нормированием, группа порядков которого есть $\mathbf{Z}$ и кольцо которого равно A_{Ap}. В силу предложения 3 § 1, n° 4, мы получаем таким способом все, с точностью до эквивалентности, положительные на A нормирования поля K, не являющиеся несобственными. Положив $A = \mathbf{Z}$, мы вновь получаем p-адические нормирования поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$ (*Topologie générale*, chap. IX, § 3, n° 2). Этими нормированиями, с точностью до эквивалентности, исчерпываются все нормирования поля $\mathbf{Q}$, не являющиеся несобственными (§ 1, n° 4, следствие 1 предложения 3). Пусть $A = k[X]$, где k — некоторое поле. Тогда все нормирования поля $k(X)$, которые не являются несобственными, но ограничение которых на k несобственное, представляют собой (с точностью до эквивалентности), с одной стороны, нормирования v_P, где P пробегает множество непривo-

димых унитарных многочленов кольца $k[X]$, а с другой стороны, нормирование v, определенное так: $v(P/Q) = \deg(Q) - \deg(P)$ для $P \in k[X]$ и $Q \in k[X]$ (§ 1, n° 4, следствие 2 предложения 3). Для этих нормирований, очевидно, $\mathbf{Z}$ является группой порядков и их поля вычетов представляют собой моногенные алгебраические расширения поля k (*Алгебра*, гл. V, § 3, n° 1).

Пример 5. Отображение $P(X, Y) \to P(T, e^T)$ кольца $\mathbf{C}[X, Y]$ в поле $\mathbf{C}((T))$ инъективно (*Теория функций действительной переменной*, гл. IV, § 2, предложение 9); следовательно, это отображение продолжается до некоторого изоморфизма поля $\mathbf{C}(X, Y)$ на подполе в $\mathbf{C}((T))$. Ограничение на это подполе нормирования поля $\mathbf{C}((T))$, определенного в примере 3, определяет некоторое нормирование поля $\mathbf{C}(X, Y)$, несобственное на $\mathbf{C}$, группа порядков которого равна $\mathbf{Z}$, а поле вычетов есть $\mathbf{C}$.

Предложение 4 n° 2 позволяет построить нормирование, группа порядков и поле вычетов которого заранее заданы:

Пример 6. Пусть Γ — совершенно упорядоченная группа и k — некоторое поле. Пусть Γ_+ — моноид положительных элементов из Γ и C — алгебра моноида Γ_+ над полем k. По определению алгебра C обладает базисом $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma_+}$ над полем k, таблица умножения которого задается равенством $x_\alpha x_\beta = x_{\alpha+\beta}$. Если $x = \sum_\alpha a_\alpha x_\alpha$ — произвольный ненулевой элемент из C, то положим $v(x) = \inf_{a_\alpha \neq 0} (a_\alpha)$ и положим $v(0) = +\infty$; немедленно проверяется, что отображение v алгебры C в моноид Γ_∞ удовлетворяет условиям $(\mathrm{VL_I})$ и $(\mathrm{VL_{II}})$ из n° 1, а также то, что кольцо C целостное. Пусть K — поле частных кольца C и w — нормирование поля K, продолжающее отображение v (предложение 4 n° 2). Поскольку любой элемент группы Γ представляет собой разность двух положительных элементов, группой порядков нормирования w служит группа Γ. Пусть A — кольцо нормирования w и $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал; мы сейчас покажем, что A является прямой суммой $\mathfrak{m}$ и k (k отождествлено с $k \cdot 1$), откуда и будет следовать, что поле вычетов нормирования w изоморфно полю k. Ясно, что $\mathfrak{m} \cap k = (0)$. С другой стороны, обозначив через $\mathfrak{p}$ идеал в C, порожденный элементами x_α, где $\alpha > 0$, получим, что всякий элемент x с нормированием, равным 0 в поле K, может быть представлен в виде $(a + y)/(b + z)$, где $a \in k^*$, $b \in k^*$, $y \in \mathfrak{p}$, $z \in \mathfrak{p}$. В таком случае имеем

$$x = ab^{-1} + (by - az)\, b^{-1} (b + z)^{-1},$$

откуда $w(x-ab^{-1})>0$ и $x\equiv ab^{-1} \pmod{\mathfrak{m}}$. Это доказывает наше утверждение.

Если $\Gamma=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, то $K=k(X;\ Y)$ и предыдущая конструкция дает нам, таким образом, нормирования поля $k(X,\ Y)$, несобственные на k, группа порядков которых равна $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, а поле вычетов есть k. Эти нормирования зависят от структуры порядка, выбранного на $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. Можно, например, наделить группу $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ лексикографическим порядком или, если α — произвольное иррациональное число, то группу $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ можно отождествить с подгруппой в $\mathbf{R}$ с помощью гомоморфизма $(m,\ n)\to m+n\alpha$ (гомоморфизм этот инъективен, ибо число α иррационально) и наделить $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ порядком, индуцированным порядком группы $\mathbf{R}$.

Другие конструкции нормирований, в которых используется предложение 4 п° 2, будут описаны в § 10.

5. *Идеалы кольца нормирования*

Определение 2. *Пусть G — упорядоченное множество. Подмножество M в G называется мажорным, если из соотношений $x\in M$ и $y\geqslant x$ следует, что $y\in M$.*

Пусть K — поле, v — некоторое нормирование поля K, A — кольцо нормирования v и G — группа порядков нормирования v. Для любого мажорного множества $M\subset G$ пусть $\mathfrak{a}(M)$ — множество тех элементов $x\in K$, для которых $v(x)\in M\cup\{+\infty\}$. Ясно, что $\mathfrak{a}(M)$ представляет собой A-подмодуль в K.

Предложение 7. *Отображение $M\to\mathfrak{a}(M)$ является возрастающим биективным отображением мажорных подмножеств группы G на множество A-подмодулей поля K.*

Пусть $\mathfrak{b}$ — произвольный A-подмодуль в K. Множество порядков $v(x)$, где $x\in\mathfrak{b}-(0)$, является мажорным подмножеством $M(\mathfrak{b})$ в G. Предложение 7 будет доказано, если установить следующие формулы:

$M(\mathfrak{a}(N))=N$ для любого мажорного множества N группы G; (2)

$\mathfrak{a}(M(\mathfrak{b}))=\mathfrak{b}$ для любого A-подмодуля $\mathfrak{b}$ поля K. (3)

Установить формулу (2) легко, так как для каждого $m\in N$ существует такой элемент $x\in K$, что $v(x)=m$. Очевидно, что $\mathfrak{b}\subset\mathfrak{a}(M(\mathfrak{b}))$. Пусть, обратно, $x\in\mathfrak{a}(M(\mathfrak{b}))$ и предположим, что $x\neq 0$. Тогда $v(x)\in M(\mathfrak{b})$ и, следовательно, существует такой элемент $y\in\mathfrak{b}$, что $v(x)=v(y)$. Отсюда следует, что $x=uy$ при $v(u)=0$. Это показывает, что $x\in Ay\subset\mathfrak{b}$. Доказательство закончено.

Следствие. *Пусть G_+ — множество положительных элементов группы G. Отображение $M \to \mathfrak{a}(M)$ является биективным отображением множества мажорных подмножеств из G_+ на множество идеалов кольца A.*

Действительно, поскольку $A = \mathfrak{a}(G_+)$, включение $\mathfrak{a}(M) \subset A$ эквивалентно включению $M \subset G_+$.

Например, максимальный идеал $\mathfrak{m}(A)$ равен $\mathfrak{a}(S)$, где S обозначает множество строго положительных элементов из G.

6. *Дискретные нормирования*

Определение 3. *Пусть K — тело (не обязательно коммутативное), v — нормирование тела K и Γ — группа порядков нормирования v. Говорят, что нормирование v дискретно, если существует изоморфизм (обязательно единственный) упорядоченной группы Γ на группу $\mathbf{Z}$. Пусть γ — элемент из Γ, соответствующий единице при этом изоморфизме; всякий элемент u из K, для которого $v(u) = \gamma$, называется униформизирующей нормирования v. Дискретное нормирование называется нормированным, если группа порядков равна $\mathbf{Z}$.*

Например, нормирование v_p, определенное экстремальным элементом p кольца главных идеалов *„или факториального кольца“* является нормированным дискретным нормированием, для которого p есть униформизирующая. В частности, если k — поле, то $k[[T]]$ является кольцом дискретного нормирования поля $k((T))$, для которого T служит униформизирующей. *Пусть S — связное комплексное аналитическое многообразие размерности 1, K — поле мероморфных функций на S и z_0 — некоторая точка из S; множество функций $f \in K$, являющихся голоморфными в z_0, является кольцом некоторого дискретного нормирования v; для того чтобы функция $f \in K$ была униформизирующей для нормирования v, необходимо и достаточно, чтобы она была голоморфной и равнялась нулю в точке z_0 и чтобы существовала такая окрестность V точки z_0 в S, что ограничение f на V определяет гомеоморфизм множества V на некоторую окрестность начала координат на комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Этот, а также некоторые другие аналогичные примеры оправдывают введение термина „униформизирующая“.*

Предложение 8. *Пусть K — тело (не обязательно коммутативное), v — дискретное нормирование тела K, A — кольцо нормирования v и u — униформизирующая нормирования v. Ненулевые идеалы кольца A являются двусторонними и имеют вид Au^n $(n \geqslant 0)$.*

Можно считать v *нормированным*, так что $v(u)=1$. Для всякого $x \in K^*$ имеется целое число $n \in \mathbf{Z}$, для которого $v(x)=n=v(u^n)$, следовательно, можно записать $x=zu^n=u^nz'$, где z, z' — *обратимые* элементы в A. Отсюда следует предложение.

Предложение 9. *Пусть A — целостное локальное кольцо, не равное своему полю частных. Следующие условия эквивалентны:*

а) *кольцо A есть кольцо дискретного нормирования;*

б) *кольцо A есть кольцо главных идеалов;*

в) *идеал $\mathfrak{m}(A)$ является главным и* $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}(A)^n = 0$;

г) *кольцо A нётерово и идеал $\mathfrak{m}(A)$ главный;*

д) *кольцо A нётерово и является кольцом нормирования.*

Предложение 8 показывает, что из а) следуют б), г) и д). Если A — кольцо главных идеалов, то $\mathfrak{m}(A)=Au$ и любой ненулевой идеал из A имеет вид Au^n, так как кольцо A — локальное (*Алгебра*, гл. VII, § 1, n° 3, теорема 2). Следовательно, $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}(A)^n = 0$; этим доказано, что из б) следует в). С другой стороны, из г) следует в) (гл. III, § 3, n° 2, следствие предложения 5); в силу предложения 2 § 1, n° 4, из в) следует а). Таким образом, условия а), б), в) и г) эквивалентны и имеют своим следствием условие д). Наконец, предположим, что выполнено д) и покажем, что имеет место б). Достаточно доказать следующую лемму:

Лемма 1. *Пусть A — кольцо нормирования. Всякий A-модуль без кручения, имеющий конечный тип, свободен. Всякий идеал конечного типа кольца A является главным. Любой A-модуль без кручения является плоским.*

Пусть E — некоторый A-модуль конечного типа без кручения, и пусть $x_1, \ldots, x_n$ — образующие модуля E, выбранные в минимальном числе. Покажем, что эти образующие линейно независимы. Если $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ $(a_i \in A)$ — нетривиальное соотношение между x_i, то один из коэффициентов a_i, например a_1, делит все остальные, так как множество главных идеалов кольца A совершенно упорядочено по включению (§ 1, n° 2, теорема 1). Имеем $a_1 \neq 0$, поскольку данное соотношение предполагается нетривиальным. Поскольку модуль E без кручения, мы можем разделить на a_1, т. е. предположить, что $a_1=1$. Но тогда x_1 является линейной комбинацией элементов $x_2, \ldots, x_n$ в противоречие с тем, что число n минимально. Следовательно, модуль E свободен.

В частности, всякий идеал $\mathfrak{a}$ конечного типа кольца A является главным, так как все элементы любой системы образующих идеала $\mathfrak{a}$ делятся на один из них. Предложение 3 гл. I, § 2, n° 4, показывает теперь, что любой A-модуль без кручения является плоским.

Упражнения

¶ 1) а) Пусть L — поле, T — некоторая переменная; в поле формальных рядов $L((T))$ рассмотрим ряд

$$s = c_0 + c_1 T^{1!} + c_2 T^{2!} + \ldots + c_n T^{n!} + \ldots,$$

где все $c_i \in L$ отличны от нуля. Показать, что ряд s трансцендентен над подполем $L(T)$ поля $L((T))$. (Рассуждать от противного, предполагая, что существует некоторое соотношение $a_0(T) + a_1(T)\, s + \ldots + a_q(T)\, s^q = 0$, в котором $a_i(T)$ — многочлены из $L(T)$, причем $a_q \neq 0$; построить уравнение, выполняющееся для $s' = s - c_0 - c_1 T^{1!} - \ldots - c_{n-1} T^{(n-1)!}$, и показать, что для достаточно большого n его свободный член является многочленом степени $< n!$, откуда получить противоречие.)

б) Пусть k — поле, X, Y, Z, T — четыре переменных, $K = k(X, Y, Z)$, E — алгебраическое замыкание поля $k(X)$; для всякого n обозначим через x_n какой-либо такой элемент из E, что $x_n^n = X$. В поле формальных рядов $E((T))$ рассмотрим элемент

$$s = x_1 T + x_2 T^{2!} + \ldots + x_n T^{n!} + \ldots.$$

Элементы s и T алгебраически независимы над E в силу а). Рассмотрим гомоморфизм $f\colon K \to E((T))$, при котором $f(X) = X$, $f(Y) = T$, $f(Z) = s$. Если v — дискретное нормирование на $E((T))$, определяемое порядком формальных рядов (n° 3, пример 3), то $v \circ f$ — дискретное нормирование поля K; показать, что поле вычетов нормирования $v \circ f$ является подполем $k(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ поля E и, следовательно, имеет бесконечную степень над k.

¶ 2) Пусть Γ — совершенно упорядоченная группа и k — некоторое поле.

а) Пусть A, B — два подмножества в Γ, *вполне упорядоченные* относительно индуцированного порядка. Показать, что множество $A + B$ вполне упорядочено и что для любого $\gamma \in A + B$ множество пар $(\alpha, \beta) \in A \times B$, для которых $\alpha + \beta = \gamma$ конечно. (Для доказательства первого утверждения надо рассуждать от противного и показать, что в противном случае можно было бы определить строго убывающую последовательность (γ_n) элементов из $A + B$, для которой $\gamma_n \supset \alpha_n + \beta_n$, где $\alpha_n \in A$, $\beta_n \in B$, причем последовательность (α_n) строго возрастает, а последовательность (β_n) строго убывает; закончить надо с помощью упражнения 3 из *Теории множеств*, гл. III, § 4.)

б) Пусть $S(\Gamma, k)$ — множество таких семейств $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$, что $x_\alpha \in k$ для любого $\alpha \in \Gamma$ и множество элементов α, для которых $x_\alpha \neq 0$, является *вполне упорядоченным* подмножеством в Γ. Показать, что $S(\Gamma, k)$ является аддитивной подгруппой в k^Γ; кроме того, если $x = (x_\alpha)$, $y = (y_\alpha)$ — два элемента из $S(\Gamma, k)$, то множество C сумм $\alpha + \beta$ таких пар (α, β), что $x_\alpha \neq 0$ и $y_\beta \neq 0$, вполне упорядочено в силу а) и для любого $\gamma \in C$ определен элемент $z_\gamma = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} x_\alpha y_\beta$ в поле k; если положить $z_\alpha = 0$ при $\alpha \notin C$, то окажется, что элемент $z = (z_\alpha) \in k$ принадлежит $S(\Gamma, k)$; обозначим его через xy. Показать, что относительно этого закона композиции и относительно сложения в группе k^Γ множество $S(\Gamma, k)$ является *полем*; кроме того, для

любого $x=(x_\alpha)\neq 0$ из $S(\Gamma, k)$ пусть λ будет наименьшим элементом среди таких $\alpha\in\Gamma$, что $x_\alpha\neq 0$; положим $v(x)=\lambda$ (и $v(0)=+\infty$); показать, что v — нормирование на $S(\Gamma, k)$, для которого k является полем вычетов и Γ — группой значений. Говорят, что v есть *каноническое нормирование* на поле $S(\Gamma, k)$. Поле k канонически отождествляется с некоторым подполем в $S(\Gamma, k)$. Для всякого $\alpha\in\Gamma$ обозначим через u_α такой элемент $(x_\lambda)_{\lambda\in\Gamma}$, что $x_\alpha=1$, $x_\lambda=0$ при любом $\lambda\neq\alpha$; для всякого $z\in S(\Gamma, k)$, отличного от нуля, имеется, и притом единственная, пара $(t, \alpha)\in k\times\Gamma$, такая, что $v(z)=\alpha$, $v(z-tu_\alpha)>\alpha$. Говорят, что tu_α является *доминирующим членом* элемента z.

¶ 3) Пусть K — поле, w — нормирование на K, Γ — группа значений нормирования w и k — его поле вычетов. Построим соответствующее поле $S(\Gamma, k)$ и сохраним обозначения упражнения 2. Пусть для любого $t\in k$ через t^0 обозначается элемент из класса t в кольце нормирования w; пусть для любого $\alpha\in\Gamma$ через u_α^0 обозначается такой элемент из K, что $w(u_\alpha^0)=\alpha$.

а) Пусть M — подмножество поля $S(\Gamma, k)$, содержащее элементы tu_α для любой пары $(t, \alpha)\in k\times\Gamma$; предположим, что существует биективное отображение $x\to x^0$ множества M на некоторое подмножество M^0 поля K и что выполнены следующие условия: 1° равенство $(tu_\alpha)^0=t^0u_\alpha^0$ выполняется для всякой пары $(t, \alpha)\in k\times\Gamma$; 2° если $x=(x_\alpha)$ принадлежит M и если C_x — вполне упорядоченное подмножество группы Γ, образованное теми α, для которых $x_\alpha\neq 0$, то для любого сегмента D множества C_x элемент $(x_\lambda)_{\lambda\in D}$ принадлежит M; 3° если x, y — два элемента из M и если tu_α — доминирующий член элемента $x-y$, то $w(x^0-y^0-t^0u_\alpha^0)>w(x^0-y^0)$. Если z' — элемент из K, не принадлежащий множеству M^0, то показать, что в $S(\Gamma, k)$ существует элемент $z\notin M$, такой, что отображение, совпадающее с $x\to x^0$ в M и сопоставляющее элементу z элемент z', вновь удовлетворяет предыдущим условиям. (Заметить, что если $w(z')=\alpha$, то существует такой элемент t^0, что $w(z'-t^0u_\alpha^0)>\alpha$; положить $z_\alpha=tu_\alpha$, а затем показать посредством трансфинитной индукции, что можно определить элементы z_β с индексами $\beta>\alpha$ таким образом, что семейство $z=(z_\lambda)_{\lambda\in\Gamma}$ обладает требуемыми свойствами.)

б) Вывести из а), что $\mathrm{Card}(K)\leqslant\mathrm{Card}(S(\Gamma, k))$.

4) Пусть A — целостное локальное кольцо, K — его поле частных, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал, v — нормирование поля K, кольцо B которого доминирует над A. Предположим, что либо $\mathfrak{m}$ является идеалом конечного типа, либо v — дискретное нормирование. Тогда в $\mathfrak{m}$ существует такой элемент x, что $v(x)=\inf_{y\in\mathfrak{m}} v(y)$. Пусть A' — подкольцо в K, порожденное кольцом A и элементами yx^{-1}, где y пробегает $\mathfrak{m}$; пусть A_1 — локальное кольцо кольца A' относительно простого идеала $\mathfrak{p}\cap A'$, где $\mathfrak{p}$ — идеал нормирования v. Показать, что кольцо A_1 не зависит от выбора элемента x, удовлетворяющего указанным выше условиям (кольцо A_1 называют „первым квадратичным трансформантом кольца A вдоль v“); если кольцо A нётерово, то нётерово и A_1.

¶ 5) Пусть k — поле, $K=k(X, Y)$ — поле рациональных дробей от двух переменных над k. Положим $x_1=X$, $y_1=Y$ и для $n\geqslant 1$ определим по индукции элементы $x_{n+1}=y_n$ и $y_{n+1}=x_ny_n^{-1}$ из поля K.

а) Положим $A_n=k[x_n, y_n]$; последовательность (A_n) — возрастающая, и если $\mathfrak{m}_n=A_nx_n+A_ny_n$, то $\mathfrak{m}_n$ — максимальный идеал в A_n и $\mathfrak{m}_n=A_n\cap\mathfrak{m}_{n+1}$; в кольце $A=\bigcup_n A_n$ идеал $\mathfrak{m}=\bigcup_n\mathfrak{m}_n$ является максимальным.

б) Пусть v — нормирование поля K, определенное равенствами $v(X)=\rho=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $v(Y)=1$. Пусть B и $\mathfrak{p}$ — кольцо и идеал нормирования v; по-

казать, что $\mathfrak{m} = \mathfrak{p} \cap A$ (заметить, что $\rho^2 - \rho - 1 = 0$, и воспользоваться этим замечанием для вычисления $v(y_n)$). Показать, что, для того чтобы одночлен X^iY^j (i, j — целые положительные или отрицательные числа) принадлежал кольцу A, необходимо и достаточно, чтобы $i\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+j>0$; следовательно, для произвольного одночлена $z = X^iY^j$ имеет место одно из включений $z \in A$ или $1/z \in A$.

в) Показать, что $B = A_{\mathfrak{m}}$ (записать элемент $t \in B$ в виде частного двух многочленов от X и Y и рассмотреть в каждом из них одночлены, на которых v принимает наименьшее значение).

г) Показать, что для любого n кольцо $(A_{n+1})_{\mathfrak{m}_{n+1}}$ является первым квадратичным трансформантом кольца $(A_n)_{\mathfrak{m}_n}$ вдоль v (упражнение 4).

6) а) Пусть A — кольцо нормирования. Перенести на A-модули конечного типа результаты из *Алгебры*, гл. VII, § 4, n° 1 и n° 4 (теория инвариантных множителей (факторов)).

б) Пусть K — поле, v — нормирование поля K, A — кольцо нормирования v, Γ — группа его порядков. Пусть $U = (\alpha_{ij})$ — квадратная матрица порядка n с элементами из A и с определителем 0; показать, что существует такой элемент $\lambda \in \Gamma$, что для всякой квадратной матрицы $U' = (\alpha'_{ij})$ порядка n с элементами из A, удовлетворяющей условиям $v(\alpha'_{ij} - \alpha_{ij}) > \lambda$ для любой пары (i, j), ее инвариантные множители совпадают с инвариантными множителями матрицы U.

в) Сохраняя условия пункта б), обобщить следующие результаты из *Алгебры*: теорема 1 и упражнение 1 гл. IX, § 5, n° 1, и упражнение 10 гл. IX, § 6 (для последнего надо предположить, что K имеет характеристику, не равную 2, и что $v(2) = 0$).

7) Показать, что целостное кольцо B, определенное в гл. II, § 3, упражнение 2б), является локальным кольцом, максимальный идеал которого главный; однако это кольцо не является кольцом нормирования.

8) Показать, что если кольцо нормирования A сильно ласкерово (гл. IV, § 2, упражнение 28), то A есть либо поле, либо кольцо дискретного нормирования (воспользоваться упражнением 29 гл. IV, § 2).

§ 4. Высота нормирования

1. Отношение включения между кольцами нормирования данного поля

Предложение 1. *Пусть K — поле и A — кольцо нормирования для K. Тогда*

а) *всякое кольцо B, для которого $A \subset B \subset K$, есть кольцо нормирования для K;*

б) *максимальный идеал $\mathfrak{m}(B)$ такого кольца содержится в A и является в A простым идеалом;*

в) *$\mathfrak{p} \to A_{\mathfrak{p}}$ представляет собой биективное убывающее отображение множества простых идеалов кольца A на множество таких колец B, что $A \subset B \subset K$; обратное к нему биективное отображение есть $B \to \mathfrak{m}(B)$.*

Если B — такое кольцо, что $A \subset B \subset K$, и если $x \in K - B$, то $x \in K - A$, откуда $x^{-1} \in \mathfrak{m}(A) \subset B$; этим одновременно доказано как то, что B — кольцо нормирования для K, так и то, что $\mathfrak{m}(B) \subset \mathfrak{m}(A)$; поскольку $\mathfrak{m}(B) = \mathfrak{m}(B) \cap A$ — простой идеал в A, то а) и б) доказаны. Кроме того, $A_{\mathfrak{m}(B)} \subset B$; обратно, если $x \in B - A$, то $x^{-1} \in A$ и $x^{-1} \notin \mathfrak{m}(B)$; следовательно, $x \in A_{\mathfrak{m}(B)}$. Таким образом, $A_{\mathfrak{m}(B)} = B$. Пусть, наконец, $\mathfrak{p}$ — произвольный простой идеал в A. Положим $B = A_{\mathfrak{p}}$; имеем $\mathfrak{m}(B) \cap A = \mathfrak{p}$ (гл. II, § 2, n° 5, предложение 11) и $\mathfrak{m}(B) \subset A$ в силу б). Следовательно, $\mathfrak{m}(B) = \mathfrak{p}$, и это показывает, что отображения $\mathfrak{p} \to A_{\mathfrak{p}}$ и $B \to \mathfrak{m}(B)$, указанные в формулировке, представляют собой взаимно обратные биективные отображения.

Следствие. *Множество подколец поля K, содержащих кольцо A, совершенно упорядочено по включению.*

Действительно, множество простых идеалов кольца A по включению совершенно упорядочено (§ 1, n° 2, теорема 1д)), а отображение $\mathfrak{p} \to A_{\mathfrak{p}}$ меняет отношения включения на обратные.

Предложение 2. *Пусть K — поле, B — некоторое кольцо нормирования для поля K и h_B — точка поля K, ассоциированная с кольцом B (со значениями в поле $\kappa(B)$). Тогда отображение $A \to h_B(A)$ определяет биективное отображение множества $\mathfrak{A}$ колец нормирования для K, содержащихся в B, на множество $\mathfrak{A}'$ колец нормирования для $\kappa(B)$.*

Если $A \in \mathfrak{A}$, то $h_B(A) \in \mathfrak{A}'$; в самом деле, если $x' = h_B(x)$ (где $x \in B$) — произвольный элемент из $\kappa(B) - h_B(A)$, то $x \notin A$ и, следовательно, $x^{-1} \in A$, $h_B(x)^{-1} \in h_B(A)$. С другой стороны, для $A \in \mathfrak{A}$ имеет место включение $A \supset \mathfrak{m}(B)$ (предложение 1б)); значит, отображение $A \to h_B(A)$ инъективно. Наконец, пусть $A' \in \mathfrak{A}'$ и $A = h_B^{-1}(A') \subset B$; мы сейчас покажем, и тогда доказательство будет закончено, что $A \in \mathfrak{A}$. Действительно, если $x \in K - A$, то или $x \notin B$, или $x \in B$. Если $x \notin B$, то $x^{-1} \in \mathfrak{m}(B) \subset A$. Если же $x \in B$, то $h_B(x) \in \kappa(B)$ и $h_B(x) \notin A'$. Следовательно, $x^{-1} \in B$ и $h_B(x^{-1}) \in A'$; отсюда мы снова заключаем, что $x^{-1} \in B$. Значит, $A \in \mathfrak{A}$.

Следствие. *Пусть A и B — два кольца нормирования для поля K, причем $A \subset B$. Положим $A' = h_B(A)$ — кольцо нормирования для поля $\kappa(B)$. Поле вычетов $\kappa(A')$ кольца A' канонически изоморфно полю вычетов $\kappa(A)$ кольца A и точка h_A, ассоциированная с кольцом A, представляет собой композицию $h_{A'} \circ h_B$ точек, ассоциированных с A' и B.*

Действительно, так как локальное кольцо A' представляет собой факторкольцо локального кольца A, то их поля вычетов

канонически изоморфны и для $x \in A$ справедливо равенство $h_A(x) = h_{A'}(h_B(x))$. С другой стороны, если $x \in B - A$, то $h_B(x) \notin A'$ и обе части последнего равенства обращаются в ∞; так же обстоит дело и в случае $x \in K - A$.

Замечание. Обратно, пусть f — любая точка поля K со значениями в K' и f' — точка поля K' со значениями в K''. Тогда $f' \circ f$ является точкой поля K, кольцо которой содержится в кольце точки f.

2. *Изолированные подгруппы упорядоченной группы*

Для того чтобы изучить ситуацию, описанную в n° 1, с точки зрения нормирований, нам потребуются следующие определение 1 и предложение 3.

Определение 1. *Подгруппа H упорядоченной группы G называется изолированной, если из соотношений $0 \leqslant y \leqslant x$ и $x \in H$ следует, что $y \in H$.*

Пример 1. Пусть A и B — две упорядоченные группы; наделим прямое произведение $A \times B$ лексикографическим порядком (т. е. отношение „$(a, b) \leqslant (a', b')$“ эквивалентно отношению „$(a < a')$ или $(a = a'$ и $b \leqslant b')$“). Второй прямой сомножитель B в $A \times B$ является, как легко проверить, изолированной подгруппой в $A \times B$.

Предложение 3. *Пусть G — упорядоченная группа и P — множество положительных элементов в ней.*

а) Ядро любого возрастающего гомоморфизма группы G в произвольную упорядоченную группу является изолированной подгруппой в G.

б) Обратно, пусть H — изолированная подгруппа в G и g — канонический гомоморфизм группы G на G/H. Тогда $g(P)$ является множеством положительных элементов относительно некоторой структуры упорядоченной группы на G/H. Кроме того, если группа G совершенно упорядочена, то такова же и факторгруппа G/H.

а) Пусть f — произвольный возрастающий гомоморфизм группы G в некоторую упорядоченную группу; обозначим через H ядро гомоморфизма f. Если $0 \leqslant y \leqslant x$ и $x \in H$, то $0 \leqslant f(y) \leqslant f(x) = 0$, откуда $f(y) = 0$, т. е. $y \in H$. Следовательно, группа H изолированная.

б) Пусть H — произвольная изолированная подгруппа в G и g: $G \to G/H$ — канонический гомоморфизм. Положим $P' = g(P)$. Ясно, что $P' + P' \subset P'$. Тогда

$$P' \cap (-P') = \{0\},$$

так как если x и y — такие элементы из P, что $g(x) = -g(y)$, то $x+y \in H$, откуда $x \in H$ и $y \in H$, поскольку подгруппа H изолированная. Следовательно, $g(x) = g(y) = 0$. Таким образом, P' — множество положительных элементов относительно некоторой структуры упорядоченной группы на G/H (*Алгебра*, гл. VI, § 1, n° 3, предложение 3). Наконец, если G — совершенно упорядоченная группа, то $P \cup (-P) = G$, откуда $P' \cup (-P') = G/H$; значит, группа G/H совершенно упорядочена (loc. cit.).

Пример 2. Если мы вновь обратимся к примеру, в котором группа G есть прямое произведение $A \times B$ с лексикографическим порядком, и положим $H = B$, то упорядоченная группа G/H канонически отождествляется с A.

3. Сравнение нормирований

Пусть K — поле и A — некоторое кольцо нормирования для K. Для любого подкольца B поля K, содержащего A, справедливо включение $U(A) \subset U(B)$. Следовательно, имеется канонический гомоморфизм λ из $\Gamma_A = K^*/UA$ *на* $\Gamma_B = K^*/UB$, ядро которого есть группа $U(B)/U(A)$. Обозначив через v_A и v_B канонические нормирования поля K, определяемые кольцами A и B (§ 3, n° 2), мы получим, следовательно, соотношение

$$v_B = \lambda \circ v_A. \tag{1}$$

Поскольку $A \subset B$, гомоморфизм λ переводит положительные элементы из Γ_A в положительные элементы группы Γ_B, и потому гомоморфизм λ является возрастающим. Отсюда получается (предложение 3), что ядро H_B гомоморфизма λ представляет собой изолированную подгруппу группы Γ_A, а сам гомоморфизм разлагается в композицию $\Gamma_A \to \Gamma_A/H_B \xrightarrow{\mu} \Gamma_B$, где μ — биективный и возрастающий гомоморфизм, который, следовательно, представляет собой *изоморфизм* совершенно упорядоченных групп. Поэтому группа Γ_B может быть отождествлена с совершенно упорядоченной факторгруппой Γ_A/H_B.

Предложение 4. *Отображение $B \to H_B$ определяет биективное и возрастающее отображение множества подколец поля K, содержащих A, на множество изолированных подгрупп группы Γ_A.*

Действительно, задание группы H_B определяет нормирование v_B с точностью до эквивалентности; следовательно, этим однозначно определяется B. С другой стороны, пусть H — изолированная подгруппа в Γ_A. Рассматривая Γ_A/H как совершенно упорядоченную группу (предложение 3), мы получаем, что композиция отображений

$$K^* \xrightarrow{v_A} \Gamma_A \to \Gamma_A/H$$

является нормированием поля K, кольцо которого содержит A.

Замечание. Сохраняя предыдущие предположения, обозначим через f канонический гомоморфизм кольца B на $\kappa(B)$ и положим $A'=f(A)$; это — кольцо нормирования для поля $\kappa(B)$ (предложение 2, n° 1). Тогда $f^{-1}(\kappa(B)^*)=U(B)$, $f^{-1}(A')=A$, $f^{-1}(\mathfrak{m}(A'))=m(A)$; следовательно,

$$f^{-1}(U(A'))=U(A).$$

Отсюда мы получаем канонический изоморфизм из $U(B)/U(A)$ на $\kappa(B)^*/U(A')=\Gamma_{A'}$. Значит, точная последовательность

$$0\to U(B)/U(A)\to\Gamma_A\to\Gamma_B\to 0$$

дает точную же последовательность

$$0\to\Gamma_{A'}\to\Gamma_A\to\Gamma_B\to 0.$$

Пример. Пусть k — поле,

$$E=k(X) \quad \text{и} \quad K=k(X, Y)=E(Y)$$

(X, Y — переменные). Пусть $B=E[Y]$ — кольцо нормирования для поля K, определенное экстремальным элементом Y кольца главных идеалов $E[Y]$ (§ 1, n° 4, предложение 3). Поле вычетов $\kappa(B)$ канонически отождествляется с $E[Y]/(Y)=E$. Аналогично, пусть $A'=k[X]_{(X)}$ — кольцо нормирования для поля $E=k(X)$, определенное экстремальным элементом X кольца $k[X]$. Обозначая через h_B точку поля K, ассоциированную с B, и полагая $A=h_B^{-1}(A')$, мы определяем кольцо нормирования A для поля K, содержащееся в B; имеем $\kappa(A)=\kappa(A')=k$. Каноническая точка $h_A: K\to k$, следовательно, может быть описана так: если $f(X, Y)$ — любой элемент из K, то положим сначала $Y=0$ в f (это определит некоторый элемент из $\tilde{E}=k(X)\tilde{}$, а затем положим $X=0$ в полученном ранее результате. Группы $\Gamma_{A'}$ и Γ_B канонически изоморфны группе Z (§ 3, n° 4, пример 4). *Нетрудно показать (ср. § 10, n° 2, лемма 2), что группа Γ_A изоморфна лексикографическим образом упорядоченному прямому произведению $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ и что нормирование v_A эквивалентно нормированию, определенному в конце примера 6 § 3, n° 4.*

4. *Высота нормирования*

Пусть G — совершенно упорядоченная группа. Если заданы две изолированные подгруппы H и H' в G, то одна из них содержится в другой. Действительно, в противном случае существовал бы положительный элемент x из H, не принадлежащий подгруппе H', и положительный элемент x' из H', не принадлежащий подгруппе H. Пусть, например, $x\geqslant x'$; поскольку под-

группа H — изолированная, мы получаем, что $x' \in H$ — противоречие.

Это следует также из предложения 4 n° 3 и следствия предложения 1 n° 1, если принять во внимание тот факт, что всякая совершенно упорядоченная группа является группой порядков некоторого нормирования (§ 3, n° 3, пример 6).

Определение 2. *Пусть G — совершенно упорядоченная группа. Если число изолированных подгрупп группы G, отличных от G, конечно и равно n, то говорят, что G имеет высоту n. Если же число изолированных подгрупп бесконечно, то говорят, что G — группа бесконечной высоты.*

Примеры. 1) Высота группы $G = \{0\}$ равна нулю.

2) Группы $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{R}$ имеют высоту 1.

3) Пусть G — совершенно упорядоченная группа и H — любая изолированная подгруппа в G. Если через $h(H)$ и $h(G/H)$ обозначить высоты совершенно упорядоченных групп H и G/H, то

$$h(G) = h(H) + h(G/H), \tag{2}$$

так как множество изолированных подгрупп группы G совершенно упорядочено по включению. В частности, если G — лексикографически упорядоченное прямое произведение двух совершенно упорядоченных групп H и H', то

$$h(G) = h(H) + h(H') \tag{3}$$

(ср. n° 2, пример 2). Таким образом, лексикографически упорядоченное произведение $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ имеет высоту 2.

Однако высота группы $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, упорядоченной при помощи вложения в $\mathbf{R}$ (ср. § 3, n° 4, конец примера 6), равна 1 (ср. приведенное ниже предложение 8).

Определение 3. *Высотой нормирования называется высота группы его значений.*

Например, любое дискретное нормирование имеет высоту 1. Лишь несобственные нормирования имеют высоту 0. Из предложений 1 и 4 вытекает

Предложение 5. *Высота нормирования равна числу ненулевых простых идеалов его кольца.*

5. Нормирования высоты 1

Предложение 6. *Пусть K — поле и A — некоторое подкольцо в K. Предположим, что A не является полем. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *кольцо A является кольцом нормирования высоты 1 поля K;*

б) *кольцо A является кольцом нормирования для K и не содержит простых идеалов, отличных от* (0) *и* $\mathfrak{m}(A)$;

в) *кольцо A является максимальным в множестве подколец поля K, отличных от K.*

Предложение 5 n° 4 показывает, что из а) следует б), а предложение 1 n° 1 показывает, что из б) вытекает в). Остается доказать, что из в) следует а). Предположим, что A максимально среди подколец поля K, отличных от K. Пусть $\mathfrak{m}$ — некоторый максимальный идеал в A и V — кольцо нормирования для K, доминирующее над $A_{\mathfrak{m}}$ (§ 1, n° 2, следствие 2 теоремы 2). Поскольку $\mathfrak{m}(V) \cap A = \mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m} \neq (0)$ (так как A не является полем), то $V \neq K$, откуда $V = A$. Этим доказано, что A представляет собой кольцо некоторого нормирования v поля K. А если это так, то v имеет высоту 1 в силу предложения 1 n° 1 и предложения 5 n° 4.

Предложение 7. *Для того чтобы некоторое нормирование какого-либо поля имело высоту 1, необходимо и достаточно, чтобы его группа порядков была изоморфна некоторой ненулевой упорядоченной подгруппе группы* $\mathbf{R}$.

Действительно, это вытекает из следующего предложения:

Предложение 8. *Пусть G — совершенно упорядоченная группа, не равная нулю. Следующие условия эквивалентны:*

а) *группа G имеет высоту* 1;

б) *для любых $x > 0$ и $y \geqslant 0$ из G существует такое целое число $n \geqslant 0$, что $y \leqslant nx$;*

в) *группа G изоморфна некоторой ненулевой подгруппе упорядоченной аддитивной группы* $\mathbf{R}$.

Пусть x — произвольный положительный элемент из G, и пусть H_x — множество таких $y \in G$, что при некотором целом числе $n \geqslant 0$ справедливо неравенство $|y| \leqslant nx$. Немедленно проверяется, что H_x представляет собой изолированную подгруппу группы G и что всякая изолированная подгруппа в G, содержащая элемент x, содержит и H_x. Следовательно, условие а) эквивалентно утверждению, что $H_x = G$ при всяком $x > 0$, т. е. условию б).

Ясно, что из в) следует б). Обратно, предположим, что выполнено условие б), и обозначим через Q множество положительных элементов группы G. Допустим сначала, что Q обладает наименьшим элементом x; для любого $y \in Q$ пусть n будет таким наименьшим целым числом, что $y \leqslant nx$; если бы имело место неравенство $y < nx$, то мы получили бы $nx - y \geqslant x$,

откуда $y \leqslant (n-1)x$ вопреки выбору n. Следовательно, $y = nx$, а это означает, что группа $G = \mathbf{Z}x$ изоморфна $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$. Предположим теперь, что Q не содержит наименьшего элемента. Применим к упорядоченному множеству $P = Q \cup \{0\}$ предложение 1 из *Общей топологии*, гл. V, § 2 (это возможно, так как условие б) есть не что иное, как „аксиома Архимеда"). Мы видим, что существует строго возрастающее отображение f множества P в $\mathbf{R}_+$, при котором

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

для $x \in P$ и $y \in P$; отображение f по линейности продолжается до некоторого изоморфизма группы G на некоторую подгруппу группы $\mathbf{R}$; тем самым доказано, что из б) следует в).

Предложение 9. *Пусть K — поле, v — нормирование поля K, не являющееся несобственным, и A — кольцо нормирования v. Для того чтобы A было вполне целозамкнуто* (гл. V, § 1, n° 4, определение 5), *необходимо и достаточно, чтобы нормирование v имело высоту* 1.

Предположим, что v имеет высоту 1. Пусть $x \in K$ — такой элемент, что все степени $x^n (n \geqslant 0)$ содержатся в некотором A-подмодуле конечного типа поля K. Существует такой элемент $d \in A - \{0\}$, что $dx^n \in A$ при всяком $n \geqslant 0$. Следовательно, $v(d) + nv(x) \geqslant 0$, т. е. $n(-v(x)) \leqslant v(d)$ для любого $n \geqslant 0$, откуда $-v(x) \leqslant 0$ (предложение 8б)) и $x \in A$. Таким образом, A вполне целозамкнуто.

Теперь предположим, что нормирование v не является нормированием высоты 1. Тогда существуют такие элементы $y \in \mathfrak{m}(A)$ и $t \in A$, что $nv(y) < v(t)$ для любого $n \geqslant 0$ (предложение 8б)). Следовательно, $ty^{-n} \in A$ для любого $n \geqslant 0$, но $y^{-1} \notin A$. Следовательно, кольцо A не является вполне целозамкнутым.

Следствие. *Пусть K — поле, $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ — некоторое семейство нормирований поля K высоты 1 и A — пересечение колец нормирований v_α. Тогда кольцо A вполне целозамкнуто.*

Вполне целозамкнутое кольцо не всегда является пересечением колец нормирования высоты 1 (упражнение 6).

Упражнения

1) а) Пусть G — совершенно упорядоченная группа, M — мажорное множество из G_+, не содержащее 0. Показать, что существует *наибольшая* изолированная подгруппа H группы G, не пересекающая M.

б) Пусть A — некоторое кольцо нормирования, v — нормирование, ассоциированное с кольцом A. Для того чтобы идеал $\mathfrak{p} \neq 0$ кольца A был простым, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{p}$ соответствовал такому мажорному

множеству M в совершенно упорядоченной группе G значений нормирования v, что если H — наибольшая изолированная подгруппа в G, не пересекающая M, то M есть дополнение к H_+ в множестве G_+.

в) Пусть $\mathfrak{q}$ — идеал в A, M — соответствующее мажорное множество в G и H — наибольшая изолированная подгруппа в G, не пересекающая M. Для того чтобы идеал $\mathfrak{q}$ был примарным, необходимо и достаточно, чтобы $M + H = M$; в этом случае $\mathfrak{q}$ является $\mathfrak{p}$-примарным, где $\mathfrak{p}$ — простой идеал, соответствующий H.

г) Для того чтобы идеал $\mathfrak{a}$ кольца A, отличный от 0 и от A, удовлетворял равенству $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{a}$ соответствовал такому мажорному множеству M, что если H — наибольшая изолированная подгруппа в G, не пересекающая M, то образ M' множества M в совершенно упорядоченной группе $G' = G/H$ не обладает наименьшим элементом; в этом случае $\mathfrak{a}$ является простым идеалом.

2) Пусть G — совершенно упорядоченная группа.

а) Для *любого* элемента $a > 0$ из G пусть $H(a)$ — наименьшая изолированная подгруппа, содержащая a, и $H^-(a)$ — наибольшая изолированная подгруппа, не содержащая a. Показать, что группа $H(a)/H^-(a)$ изоморфна подгруппе группы $\mathbf{R}$.

б) Обратно, если H — такая изолированная подгруппа в G, что существует наибольший (относительно включения) элемент H' в множестве изолированных подгрупп группы G, содержащихся в H и не равных H, то $H = H(a)$ и $H' = H^-(a)$ для всякого $a \in H_+ \cap \complement H'_+$. Такую изолированную подгруппу H называют *главной*, а H' — ей *предшествующей*.

в) Если H_1, H_2 — две различные изолированные подгруппы в G, причем $H_1 \subset H_2$, то показать, что существуют две изолированные подгруппы H, H' группы G, для которых $H_1 \subset H' \subset H \subset H_2$ и группа H/H' изоморфна ненулевой подгруппе в $\mathbf{R}$.

г) Пусть Σ — множество изолированных подгрупп группы G (совершенно упорядоченное в смысле отношения включения) и $\Theta \subset \Sigma$ — множество главных изолированных подгрупп. Показать, что Σ изоморфно пополнению (*Теория множеств*, гл. III, § 1, упражнение 15) множества Θ.

3) а) Пусть Θ — совершенно упорядоченное множество, и пусть для всякого $s \in \Theta$ через A_s обозначена некоторая подгруппа в $\mathbf{R}$, отличная от $\{0\}$. Пусть

$$\Gamma(\Theta, (A_s)_{s \in \Theta}) = G$$

— подгруппа произведения $\prod_{s \in \Theta} A_s$, образованная функциями f, носитель которых является вполне упорядоченным подмножеством в Θ. Определим на G структуру порядка, согласованную со структурой группы и имеющую в качестве множества G_+ элементов $\geqslant 0$ множество, образованное функцией 0 и функциями $f \neq 0$, удовлетворяющими неравенству $f(\theta) > 0$ для наименьшего элемента θ из носителя f. Показать, что G является совершенно упорядоченной группой и что Θ канонически изоморфно множеству изолированных главных подгрупп группы G, упорядоченному отношением $\supset$; кроме того, если $H(a)$ соответствует при этом изоморфизме элементу $s \in \Theta$, то группа $H(a)/H^-(a)$ изоморфна A_s.

б) Рассмотрим подгруппу G совершенно упорядоченной группы $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ (относительного лексикографического порядка), порожденную элементами (p_n^{-1}, np_n^{-1}), где (p_n) — строго возрастающая последовательность простых чисел. Показать, что единственной изолированной подгруппой H' группы G', отличной от 0 и от G', является группа $\{0\} \times \mathbf{Z}$; но группа G' не изоморфна никакой подгруппе произведения $H' \times (G'/H')$, упорядоченного лексикографически.

4) Пусть A — кольцо нормирования, не являющееся полем.

а) Показать, что, для того чтобы A было кольцом дискретного нормирования, необходимо и достаточно, чтобы всякий простой идеал в A был главным.

б) Показать, что если A — кольцо нормирования высоты 1, то поле частных кольца A является A-алгеброй конечного типа.

*5) Пусть K — поле, $\mathfrak{M}$ — множество подколец в K, не являющихся полями. Показать, что всякий максимальный элемент множества $\mathfrak{M}$ является кольцом нормирования высоты 1 для поля K. Кроме того, следующие условия эквивалентны:

α) множество $\mathfrak{M}$ не пусто;

β) множество $\mathfrak{M}$ допускает максимальный элемент;

γ) существует нормирование высоты 1 для поля K;

δ) поле K не является алгебраическим расширением конечного простого поля (ср. § 8, n° 1).*

¶ 6) а) Пусть S — *гиперстоуново* компактное пространство без изолированной точки (*Интегрирование*, гл. V, § 5, упражнение 14). Пусть $\mathscr{C}_0(S)$ — векторное пространство числовых функций на S, конечных или нет, непрерывных и таких, что множества $f^{-1}(-\infty)$ и $f^{-1}(+\infty)$ нигде не плотны в S (*Интегрирование*, гл. II, § 1, упражнение 13д)). Показать, что для любой меры $\mu > 0$ на пространстве S существуют функции f из пространства $\mathscr{C}_0(S)$, верхний интеграл которых бесконечен (заметить, что для любого нигде не плотного замкнутого подмножества N пространства S существует функция из $\mathscr{C}_0(S)$, равная $+\infty$ на N; показать, что можно поэтому ограничиться случаем, в котором мера μ нормальна, и определить подходящим образом f как верхнюю границу некоторой последовательности функций из $\mathscr{C}(S)$).

б) Пусть G — упорядоченная подгруппа в пространстве $\mathscr{C}_0(S)$, образованная функциями из $\mathscr{C}_0(S)$, значения которых лежат в $\mathbf{Z}$ или равны $\pm\infty$. Показать, что G является вполне решеточно-упорядоченной группой, не изоморфной (как упорядоченная группа) никакой подгруппе произведения $\mathbf{R}^I$.

в) Пусть K — поле, $A_0 = K[[X_s]]_{s\in S}$ — кольцо формальных рядов с коэффициентами в K от семейства переменных (X_s), имеющего пространство S в качестве множества индексов (*Алгебра*, гл. IV, § 5, упражнение 1). Пусть $\mathfrak{b}$ — множество формальных рядов $P \in A_0$, обладающих следующим свойством: существует *нигде не плотное* множество $N \subset S$, такое, что любой одночлен из P, коэффициент при котором не равен нулю, содержит некоторую переменную X_s, у которой $s \in N$. Показать, что $\mathfrak{b}$ — идеал в A_0 и что кольцо $A = A_0/\mathfrak{b}$ является целостным и вполне целозамкнутым (для доказательства этого последнего утверждения надо применить предложение 14, гл. V, § 1, n° 4, рассуждая при этом так же, как в упражнении 10, гл. V, § 1; воспользоваться также тем, что в S любое тощее множество нигде не плотно).

г) Пусть f — некоторый элемент $\geqslant 0$ из G, и пусть N — нигде не плотное множество точек, в которых $f(s) = \pm\infty$. Пусть p_f — элемент из A, являющийся образом формального ряда $\prod_{s\notin N}(1+X_s)^{f(s)}$, отображение $f \to p_f$ является изоморфизмом аддитивного моноида G_+ на некоторый мультипликативный подмоноид в A. Вывести отсюда, что A не может быть пересечением никакого семейства колец нормирования высоты 1 для его поля частных (показать, что отсюда следовало бы, что G изоморфна некоторой подгруппе в произведении $\mathbf{R}^I$). (Ср. упражнения 8 и 9.)

¶ 7) Говорят, что целостное кольцо A имеет *размерность* 1, если A не является полем и если в A нет простых идеалов, отличных от (0) и от максимального идеала $\mathfrak{m}$ в A. Для любого идеала $\mathfrak{a}$ из A через $A:\mathfrak{a}$ обозначается A-подмодуль поля частных кольца A, являющийся кондуктором

из $\mathfrak{a}$ в A (который всегда содержит A). Далее в этом упражнении предполагается, что A имеет размерность 1.

а) Показать, что если A — сильно ласкерово кольцо (гл. IV, § 2, упражнение 28), то $A:\mathfrak{m} \neq A$. (В противном случае выполнялось бы равенство $A:\mathfrak{m}^r = A$ при любом $r>0$; с другой стороны, любой идеал $\neq 0$ в A и содержащийся в $\mathfrak{m}$, является $\mathfrak{m}$-примарным; и, в частности, это верно для любого главного идеала $Ax \subset \mathfrak{m}$ (при $x \neq 0$); наконец, заметить, что $\mathfrak{m}^h \neq \mathfrak{m}^k$ при $h \neq k$ (гл. IV, § 2, упражнение 29г)).

б) Показать, что для любого целостного локального кольца A размерности 1, являющегося сильно ласкеровым, эквивалентны следующие свойства:

α) кольцо A вполне целозамкнуто;

β) максимальный идеал $\mathfrak{m}$ является главным;

γ) любой $\mathfrak{m}$-примарный идеал имеет вид $\mathfrak{m}^k$;

δ) идеал $\mathfrak{m}$ обратим (гл. II, § 5, n° 6), что эквивалентно равенству $\mathfrak{m}\cdot(A:\mathfrak{m}) = A$;

ε) кольцо A является кольцом дискретного нормирования.

(Чтобы показать, что из α) следует δ), надо воспользоваться пунктом а) и заметить, что если $\mathfrak{m}\cdot(A:\mathfrak{m})^k = \mathfrak{m}$ при любом $k>0$, то A не является вполне целозамкнутым (ср. гл. VII, § 1, упражнение 4). Чтобы вывести γ) из δ), надо заметить, что для идеала $\mathfrak{a} \neq 0$, содержащегося в $\mathfrak{m}$, можно записать $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}\mathfrak{a}_1$ при $\mathfrak{a}_1 \neq 0$, а затем воспользоваться упражнением 29г) гл. IV, § 2. Наконец, чтобы вывести β) из γ), надо заметить, что $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$ и что из γ) следует, что $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ является векторным $(A/\mathfrak{m})$-пространством размерности 1.)

в) Показать, что (в обозначениях упражнения 15б), гл. III, § 3) локальное кольцо $A_{\mathfrak{m}}$ нётерово, целостное, имеет размерность 1, но не является целозамкнутым.

г) Пусть K — алгебраически замкнутое поле, A — подкольцо поля рациональных дробей $K(X, Y)$ от двух переменных над K, образованное такими элементами $f \in K(X, Y)$, что 0 может быть подставлен в f вместо X и элемент $f(0, Y)$ принадлежит K. Показать, что A есть целозамкнутое сильно ласкерово локальное кольцо размерности 1, не являющееся вполне целозамкнутым. (Если B — кольцо многочленов $K[X, Y]$ и $\mathfrak{p}$ — простой идеал BX в B, то заметить, что A является подкольцом в $B_{\mathfrak{p}}$, равным $K + \mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$.) [1])

¶ 8) Пусть A — целостное локальное кольцо размерности 1 (упражнение 7), K — его поле частных. Показать, что, для того чтобы A было пересечением колец нормирования (поля K) высоты 1, необходимо и достаточно, чтобы A было вполне целозамкнутым. Доказать последовательно следующее:

а) Любое подкольцо поля K содержащее A и элемент, обратный какому-нибудь ненулевому элементу из максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A, равно K (воспользоваться тем фактом, что любой идеал в A, отличный от 0 и от A, является $\mathfrak{m}$-примарным).

б) Если $B \supset A$ — подкольцо поля K, отличное от K, то существует такое кольцо нормирования V высоты 1, что $B \subset V$ (воспользоваться пунктом а)).

в) Пусть $z \in K - A$; показать, рассуждая так же, как в упражнении 7б), что не может выполняться соотношение $z\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Получить отсюда, что существует такое кольцо нормирования V высоты 1, что $A \subset V$ и $z \notin V$. (Если $z\mathfrak{m} \subset A$, то воспользоваться а); в противном случае существует такой элемент $x \in \mathfrak{m}$, что $xy = z \in K - A$; заметить, что $z \notin A[z^{-1}]$, и воспользоваться пунктом б) для доказательства существования кольца V.)

---

[1]) Можно привести примеры локальных колец размерности 1, которые вполне целозамкнуты, но не являются кольцами нормирования (ср. P. Ribenboim, Sur une note de Nagata relative a un problème de Krull, *Math. Zeitschr.* **LXIV** (1956), 159–168).

¶ 9) Пусть A — вполне целозамкнутое ласкерово целостное кольцо (гл. IV, § 2, упражнение 23). Предположим, кроме того, что для любого $x \neq 0$ из A простые идеалы $\mathfrak{p}_i$, слабо ассоциированные с A/Ax (гл. IV, § 1, упражнение 17), все имеют *высоту* 1, т. е. для любого i идеал $\mathfrak{p}_i$ не содержит ни одного простого идеала, отличного от него самого и от 0 (ср. гл. VII, § 1, n° 6). Показать, что в этих условиях A является пересечением колец нормирования высоты 1. (Сначала показать, что A является пересечением всех колец $A_\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ пробегает множество простых идеалов высоты 1, используя для этого упражнение 17и) из гл. IV, § 1. Доказать, далее, что указанные кольца $A_\mathfrak{p}$ вполне целозамкнуты, используя для этого условие (LA_1) из упражнения 23 гл. IV, § 2. Наконец, применить упражнение 8.) Перечисленные выше предположения имеют место, в частности, когда A является вполне целозамкнутым ласкеровым целостным кольцом, в котором любой идеал допускает единственное примарное разложение (гл. IV, § 2, упражнение 26).

¶ 10) Пусть A — кольцо, в котором множество главных идеалов совершенно упорядочено по включению.

а) Показать, что A является локальным кольцом, в котором нильрадикал $\mathfrak{N}$ представляет собой простой идеал. Показать, что или $\mathfrak{N}^2 = \mathfrak{N}$, или $\mathfrak{N}$ нильпотентен. Кольцо $A/\mathfrak{N}$ является кольцом нормирования.

б) Пусть $\mathscr{P}$ обозначает совершенно упорядоченное множество главных идеалов кольца A; показать, что множество идеалов кольца A совершенно упорядочено по включению и изоморфно пополнению множества $\mathscr{P}$ (*Теория множеств*, гл. III, § 1, упражнение 15).

в) Предположим, что $\mathfrak{N}^2 = 0$; тогда $\mathfrak{N}$ можно рассматривать как модуль над кольцом нормирования $V = A/\mathfrak{N}$; пусть K — поле частных кольца V, Γ — группа порядков нормирования v поля K, соответствующего кольцу V. Показать, что в Γ существуют два таких мажорных множества $M \subset M'$, что $\mathfrak{N}$ является V-модулем, изоморфным $\mathfrak{a}(M')/\mathfrak{a}(M)$ (обозначения взяты из § 3, n° 4).

г) Обратно, если заданы кольцо нормирования V поля частных K и группа порядков Γ, а также два мажорных множества $M \subset M'$ в Γ, то положим $Q = \mathfrak{a}(M')/\mathfrak{a}(M)$ и на аддитивной группе произведения $A = V \times Q$ определим следующим образом умножение:

$$(z, t)(z', t') = (zz', zt' + z't).$$

Показать, что в A множество главных идеалов совершенно упорядочено по включению; множество $\mathfrak{N}$ пар $(0, t)$, где $t \in Q$, представляет собой нильрадикал в A и $\mathfrak{N}^2 = 0$; кроме того, $A/\mathfrak{N}$ изоморфно V.

д) Для любого простого числа p в кольце $A = \mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ множество главных идеалов кольца A совершенно упорядочено по включению и нильрадикал $\mathfrak{N}$ кольца A удовлетворяет условию $\mathfrak{N}^2 = 0$; показать, однако, что кольцо A не изоморфно кольцу, построенному (исходя из $V = A/\mathfrak{N}$ и из $Q = \mathfrak{N}$) по методу пункта г) (заметить, что A не содержит подкольца, изоморфного $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$).

е) Показать, что для любого простого числа p групповая алгебра A группы U_p (*Алгебра*, гл. VII, § 2, упражнение 3) над простым полем $\mathbf{F}_p$ является кольцом, в котором главные идеалы образуют совершенно упорядоченное множество по включению, и нильрадикал $\mathfrak{N}$ удовлетворяет равенству $\mathfrak{N}^2 = \mathfrak{N}$; однако A не изоморфно факторкольцу кольца нормирования по некоторому идеалу).

11) Пусть K — поле, наделенное нормированием v высоты 1.

а) Пусть $P(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n$ — многочлен из $K[X]$ степени $n > 1$, в котором $a_n \neq 0$. Показать, что существует строго возрастаю-

щая последовательность $(i_k)_{0\leqslant k\leqslant r}$ целых чисел из интервала $(0, n)$, которая удовлетворяет условиям: 1° $i_0=0$, $i_r=n$; 2° значение $v(a_{i_k})$ конечно при $0\leqslant k\leqslant r$; 3° для любого индекса j, удовлетворяющего неравенствам $0\leqslant j\leqslant n$, отличного от i_k и такого, что значение $v(a_j)$ конечно, точка

$$(j, v(a_j))\in\mathbf{R}^2$$

находится строго выше прямой, проходящей через точки $(i_k, v(a_{i_k}))$ и $(i_{k+1}, v(a_{i_{k+1}}))$. Объединение сегментов, соединяющих точки $(i_k, v(a_{i_k}))$ и $(i_{k+1}, v(a_{i_{k+1}}))$, называется *многоугольником Ньютона* многочлена P, сами эти сегменты — его *сторонами*, а точки $(i_k, v(a_{i_k}))$ — его *вершинами*.

б) Предположим, что все нули многочлена P принадлежат полю K. Показать, что, для того чтобы нормирования всех этих нулей были одинаковы, необходимо и достаточно, чтобы $r=1$ (иначе говоря, необходимо, чтобы многоугольник Ньютона сводился к *единственной стороне*). (Для доказательства достаточности рассмотреть многоугольник Ньютона произведения P_1P_2, где все корни многочлена P_1 обратимы в кольце нормирования v, тогда как корни многочлена P_2 лежат в идеале нормирования v.)

в) Предположим, что все корни многочлена P принадлежат полю K; построим многоугольник Ньютона многочлена P и положим

$$\rho_k=i_{k+1}-i_k, \qquad \sigma=\big(v(a_{i_{k+1}})-v(a_{i_k})\big)/\rho_k.$$

Показать, что для $0\leqslant k\leqslant r-1$ многочлен P имеет точно ρ_k нулей (с учетом их кратностей), нормирования которых равны σ_k (воспользоваться б) и рассуждать с помощью индукции по r).

г) Обобщить предыдущие результаты на случай произвольного нормирования v (вложить группу Γ порядков нормирования v в векторное $\mathbf{Q}$-пространство $\Gamma_{(\mathbf{Q})}$, наделенное естественным образом структурой совершенно упорядоченной группы).

§ 5. Топология, определенная нормированием

1. Топология, определенная нормированием

Пусть K — тело, не обязательно коммутативное, v — некоторое нормирование тела K и G — совершенно упорядоченная группа $V(K^*)$. Для всякого $\alpha\in G$ пусть V_α обозначает множество тех $x\in K$, для которых $v(x)>\alpha$; это множество является аддитивной подгруппой поля K (§ 3, n° 1). Существует, и притом единственная, топология $\mathscr{T}_v$ на K, согласованная со структурой аддитивной группы тела K, в которой V_α образуют фундаментальную систему окрестностей нуля (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 1, n° 2, пример). Для того чтобы нормирование v было несобственным, необходимо и достаточно, чтобы топология $\mathscr{T}_v$ была дискретной.

Лемма 1. *Пусть* $x\in K,^*$ $y\in K^*$ *и* $\alpha\in G$. *Если*

$$v(x-y)>\sup(\alpha+2v(y),\ v(y)),$$

то $v(x^{-1}-y^{-1})>\alpha$.

Действительно, $x^{-1}-y^{-1}=x^{-1}(y-x)y^{-1}$, следовательно,

$$v(x^{-1}-y^{-1})=v(x-y)-v(x)-v(y).$$

Если $v(x-y)>v(y)$, то из предложения 1 § 3, n° 1, следует, что $v(x)=v(y)$, так как $x=y+(x-y)$. Кроме того, если $v(x-y)>\alpha+2v(y)$, то $v(x^{-1}-y^{-1})>\alpha+2v(y)-2v(y)=\alpha$.

Предложение 1. *Топология $\mathscr{T}_v$ отделима и согласована со структурой тела K. Отображение $v\colon K^*\to G$ является непрерывным, если считать, что G наделена дискретной топологией.*

Пусть $x\in K^*$ и $\alpha=v(x)$; тогда $x\notin V_\alpha$, т. е. топология $\mathscr{T}_v$ отделима. Каковы бы ни были элементы $x_0\in K$ и $\alpha\in G$, существует такой элемент $\beta\in G$, что $x_0V_\beta\subset V_\alpha$ и $V_\beta x_0\subset V_\alpha$ (достаточно взять $\beta\geqslant\alpha-v(x_0)$). С другой стороны, если $\alpha\geqslant 0$, то $V_\alpha V_\alpha\subset V_\alpha$. Аксиомы ($AV_I$) и ($AV_{II}$) из *Общей топологии*, 1969, гл. III, § 6, n° 6, таким образом, выполнены, так что топология $\mathscr{T}_v$ согласована со структурой кольца на K. Пусть $x_0\in K^*$; если элемент $x\in K^*$ удовлетворяет условию $v(x-x_0)>\sup(\alpha+2v(x_0),\ v(x_0))$, то $v(x^{-1}-x_0^{-1})>\alpha$ (лемма 1); тем самым и доказано, что отображение $x\to x^{-1}$ непрерывно и, следовательно, топология $\mathscr{T}_v$ согласована со структурой тела на K. Наконец, из условия $v(x-x_0)>v(x_0)$ вытекает, что $v(x)=v(x_0)$ (§ 3, n° 1, предложение 1); поэтому отображение $v\colon K^*\to G$ непрерывно, если наделить G дискретной топологией.

Пусть $\alpha\in G$ и V'_α — множество тех элементов $x\in K$, для которых $v(x)\geqslant\alpha$. Если $\beta<\alpha$, то $V_\beta\supset V'_\alpha\supset V_\alpha$. Если нормирование v не является несобственным, то мы видим, что множества V'_α образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в топологии $\mathscr{T}_v$.

Множества V_α и V'_α являются открытыми аддитивными подгруппами в теле K и потому замкнуты в нем. Значит, топологическое тело K *вполне несвязно*. Поскольку всякий ненулевой идеал кольца нормирования v содержит некоторую группу V_α, то он *и открыт, и замкнут* в теле K. Фактортопология на теле вычетов нормирования v является, следовательно, *дискретной*.

Пусть A — кольцо нормирования v. Если v дискретно, то предложение 8 § 3, n° 6, показывает, что топология на A, индуцированная топологией $\mathscr{T}_v$, является $\mathfrak{m}(A)$-адической. Это, однако, не так в общем случае (упражнение 4).

Предложение 2. *Пусть K — тело, v — некоторое нормирование на K, не являющееся несобственным, A — кольцо нормирования v и $\mathfrak{m}$ — идеал нормирования v. Для того чтобы тело K, наделенное топологией $\mathscr{T}_v$, было локально компактным, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:*

(i) *тело K полно*;
(ii) *нормирование v дискретно*;
(iii) *тело вычетов $\kappa(A)$ конечно.*
Если эти условия выполнены, то кольцо A компактно.

Предположим, что K локально компактно. Тогда оно полно (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 3, n° 3, следствие 1 предложения 4), более того, существует компактная окрестность нуля, которая содержит некоторую окрестность V'_α, где α принадлежит группе значений нормирования v. Другими словами, существует такой элемент $a \neq 0$ в K^*, что множество $A \cdot a$ компактно; отсюда следует, что компактно и кольцо $A = (A \cdot a)a^{-1}$. Поскольку всякий идеал $\mathfrak{b} \neq (0)$ в A открыт, кольцо $A/\mathfrak{b}$ компактно и дискретно (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 2, n° 5, предложение 14), а потому конечно и, в частности, тело $\kappa(A) = A/\mathfrak{m}$ конечно. Кроме того, так как для $y \neq 0$ из $\mathfrak{m}$ кольцо A/Ay конечно, существует лишь конечное число идеалов кольца A, содержащих идеал Ay, и множество P элементов вида $v(x)$, для которых

$$0 < v(x) \leqslant v(y),$$

конечно. Поскольку группа $v(K^*)$ совершенно упорядочена, P обладает наименьшим элементом γ. Следовательно, для любого $x \in A$, удовлетворяющего условию $v(x) > 0$, или $v(x) > v(y) \geqslant \gamma$, или $v(x) \leqslant v(y)$ и тогда $v(x) \geqslant \gamma$ по определению, так что γ — *наименьший* из элементов >0 в группе $v(K^*)$. Так как множество P конечно, существует наибольшее целое число $m \geqslant 0$, такое, что $m\gamma \in P$, откуда $m\gamma \leqslant v(y) < (m+1)\gamma$. Из этого вытекает, что $0 \leqslant v(y) - m\gamma < \gamma$, и по определению элемента γ это влечет за собой $v(y) = m\gamma$. Следовательно, $v(K^*) = \mathbf{Z} \cdot \gamma$ и нормирование v дискретно.

Обратно, предположим, что условия (i), (ii) и (iii) выполнены. Можно ограничиться случаем, когда v нормировано. Пусть u — униформизирующая для v. Тогда $\kappa(A) = A/Au$; следовательно, кольцо A/Au конечно. Поскольку отображение $x \to xu^n$ определяет при переходе к факторгруппам изоморфизм аддитивной группы кольца A/Au на группу Au^n/Au^{n+1}, множество A/Au^j конечно при всяком $j \geqslant 0$. Поскольку кольцо A замкнуто в K, оно полно, а потому изоморфно проективному пределу колец A/Au^j (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 7, n° 3, предложение 2). Отсюда следует компактность кольца A. Поскольку A открыто в K, мы видим, что тело K локально компактно.

Замечание. Следует отметить, что в этом доказательстве достаточно считать, что кольцо A *полно*.

Мы увидим в § 9, что любое тело K, удовлетворяющее условиям предложения 2, обладает центром, который представляет собой или алгебраическое расширение конечной степени p-адического поля, или поле $\mathbf{F}_q((T))$ формальных рядов над конечным полем; кроме того, тело K имеет конечный ранг над своим центром.

2. *Топологические векторные пространства над телом с нормированием*

Пусть K — некоторое тело, v — некоторое нормирование тела K и G — группа значений этого нормирования. Наделим тело K топологией $\mathscr{T}_v$.

Предложение 3. *Пусть E — левое топологическое векторное пространство над K, являющееся отделимым и имеющее размерность* 1. *Допустим, что нормирование v не является несобственным. Для любого $x_0 \neq 0$ из E отображение $a \to ax_0$ тела K_s на пространство E является топологическим изоморфизмом.*

Это отображение представляет собой непрерывный алгебраический изоморфизм. Достаточно доказать, что оно непрерывно в обе стороны. Пусть $\alpha \in G$. Достаточно доказать, что существует такая окрестность V нуля пространства E, что из соотношения $ax_0 \in V$ следует неравенство $v(a) > \alpha$. Пусть $a_0 \in K^*$ — такой элемент, что $v(a_0) = \alpha$. Поскольку E — отделимое пространство, существует такая окрестность W нуля в пространстве E, что $a_0 x_0 \notin W$. Поскольку v не является несобственным, существует такая окрестность W' нуля в E и такой элемент β группы G, что из соотношений $y \in W'$ и $v(a) \geqslant \beta$ следует включение $ay \in W$. Пусть $a_1 \in K^*$ — такой элемент, что $v(a_1) = -\beta$. Соотношение $ax_0 \in a_1^{-1} W'$ и $v(a) \leqslant \alpha$ влекут за собой $a_1 a x_0 \in W'$ и $v(a_0 a^{-1} a_1^{-1}) = \alpha + \beta - v(a) \geqslant \beta$; следовательно, $a_0 x_0 = a_0 a^{-1} a_1^{-1} \times (a_1 a x_0) \in W$, а это не так. Другими словами, из соотношения $ax_0 \in a_1^{-1} W'$ следует, что $v(a) > \alpha$.

Следствие. *Пусть E — левое топологическое векторное пространство над телом K, H — замкнутая гиперплоскость в E и D — векторное подпространство размерности* 1 *в E, являющееся алгебраическим дополнением к H. Предположим, что нормирование v не является несобственным. Тогда D представляет собой топологическое дополнение к H.*

Если принять во внимание предложения 1 и 3, то доказательство этого факта будет аналогично доказательству следствия 2 из теоремы 1 в *Топологических векторных пространствах*, гл. I, § 2.

Предложение 4. *Предположим, что нормирование v не является несобственным и что тело K полно. Пусть E — левое топо-*

логическое векторное пространство над K, являющееся отделимым и имеющее размерность n. Для любого базиса $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ пространства E над K отображение $(a_i)\to\sum_{i=1}^{n}a_ie_i$ пространства K_s^n на E представляет собой изоморфизм топологических векторных пространств.

Если принять во внимание предложение 3 и его следствие, то доказательство этого факта будет аналогично доказательству теоремы 2 из *Топологических векторных пространств*, гл. I, § 2.

Следствие. *Предположим, что нормирование v не является несобственным и что тело K полно. Пусть E — отделимое топологическое векторное пространство над K и F — подпространство в E, имеющее конечную размерность. Тогда подпространство F замкнуто.*

В самом деле, подпространство F полно.

3. Пополнение тела с нормированием

Предложение 5. *Пусть K — тело, v — нормирование на K и G — группа $v(K^*)$, наделенная дискретной топологией.*

а) *Пополнение $\widehat{K}$ тела K (наделенного топологией $\mathscr{T}_v$) является топологическим телом.*

б) *Отображение $v\colon K^*\to G$ единственным образом продолжается до непрерывного отображения $\hat{v}\colon \widehat{K}^*\to G$. Отображение $\hat{v}$ (продолженное с помощью равенства $\hat{v}(0)=+\infty$) является нормированием тела $\widehat{K}$ и $\hat{v}(\widehat{K}^*)=v(K^*)$.*

в) *Топология тела $\widehat{K}$ есть топология, определяемая нормированием $\hat{v}$.*

г) *Для любого элемента $\alpha\in G$ пусть V_α, V'_α — подгруппы тела K, определенные условиями $v(x)>\alpha$, $v(x)\geqslant\alpha$). Тогда замыкания $\overline{V}_\alpha$, $\overline{V}'_\alpha$ групп V_α, V'_α в теле $\widehat{K}$ определяются условиями $\hat{v}(x)>\alpha$, $\hat{v}(x)\geqslant\alpha$ соответственно.*

д) *Кольцо нормирования $\hat{v}$ представляет собой пополнение $\widehat{A}$ кольца A нормирования v; идеал нормирования $\hat{v}$ является пополнением $\widehat{\mathfrak{m}}$ идеала $\mathfrak{m}$ нормирования v.*

е) *Имеет место равенство $\widehat{A}=A+\widehat{\mathfrak{m}}$; поле вычетов нормирования $\hat{v}$ канонически отождествляется с полем вычетов нормирования v.*

Для доказательства пункта а) достаточно (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 6, n° 8, предложение 7) доказать следующее:

пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр Коши (для аддитивной равномерной структуры) на K^*, для которого 0 не является точкой прикосновения: тогда образ фильтра $\mathfrak{F}$ относительно биективного отображения $x \to x^{-1}$ является фильтром Коши (для аддитивной равномерной структуры). Действительно, так как 0 не является точкой прикосновения для $\mathfrak{F}$, то существует множество $M \in \mathfrak{F}$ и элемент $\beta \in G$, такие, что β мажорирует множество $v(M)$. Пусть $\alpha \in G$. Если M' — элемент из $\mathfrak{F}$, содержащийся в M и такой, что $v(x-y) > \sup(\alpha+2\beta, \beta)$ для $x \in M'$ и $y \in M'$, то $v(x^{-1}-y^{-1}) > \alpha$ для $x \in M'$ и $y \in M'$ (n° 1, лемма 1). Отсюда следует а).

В силу предложения 1 n° 1, отображение $v \mid K^*$ является непрерывным представлением группы K^* в группу G; следовательно, оно единственным образом продолжается до непрерывного представления $\hat{v}$ группы $\hat{K}^*$ в группу G. Соотношение

$$\hat{v}(x+y) \geqslant \inf(\hat{v}(x),\ \hat{v}(y)),$$

поскольку оно верно в K^*, остается верным и в $\hat{K}^*$ из соображений непрерывности. Таким образом, отображение $\hat{v}$ (продолженное с помощью равенства $\hat{v}(0) = +\infty$) является нормированием тела $\hat{K}$. Пункт б) доказан.

Докажем г). Пусть $\alpha \in G$ и $x \in \overline{V}_\alpha - \{0\}$. Для элемента y из V_α, достаточно близкого к x, имеем $\hat{v}(x) = \hat{v}(y) = v(y)$; следовательно, $\hat{v}(x) > \alpha$. Обратно, пусть элемент $x \in \hat{K}^*$ таков, что $\hat{v}(x) > \alpha$. Для элемента y из K^*, достаточно близкого к x, имеем $v(y) = \hat{v}(y) = \hat{v}(x)$; следовательно, $y \in V_\alpha$, откуда $x \in \overline{V}_\alpha$. Таким образом, $\overline{V}_\alpha$ представляет собой множество таких элементов $x \in \hat{K}$, что $\hat{v}(x) > \alpha$. Аналогичным образом проводятся рассуждения и для множества V'_α. Этим доказано г).

В соответствии с предложением 7 из *Общей топологии*, гл. III, § 3, n° 4, утверждение в) является следствием утверждения г). Утверждение д) является частным случаем утверждения г). Наконец, пусть $x \in \hat{A}$. Существует такой элемент $y \in A$, что $\hat{v}(x-y) > 0$, но тогда $z = x - y \in \hat{\mathfrak{m}}$ и, следовательно, $x = y + z \in A + \hat{\mathfrak{m}}$; таким образом, $\hat{A} = A + \hat{\mathfrak{m}}$, а это и доказывает е).

Замечание. Для всякого элемента $x \in \hat{K}$, не принадлежащего кольцу $\hat{A}$, существует такой элемент $x_0 \in K$, что $\hat{v}(x - x_0) > 0$, $\hat{v}(x) = \hat{v}(x_0) = v(x_0) < 0$; следовательно, $x_0^{-1} x \in \hat{A}$ и, поскольку $x_0^{-1} \in \hat{A}$, мы видим, что если положить $S = A - \{0\}$, то $K = S^{-1}\hat{A}$.

Упражнения

¶ 1) Пусть A — целостное кольцо, K — его поле частных и $\mathscr{T}$ — некоторая линейная топология на A (гл. III, § 2, упражнение 21).

а) Для того чтобы окрестности нуля в $\mathscr{T}$ образовывали фундаментальную систему окрестностей нуля для некоторой топологии $\mathscr{T}_K$, согласованной со структурой кольца на K, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{T}$ была топологией $\mathscr{T}_u(A)$ (гл. III, § 2, упражнение 24), в этом случае A является ограниченным множеством относительно $\mathscr{T}_K$, и $\mathscr{T}_K$ представляет собой локально ограниченную отделимую топологию (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 6, упражнения 12 и 20д)). Для того чтобы поле K было компактно (соответственно линейно компактно, соответственно строго линейно компактно) (гл. III, § 2, упражнение 21) относительно $\mathscr{T}_K$, необходимо и достаточно, чтобы A обладало соответствующим свойством относительно $\mathscr{T}$.

б) Для того чтобы топология $\mathscr{T}_K$ (где $\mathscr{T}=\mathscr{T}_u(A)$) была согласована со структурой поля K, необходимо и достаточно, чтобы радикал $\mathfrak{R}(A)$ кольца A был отличен от нуля.

¶ 2) Пусть K — поле, $\mathscr{T}$ — недискретная отделимая топология на K, согласованная со структурой кольца на K. Для того чтобы топология $\mathscr{T}$ определялась каким-либо нормированием или абсолютным значением на K, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{T}$ была локально обратно ограниченной (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 6, упражнение 22). Если в K существуют топологически нильпотентные элементы, надо применить упражнение 22г) из *Общей топологии*, 1969, гл. III, § 6 и упражнение 13 из *Topologie générale*, chap. IX, 2e ed., § 3. В противном случае следует воспользоваться упражнением 22е) из § 6 *Общей топологии*, 1969, гл. III.

¶ 3) Пусть A — целостное нётерово кольцо, K — его поле частных, $\mathscr{T}_u$ — топология $\mathscr{T}_u(A)$ на A и $\mathscr{T}_K$ — соответствующая топология на K (упражнение 1).

а) Если A — кольцо Зарисского с радикалом $\mathfrak{r}\neq 0$ и если A полно относительно $\mathfrak{r}$-адической топологии, то показать, что кольцо A полно и относительно топологии $\mathscr{T}_u$ (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 3, n° 5, следствие 2 предложения 9).

б) Предположим, что топология $\mathscr{T}_K$ не дискретна и определяется некоторым нормированием v поля K. Показать, что v является дискретным нормированием и что A представляет собой открытое подкольцо кольца V нормирования v; верно и обратное. (Используя условие, из которого следует, что $A\neq K$, а также предложение 1 из § 4, n° 1, можно считать, что $A\subset V$. Используя тот факт, что A открыто в топологии $\mathscr{T}_K$, показать, что V является A-модулем конечного типа, и завершить рассуждения так же, как в предложении 9 § 3, n° 5. Для доказательства обратного утверждения заметить, что A является локальным кольцом, в котором максимальный идеал $\mathfrak{m}$ и идеал (0) — это единственные простые идеалы и, следовательно, любой идеал $\mathfrak{a}\neq 0$ является $\mathfrak{m}$-примарным.) Целым замыканием кольца A является в этом случае V. Привести пример, когда $A\neq V$ (взять в качестве V кольцо формальных рядов $k[[T]]$, где k — некоторое поле).

в) Привести на основе доказанного выше пример недискретного полного топологического поля, топология которого не является локально обратно ограниченной (воспользоваться упражнением б) и упражнением 2).

4) Пусть v — некоторое нормирование на поле K, A — его кольцо, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал.

а) Для того чтобы топология, определенная нормированием v на кольце A, совпадала с $\mathfrak{m}$-адической, необходимо и достаточно, чтобы A было полем или кольцом дискретного нормирования.

б) Для того чтобы в топологии, определенной нормированием v, A представляло собой строго линейно компактное кольцо (гл. III, § 2, упражне-

нне 21), необходимо и достаточно, чтобы A было полем или кольцом дискретного нормирования (воспользоваться упражнением а) и упражнением 22а) гл. III, § 2).

5) а) Пусть K — поле, v — некоторое нормирование на K и Γ — группа порядков нормирования v. Для того чтобы K было линейно компактным (гл. III, § 2, упражнение 15) относительно топологии $\mathscr{T}_v$, необходимо и достаточно, чтобы для любого *вполне упорядоченного* подмножества B группы Γ и любого семейства $(a_\beta)_{\beta\in B}$ элементов поля K, для которого при $\lambda<\mu<\nu$ выполняется условие $v(a_\lambda-a_\mu)<v(a_\mu-a_\nu)$, существовал такой элемент $a\in K$, что $v(a-a_\lambda)=v(a_\lambda-a_\mu)$ для любой пары λ, μ, где $\mu>\lambda$. (Воспользоваться упражнением 4 из *Theorie des Ensemble*, chap. III, 2e ed., § 2.) Когда сформулированное условие выполняется, кольцо A нормирования v является также линейно компактным в дискретной топологии.

б) Показать, что поле $S(\Gamma, k)=K$, определенное в упражнении 2 § 3, линейно компактно в топологии $\mathscr{T}_v$. Возьмем в качестве Γ совершенно упорядоченную группу $\mathbf{Q}$ рациональных чисел и рассмотрим подкольцо K_0 поля K, образованное такими $x=(x_\alpha)$, что множество $\alpha\in\mathbf{Q}$, для которых $x_\alpha\neq 0$, конечно или является строго возрастающей последовательностью, стремящейся к $+\infty$. Показать, что K_0 — поле, полное относительно нормирования v_0, которое индуцировано каноническим нормированием v поля K, а также что v_0 имеет ту же группу значений и то же поле вычетов, что и v, однако K_0 не является линейно компактным (ср. § 10, упражнение 2).

¶ 6) а) Пусть A — кольцо нормирования, M — некоторый A-модуль и M' — некоторый подмодуль в M. Показать, что, для того чтобы M' был *чистым* подмодулем в M (гл. I, § 2, упражнение 24), необходимо и достаточно, чтобы для любого $\alpha\in A$ выполнялось равенство $M'\cap(\alpha M)=\alpha M'$.

б) Пусть M' — такой чистый подмодуль модуля M, что если наделить M' топологией, в которой $\alpha M'$ (где $\alpha\in A$, $\alpha\neq 0$) образуют фундаментальную систему окрестностей нуля, то M' оказывается линейно компактным. Показать, что для всякого элемента $x\in M$ существует такой $y'\in M'$, что элемент $x'=x+y'$ обладает следующим свойством: для любого $\alpha\in A$, удовлетворяющего условию $x+M'\in\alpha(M/M')$, имеет место включение $x'\in\alpha M$. (Для каждого из элементов $\alpha\in A$, удовлетворяющих условию $x+M'\in\alpha(M/M')$, рассмотреть подмножество S_α в M', образованное элементами y'_α, для которых $x+y'_\alpha\in\alpha M$.)

в) Предположим, что A является линейно компактным кольцом нормирования. Пусть K — поле частных кольца A. Показать, что если M является таким A-модулем без кручения, что $M_{(K)}$ обладает счетным базисом, то M представляет собой прямую сумму счетного семейства A-модулей ранга 1. (Рассматривать M как объединение возрастающей последовательности (M'_i) таких чистых подмодулей, что M'_i имеет ранг i, и при каждом i применить упражнение б) к M'_i и его подмодулю M'_{i-1}.)

г) Пусть относительно A и M выполняются те же предположения, что и в пункте в). Пусть N — чистый подмодуль в M, имеющий конечный ранг. Показать, что N является прямым слагаемым в M (заметить, что любой A-модуль, представляющий собой прямую сумму конечного числа A-модулей ранга 1, линейно компактен, и воспользоваться пунктом б)).

д) При тех же предположениях относительно M и M', что и в пункте б), показать, что для любого $x\in M$ существует такой элемент $y'\in M'$, что аннулятор элемента $x=x+y'$ равен аннулятору элемента $x+M'\in M/M'$. (Пусть $\mathfrak{a}$ — аннулятор элемента $x+M'$; для всякого $\alpha\in\mathfrak{a}$ пусть T_α — подмножество в M', образованное элементами y', для которых $\alpha(x+y')=0$; показать, что пересечение множеств T_α непусто.)

е) Предположим, что A является таким кольцом нормирования, что для любого идеала $\mathfrak{a} \neq 0$ модуль $A/\mathfrak{a}$ над кольцом A линейно компактен (в дискретной топологии). Показать, что любой A-модуль кручения конечного типа M является прямой суммой конечного числа моногенных A-модулей. (Если $(z_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — система образующих модуля M, то надо использовать индукцию по n, рассматривая один из элементов z_i, аннулятор которого наименьший, и замечая при этом, что подмодуль в M, порожденный этим элементом, является чистым.)

¶ 7) Пусть K — поле, v — дискретное нормирование на K, при котором K является *полным* в топологии $\mathscr{T}_v$. Обозначим через A и $\mathfrak{p}$ кольцо и идеал нормирования v, а через $U = A - \mathfrak{p}$ обозначим множество обратимых элементов в A. Пусть u — некоторый изоморфизм поля K на подполе в поле K.

а) Показать, что $u(\mathfrak{p}) \subset A$ и $u(U) \subset U$. (Для доказательства первого утверждения заметить, что для любого $z \in \mathfrak{p}$ уравнение $x^n = 1 + z$ имеет решение в A при любом $n > 0$, взаимно простом с характеристикой поля вычетов нормирования v; для этого воспользоваться леммой Гензеля. Если бы имело место неравенство $v(u(z)) < 0$, то отсюда получалось бы, что $v(u(z))$ делится на любое целое число $n > 0$, взаимно простое с характеристикой поля вычетов нормирования v. Второе утверждение вывести из первого.)

б) Вывести из а), что или $u(K^*) \subset U$, или отображение u непрерывно (рассмотреть образ при u какой-нибудь униформизирующей нормирования v).

в) Привести пример алгебраически замкнутого поля Ω, при котором поле $K = \Omega((X))$ изоморфно некоторому подполю в K, содержащемуся в $U \cup \{0\}$ (ср. *Алгебра*, гл. V, § 5, упражнение 13).

¶ 8) а) Пусть K — поле, v — нормирование высоты 1 на K и A — его кольцо. Пусть H — некоторое компактное подмножество в K (относительно топологии $\mathscr{T}_v$) и $a \neq 0$ — какой-либо элемент из K. Показать, что существует такой многочлен $f \in K[X]$ без свободного члена, что $f(a) = 1$, $f(H) \subset A$. (Доказать, что можно взять в качестве f многочлен вида

$$1 - (1 - a^{-1}X)(1 - c_1^{-1}X)^{n(1)} \dots (1 - c_r^{-1}X)^{n(r)},$$

где c_i — подходящим образом выбранные элементы из H, для которых $v(c_i) < v(a)$, а n_i — достаточно большие целые положительные числа.)

б) Пусть X — вполне несвязное компактное пространство. Наделим кольцо $\mathscr{C}(X; K)$ непрерывных отображений пространства X в K топологией равномерной сходимости. Пусть B — подкольцо кольца $\mathscr{C}(X; K)$, содержащее константы и разделяющее точки из X; показать, что B плотно в $\mathscr{C}(X; K)$ (воспользоваться пунктом а) и упражнением 21б) из *Topologie générale*, chap. X, 2e ed., § 4).

¶ 9) Пусть A — кольцо дискретного нормирования, π — униформизирующая кольца A и K — поле частных кольца A. Предположим, что A *полно* относительно π-адической топологии. Инъективные A-модули (*Алгебра*, гл. II, § 2, упражнение 11) совпадают с делимыми A-модулями (*Алгебра*, гл. VII, § 2, упражненне 3) и представляют собой прямые суммы A-модулей, изоморфных нли K, или K/A (*Алгебра*, гл. VII, § 2, упражнение 3). Кроме того, любой моногенный A-модуль кручення изоморфен некоторому подмодулю в K/A. A-модуль $\mathrm{Hom}_A(M, K/A)$ называется *тороидальным сопряженным* (*алгебраическим*) модулем для A-модуля M и обозначается через M^*; каноннческое отображение c_M: $M \to M^{**}$ инъектнвно (*Algebra*, chap. II, 3e ed, § 2, exercice 13b)). Для всякого подмодуля N в M подмодуль N^0 в M^*, образованный такими u, что $u(x) = 0$ для всех $x \in N$, называется *ортогональным* к N в M^*; модуль, сопряженный к M/N, канонически

отождествляется с N^0, а модуль, сопряженный к N, отождествляется с M^*/N^0. Тороидальный сопряженный модуль для индуктивного предела $\varinjlim M_\alpha$ канонически изоморфен проективному пределу $\varprojlim M_\alpha^*$.

а) Известно, что A-модули ранга один (*Алгебра*, гл. VII, § 4, упражнение 22) изоморфны модулю одного из видов: A, K, K/A или $A/\pi^h A$. Показать, что алгебраические тороидальные сопряженные модули для K или $A/\pi^h A$ им же соответственно и изоморфны, а тороидальный сопряженный модуль для A изоморфен K/A, и наоборот, тороидальный сопряженный модуль для K/A изоморфен A (надо воспользоваться тем, что известны A-подмодули в K, и тем фактом, что A полно (при вычислении модуля, сопряженного с K/A)). Вывести отсюда, что для любого A-модуля M конечного ранга модуль M^* имеет тот же ранг и что канонический гомоморфизм c_M биективен.

б) Пусть M — некоторый A-модуль и N — подмодуль конечного ранга в M. Показать, что модуль, ортогональный к N^0 в M^{**}, отождествляется (относительно c_M) с N (воспользоваться упражнением а)).

в) Показать, что A-модуль M, являющийся нётеровым (соответственно артиновым), имеет конечный ранг (вложить M в его инъективную оболочку (*Algebre*, chap. II, 3e ed., § 2, exercice 18); в этом случае модуль M^* артинов (соответственно нётеров).

г) Обозначим через $\sigma(M^*, M)$ топологию (на M^*) простой сходимости в M (считается, что K/A наделено дискретной топологией). Показать, что если N — подмодуль в M, то $\sigma(N^0, M/N)$ индуцируется на N^0 топологией $\sigma(M^*, M)$ и что $\sigma(M^*/N^0, N)$ является фактортопологией относительно N^0 топологии $\sigma(M^*, M)$. (Для второго утверждения надо заметить, что если P — подмодуль в M, для которого $N \subset P$, то модуль, сопряженный с P/N, отождествляется с N^0/P^0.) Если $M = \varinjlim M_\alpha$, то топология $\sigma(M^*, M)$ является проективным пределом топологий $\sigma(M_\alpha^*, M_\alpha)$.

д) Топологии $\sigma(K, K)$ и $\sigma(A, K/A)$ являются π-адическими; топологии $\sigma(A/\pi^h A, A/\pi^h A)$ и $\sigma(K/A, A)$ являются дискретными. Вывести отсюда, что для любого A-модуля M модуль M^*, наделенный топологией $\sigma(M^*, M)$, *линейно компактен* (гл. III, § 2, упражнение 15; надо рассмотреть M как фактормодуль некоторого свободного A-модуля).

е) Пусть M, N — два A-модуля; для любого гомоморфизма u: $M \to N$ обозначим через ${}^t u$ гомоморфизм $\mathrm{Hom}(u, 1_{K/A})$ из N^* в M^*, при котором $({}^t u(w))(x) = w(u(x))$ для любого $x \in M$ и любого $w \in N^*$. Показать, что гомоморфизм ${}^t u$ непрерывен в топологиях $\sigma(N^*, N)$ и $\sigma(M^*, M)$. Если u — эндоморфизм $x \to \pi x$ модуля M, то ${}^t u$ представляет собой эндоморфизм $w \to \pi w$ модуля M^*. Для любого подмодуля P модуля M имеет место равенство $(u(P))^0 = {}^t u^{-1}(P^0)$.

¶ 10) Сохраняются обозначения и предложения упражнения 9.

а) Если M является дискретным *топологическим* A-модулем, то показать, что M является модулем кручения. Если, кроме того, M линейно компактен, то он артинов (если N — ядро эндоморфизма $x \to \pi x$, заметить, что N линейно компактен и дискретен и может рассматриваться как векторное $(A/\pi A)$-пространство; воспользоваться далее упражнением 20 г) гл. II § 2).

б) Вывести из пункта а), что любой линейно компактный топологический A-модуль строго линейно компактен (гл. II, § 2, упражнение 19).

в) *Топологическим тороидальным сопряженным* модулем для топологического A-модуля M называется подмодуль M' алгебраического тороидального сопряженного модуля M^*, образованный непрерывными гомомор-

физмами подмодуля M в K/A (последний A-модуль считается наделенным дискретной топологией). Если топология на M линейна (гл. II, § 2, упражнение 14) и если N — замкнутый подмодуль в M, то топологический тороидальный сопряженный модуль для модуля M/N отождествляется с $N^0 \cap M'$, а для модуля N — с $M'/(N^0 \cap M')$ (чтобы определить сопряженный модуль для N, надо заметить, что для любого непрерывного гомоморфизма u модуля N в K/A существует такой открытый подмодуль U в модуле M, что $u(x) = 0$ на $N \cap U$, а затем воспользоваться упражнением 9).

г) Для любого топологического A-модуля M конечного ранга топологический тороидальный сопряженный модуль M' равен алгебраическому тороидальному сопряженному модулю M^* (свести к случаю модулей ранга один).

д) Пусть M — отделимый топологический A-модуль, топология которого линейна; показать, что для любого $x \neq 0$ из M существует такой элемент $u \in M'$, что $u(x) \neq 0$ (заметить, что существует такой открытый подмодуль U в M, что $x \notin U$). Другими словами, каноническое отображение $M \to (M')^*$ инъективно. Вывести отсюда, что если N — замкнутый подмодуль в M, то пересечение $N^0 \cap M'$ плотно в N^0 в смысле топологии $\sigma(M^*, M)$ (воспользоваться пунктом г)) и, следовательно, $N = M \cap (N^0 \cap M')^0$ в M^{**}.

Показать, что модуль M плотен в $(M')^*$ в смысле топологии $\sigma((M')^*, M')$.

е) Пусть M — линейно компактный топологический A-модуль; показать, что каноническое вложение $M \to (M')^*$ *биективно* и что топология на M (отождествленном с $(M')^*$) равна $\sigma(M, M')$. (Заметить, что если U — открытый подмодуль в M, то модуль M/U артинов в силу пункта а) и, следовательно, модуль U^0 нётеров (упражнение 9); вывести отсюда совпадение рассматриваемых топологий на M; закончить доказательство с помощью упражнения д).)

ж) Пусть M, N — два топологических A-модуля, топологии которых линейны; для любого *непрерывного* гомоморфизма u: $M \to N$ имеет место включение ${}^t u(N') \subset M'$; мы будем снова обозначать через ${}^t u$ (допуская этим некоторую непоследовательность) линейное отображение модуля N' в M', имеющее тот же график, что и ${}^t u$. Если M и N отделимы, то показать, что ограничение на M отображения ${}^t({}^t u)$ совпадает с u (модули M и N рассматриваются при этом как канонически вложенные соответственно в $(M')^*$ и $(N')^*$; кроме того, для любого замкнутого подмодуля Q в N имеет место равенство $(u^{-1}(Q))^0 \cap M' = {}^t u(Q^0)$ (воспользоваться пунктом д)).

з) Пусть M — линейно компактный A-модуль; вывести из упражнений ж) и 9е), что, для того чтобы M не имел кручения, необходимо и достаточно, чтобы модуль M' был делимым, и что для того, чтобы M был делимым, необходимо и достаточно, чтобы модуль M' был без кручения.

§ 6. Абсолютные значения

1. Предварительные замечания об абсолютных значениях

Пусть K — тело (коммутативное или нет). Напомним (*Topologie générale*, chap. IX, § 3, n° 2, definition 2), что *абсолютным значением* на K называется любое отображение f тела K в множество $\mathbf{R}_+$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

(VA$_\mathrm{I}$) *Равенство* $f(x) = 0$ *эквивалентно равенству* $x = 0$.

(VA$_\mathrm{II}$) *Для любых* x, y *из* K $f(xy) = f(x)f(y)$.

(VA$_\mathrm{III}$) *Для любых* x, y *из* K $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$.

Из (VA$_\mathrm{I}$) и (VA$_\mathrm{II}$) следует, что $f(1) = 1$, $f(-1) = 1$ и $f(x^{-1}) = 1/f(x)$ для $x \neq 0$.

Для произвольного отображения f тела K в множество $\mathbf{R}_+$ и для любого вещественного числа $A>0$ мы будем обозначать через (U_A) соотношение

$$f(x+y)\leqslant A\cdot\sup(f(x),f(y))\ \textit{для любых}\ x,\ y\ \textit{из}\ K.$$

Мы будем обозначать через $\mathscr{V}(K)$ *множество отображений* f *из* K *в* $\mathbf{R}_+$, *которые удовлетворяют аксиомам* $(\mathrm{VA_I})$ *и* $(\mathrm{VA_{II}})$ *и для которых существует такое* $A>0$ (*зависящее от* f), *что справедливо соотношение* (U_A).

Следует заметить, что если $f\in\mathscr{V}(K)$, то, полагая $x=1$ и $y=0$ в (U_A), мы получаем, что $1=f(1)\leqslant A\cdot\sup(f(1),f(0))=A$.

Предложение 1. *Для того чтобы некоторое отображение* f *тела* K *в* $\mathbf{R}_+$, *удовлетворяющее аксиомам* $(\mathrm{VA_I})$ *и* $(\mathrm{VA_{II}})$, *принадлежало множеству* $\mathscr{V}(K)$, *необходимо и достаточно, чтобы числа* $f(1+x)$ *составляли ограниченное множество для таких* $x\in K$, *что* $f(x)\leqslant 1$.

Действительно, если f удовлетворяет условию (U_A), то $f(1+x)\leqslant A$, если $f(x)\leqslant 1$. Обратно, предположим, что $f(x+1)\leqslant A$ для таких $x\in K$, что $f(x)\leqslant 1$ (в частности, $A\geqslant f(1)=1$); тогда, если $x=0$ или $y=0$, условие (U_A) выполнено. Если же, напротив, $x\neq 0$ и $y\neq 0$, то можно, например, предположить, что $f(y)\leqslant f(x)$. Следовательно, в силу $(\mathrm{VA_{II}})$, справедливо неравенство $f(yx^{-1})\leqslant 1$ и, значит, $f(1+yx^{-1})\leqslant A$, а отсюда, в силу $(\mathrm{VA_{II}})$, вытекает, что $f(x+y)f(x)^{-1}\leqslant A$, откуда

$$f(x+y)\leqslant Af(x)\leqslant A\cdot\sup(f(x),f(y)).$$

Если f — абсолютное значение на K, то $f(n\cdot 1)\leqslant n$; в силу аксиомы $(\mathrm{VA_{III}})$, это проверяется индукцией по $n>0$; обратно, имеет место

Предложение 2. *Пусть* f — *произвольное отображение тела* K *в* $\mathbf{R}_+$, *принадлежащее множеству* $\mathscr{V}(K)$; *если существует такое* $C>0$, *что* $f(n\cdot 1)\leqslant C\cdot n$ *для всякого целого* $n>0$, *то* f *является абсолютным значением на* K.

Индукцией по $r>0$ из условия (U_A) выводится соотношение

$$f(x_1+x_2+\ \dots\ +x_{2^r})\leqslant A^r\sup_{1\leqslant i\leqslant 2^r}f(x_i) \tag{1}$$

для любого семейства (x_i) из 2^r элементов тела K. Положим $n=2^r-1$; для всякого $x\in K$ из неравенства (1) получается, что

$$(f(1+x))^n=f((1+x)^n)=f\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\right)\leqslant A^r\sup\left(f\left(\binom{n}{i}\right)(f(x))^i\right)\leqslant$$

$$\leqslant CA^r\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(f(x))^i=CA^r(1+f(x))^n,$$

так как $f\left(\binom{n}{i}\right) \leqslant C\left(\frac{n}{i}\right)$. Следовательно,

$$f(1+x) \leqslant C^{1/n} A^{r/n} (1 + f(x)).$$

Устремляя r к $+\infty$, мы получаем, что $f(1+x) \leqslant 1 + f(x)$ для любого $x \in K$; применяя это неравенство к элементу xy^{-1} вместо x (при $y \neq 0$) и принимая во внимание $(\mathrm{VA_{II}})$, получаем соотношение $(\mathrm{VA_{III}})$; предложение доказано.

Следствие 1. *Для того чтобы отображение f тела K в $\mathbf{R}_+$ было абсолютным значением, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло условиям* $(\mathrm{VA_I})$, $(\mathrm{VA_{II}})$ *и* (U_2).

Это необходимо, так как из $(\mathrm{VA_{III}})$ следует, что

$$f(x+y) \leqslant f(x) + f(y) \leqslant 2 \sup(f(x), f(y)).$$

Обратно, предположим, что f удовлетворяет аксиомам $(\mathrm{VA_I})$, $(\mathrm{VA_{II}})$ и (U_2). Для любого целого числа $n > 0$ пусть r будет наименьшим целым числом, удовлетворяющим условию $2^r \geqslant n$; если в неравенстве (1) заменить A на 2, элементы x_i с индексами $i \leqslant n-1$ на 1 и элементы x_i с индексами $i > n-1$ на 0, то мы получим, что $f(n \cdot 1) \leqslant 2^r < 2n$; теперь можно применить предложение 2 при $C = 2$. Таким образом, f является абсолютным значением.

Следствие 2. *Для того чтобы некоторое отображение f из K в $\mathbf{R}_+$ принадлежало множеству $\mathscr{V}(K)$, необходимо и достаточно, чтобы оно имело вид g^t, где $t > 0$ и g — некоторое абсолютное значение на теле K.*

Действительно, утверждение, что f удовлетворяет условию (U_A), равносильно утверждению, что f^s удовлетворяет условию (U_{A^s}). Поскольку существует такое $s > 0$, что $A^s \leqslant 2$, следствие 1 показывает, что для любого такого значения s отображение f^s является абсолютным значением.

2. Ультраметрические абсолютные значения

Говорят, что отображение f тела K в множество $\mathbf{R}_+$ является *ультраметрическим абсолютным значением*, если оно удовлетворяет условиям $(\mathrm{VA_I})$, $(\mathrm{VA_{II}})$ и (U_1) (это, очевидно, влечет за собой, что f является абсолютным значением).

Предложение 3. *Пусть f — произвольное отображение тела K в $\mathbf{R}_+$. Следующие свойства эквивалентны:*

а) *отображение f является ультраметрическим абсолютным значением;*

б) *существует такое нормирование v тела K со значениями в группе $\mathbf{R}$, что $f = a^v$ для некоторого вещественного числа a, удовлетворяющего условию $0 < a < 1$;*

в) *отображение f принадлежит множеству $\mathscr{V}(K)$ и $f(n\cdot 1)\leqslant 1$ для любого целого числа $n>0$;*

г) *для всякого $s>0$ отображение f^s является абсолютным значением.*

Для всякого действительного числа c, такого, что $0<c<1$, отображение $t\to c^t$ является изоморфизмом упорядоченной группы $\mathbf{R}$ (наделенной порядком, обратным обычному) на упорядоченную группу $\mathbf{R}_+^*$; этим доказана эквивалентность пунктов а) и б). Ясно, что из а) следует в). Из условия в) следует г), так как в) влечет за собой $(f(n\cdot 1))^s\leqslant 1\leqslant n$ для любого целого числа $n>0$, и предложение 2 n° 1 показывает, что f^s является абсолютным значением. Наконец, из г) следует а): действительно, если f^s является абсолютным значением, то выполняется условие (U_2) и, следовательно, f удовлетворяет условию $(U_{2\,1/s})$ для всякого $s>0$; отсюда получается, что имеет место и условие (U_1), для доказательства надо устремить s к $+\infty$.

Следствие. *Если K — тело характеристики $p>0$, то любая функция на множестве $\mathscr{V}(K)$ является ультраметрическим абсолютным значением.*

Действительно, любой элемент $z=n\cdot 1$ (n — целое >0), отличный от нуля, принадлежит простому подполю $\mathbf{F}_p$ тела K, а потому удовлетворяет условию $z^{p-1}=1$; отсюда следует, что $f(z)=1$, и можно применить предложение 3в).

Если задано такое действительное число c, что $0<c<1$, то формулы

$$f(x)=c^{v(x)},\qquad v(x)=\log_c f(x)$$

устанавливают, как следует из сказанного, взаимно однозначное соответствие между ультраметрическими абсолютными значениями на K и нормированиями тела K с вещественными значениями. Несобственному абсолютному значению (*Topologie générale*, chap. IX, § 3, n° 2) соответствует несобственное нормирование. Пусть v_1, v_2 — два нормирования тела K с вещественными значениями и f_1, f_2 — соответствующие абсолютные значения; для того чтобы v_1 и v_2 были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы эквивалентными были f_1 и f_2; действительно, эквивалентность нормирований v_1 и v_2 равносильна тому, что эквивалентны соотношения $v_1(x)\geqslant 0$ и $v_2(x)\geqslant 0$, или, что то же самое, соотношения $f_1(x)\leqslant 1$ и $f_2(x)\leqslant 1$. Следовательно, достаточно применить предложение 5 из *Topologie générale*, chap. IX, § 3, n° 2. Кроме того (loc. cit.), для того чтобы топологии, определенные на K абсолютными значениями f_1 и f_2, совпадали, необходимо и достаточно, чтобы f_1 и f_2 были эквивалентными.

3. Абсолютные значения на поле $\mathbf{Q}$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть f — любое отображение поля $\mathbf{Q}$ в $\mathbf{R}_+$, принадлежащее множеству $\mathscr{V}(\mathbf{Q})$. Тогда:*

(i) *или f является несобственным абсолютным значением на $\mathbf{Q}$;*

(ii) *или существует действительное число a и простое число p, такие, что $0<a<1$ и $f=a^{v_p}$, где v_p обозначает p-адическое нормирование;*

(iii) *или существует такое $s>0$, что $f(x)=|x|^s$ для любого $x\in\mathbf{Q}$.*

В случае (iii), *для того чтобы f было абсолютным значением на $\mathbf{Q}$, необходимо и достаточно, чтобы $0<s\leqslant 1$.*

Предположим сначала, что $f(n)\leqslant 1$ для любого целого $n>0$. В силу предложения 3 n° 2, существует такое нормирование v поля $\mathbf{Q}$, что $f=b^v$ для некоторого действительного числа b, удовлетворяющего условию $0<b<1$. Но мы знаем (§ 3, n° 4, пример 4), что все нормирования на $\mathbf{Q}$ (с точностью до эквивалентности) исчерпываются несобственным нормированием и p-адическими нормированиями v_p; таким образом, имеет место одно из условий (i) или (ii).

Предположим далее, что существует такое целое $h>0$, что $f(h)>1$; в силу следствия 2 предложения 2 n° 1, существует такое число $\rho>0$, что f^ρ является абсолютным значением. Положим

$$g(x)=\rho\log(f(x))/\log|x|$$

для любого рационального числа $x\neq 0$. Пусть a, b — два целых числа $\geqslant 2$; для любого целого числа $n\geqslant 2$ обозначим через $q(n)$ целую часть числа $n\cdot\log a/\log b$, т. е. наименьшее целое m, для которого $a^n<b^{m+1}$. Следовательно, разложением числа a^n по основанию b будет

$$a^n=c_0+c_1b+\ldots+c_{q(n)}b^{q(n)}, \tag{2}$$

где $0\leqslant c_i<b$ для $0\leqslant i\leqslant q(n)$. Поскольку f^ρ является абсолютным значением, $f^\rho(c_i)\leqslant c_i\leqslant b$ и, следовательно, из (2) вытекает, что

$$(f(a))^{n\rho}=(f(a^n))^\rho\leqslant b\,(1+(f(b))^\rho+\ldots+(f(b))^{\rho q(n)})\leqslant$$
$$\leqslant b\,(q(n)+1)\,(\sup(1,(f(b))^\rho)^{q(n)}.$$

Взяв логарифм от обеих частей этого неравенства и разделив результаты на $n\cdot\log a$, мы получаем

$$g(a)\leqslant\frac{\log b}{n\cdot\log a}+\frac{\log(q(n)+1)}{q(n)}\cdot\frac{q(n)}{n\log a}+$$
$$+\frac{\sup(0,\rho\log f(b))}{\log a}\cdot\frac{q(n)}{n}. \tag{3}$$

Заметим теперь, что, когда n стремится к $+\infty$, величина $q(n)/n$ стремится к $\log a/\log b$; следовательно, $q(n)$ стремится к $+\infty$ и величина

$$\log(q(n)+1)/q(n)$$

стремится к 0 (*Теория функций действительного переменного*, гл. III, § 2, n° 1). Переходя в (3) к пределу, мы получаем

$$g(a) \leqslant \frac{\sup(0,\ \rho \log f(b))}{\log b} = \sup(0,\ g(b)). \qquad (4)$$

Но $f(h) > 1$, откуда $g(h) > 0$. Если заменить a на h в выражении (4), то мы получим, что $\sup(0,\ g(b)) > 0$; следовательно,

$$\sup(0,\ g(b)) = g(b).$$

Итак, каковы бы ни были целые числа a, $b \geqslant 2$, выполняется неравенство $g(a) \leqslant g(b)$; следовательно, $g(a) = g(b)$, если поменять ролями a и b. Другими словами, существует такая константа λ, что $g(a) = \lambda$ для любого целого $a \geqslant 2$. Если положить $s = \lambda/\rho$, то мы получим, что $f(a) = |a|^s$ для всякого целого $a \geqslant 2$. Поскольку $f(xy) = f(x)f(y)$ и $f(-x) = f(x)$, то $f(x) = |x|^s$ для любого $x \in \mathbf{Q}$. Наконец, если $0 < s \leqslant 1$, то мы уже знаем, что $x \to |x|^s$ является абсолютным значением (*Topologie générale*, chap. IX, § 3, n° 2). Обратно, если число s таково, что $x \to |x|^s$ является абсолютным значением на поле $\mathbf{Q}$, то $(1+1)^s \leqslant 1^s + 1^s$, т. е. $2^s \leqslant 2$, откуда $s \leqslant 1$.

4. Структура тела с неультраметрическим абсолютным значением

Теорема 1 (Гельфанд — Мазур). *Пусть K — алгебра над полем* $\mathbf{R}$, *обладающая следующими двумя свойствами*:

1) *кольцо K является телом*;

2) *на теле K существует норма $x \to \|x\|$, согласованная со структурой алгебры на K* (*Topologie générale*, chap. IX, § 3, n° 7, définition 9).

Тогда алгебра K изоморфна либо алгебре $\mathbf{R}$, *либо алгебре* $\mathbf{C}$, *либо алгебре* $\mathbf{H}$.

Напомним (loc. cit.), что можно всегда предполагать выполненным неравенство $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ для любых x, y из K. Наделим тело K топологией (согласованной со структурой алгебры), определенной с помощью данной нормы.

А) *Первый случай: тело K коммутативно и существует такой элемент $j \in K$, что $j^2 = -1$.* Тогда имеется некоторый изоморфизм σ поля $\mathbf{C}$ на подполе поля K, при котором $\sigma(\xi + i\eta) = \xi \cdot 1 + \eta \cdot j$ для ξ, η из $\mathbf{R}$. Мы сейчас докажем от противного, что $K = \sigma(\mathbf{C})$. Предположим, следовательно, что существует

элемент $x \in K - \sigma(\mathbf{C})$. Для любого $z \in \mathbf{C}$ разность $x - \sigma(z)$ представляет собой обратимый элемент в K. Положим $F(z) = (x - \sigma(z))^{-1}$; поскольку отображение σ непрерывно, а взятие обратного элемента также является непрерывным на K (*Topologie générale*, chap. IX, § 3, n° 7, proposition 13; применить к пополнению алгебры K), отображение F есть непрерывное отображение из $\mathbf{C}$ в K. Кроме того, для $z \neq 0$ можно записать

$$F(z) = (\sigma(z))^{-1}(x(\sigma(z))^{-1} - 1)^{-1}.$$

Но так как $(\sigma(z))^{-1} = \sigma(z^{-1})$ стремится к нулю, когда z стремится к бесконечности в $\mathbf{C}$, то величина $F(z)$ стремится к нулю. Другими словами, $z \to \|F(z)\|$ является неотрицательной непрерывной числовой функцией на $\mathbf{C}$, стремящейся к нулю на бесконечности. Следовательно, построенную функцию можно рассматривать как непрерывную функцию на компактном пространстве $\tilde{\mathbf{C}}$, полученном присоединением к $\mathbf{C}$ бесконечно удаленной точки. Верхняя граница α величины $\|F\|$ на $\mathbf{C}$ является, следовательно, конечной и строго положительной, а множество P тех комплексных чисел z, для которых $\|F(z)\| = \alpha$, представляет собой непустое замкнутое множество (*Общая топология*, гл. IV, § 6, n° 1, теорема 1).

Пусть $z \in P$. Положим $y = x - \sigma(z)$, и пусть t — такое комплексное число $\neq 0$, что $\|\sigma(t)\| < \alpha^{-1}$, так что $\|\sigma(t) \cdot y^{-1}\| < 1$ по определению α. Последовательности $(\sigma(t)y^{-1})^n$ и $n(\sigma(t)y^{-1})^n$ сходятся к 0 на K, когда n стремится к $+\infty$, поскольку этим свойством обладают соответствующие последовательности из норм в $\mathbf{R}$. С другой стороны, заметим, что для любого многочлена $H(T) = \prod_{k=1}^{p}(T - \sigma(c_k))$, где c_k — попарно различные комплексные числа, в поле рациональных дробей $K(T)$ выполняется следующее соотношение:

$$\frac{H'(T)}{H(T)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{T - \sigma(c_k)}. \tag{5}$$

Применим эту формулу к многочлену

$$H(T) = T^n - (\sigma(t))^n = \prod_{k=0}^{n-1}(T - \sigma(\omega_n^k t)),$$

где $\omega_n = \exp(2\pi i/n)$, и подставим вместо T элемент $y \in K$, который отличается от всех $\sigma(\omega_n^k t)$. Мы получаем (в поле K) равенство

$$\frac{ny^{n-1}}{y^n - (\sigma(t))^n} = \frac{1}{y - \sigma(t)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{y - \sigma(\omega_n^k t)}. \tag{6}$$

Принимая во внимание определения функции F и элемента y, получаем

$$F(z+t)+\sum_{k=1}^{n-1}F(z+\omega_n^k t)-nF(z)=$$
$$=\frac{ny^{n-1}}{y^n-(\sigma(t))^n}-\frac{n}{y}=\frac{1}{y}\cdot\frac{n(\sigma(t)\,y^{-1})^n}{1-(\sigma(t)\,y^{-1})^n}. \qquad (7)$$

Но в силу выбора элемента t и замечаний, сделанных выше, последний член в (7) стремится к 0, когда n стремится к $+\infty$. Следовательно,

$$\|F(z+t)\|=\lim_{n\to\infty}\left\|nF(z)-\sum_{k=1}^{n-1}F(z+\omega_n^k\cdot t)\right\|. \qquad (8)$$

Но $\|F(z)\|=\alpha$ и $\|F(z+\omega_n^k t)\|\leqslant\alpha$ в силу определения числа α, откуда

$$\left\|nF(z)-\sum_{k=1}^{n-1}F(z+\omega_n^k\cdot t)\right\|\geqslant$$
$$\geqslant n\|F(z)\|-\sum_{k=1}^{n-1}\|F(z+\omega_n^k\cdot t)\|\geqslant n\alpha-(n-1)\alpha=\alpha.$$

Поэтому, согласно (8), устремляя n к $+\infty$, мы получим, что $\|F(z+t)\|\geqslant\alpha$, а в силу определения элемента α это означает, что

$$\|F(z+t)\|=\alpha;$$

другими словами, $z+t\in P$. Этим доказано, что множество P *открыто* в $\mathbf{C}$. Ввиду того что оно также замкнуто и непусто, а $\mathbf{C}$ связно, $P=\mathbf{C}$ и функция $\|F\|$ является константой на $\mathbf{C}$. Но так как эта функция стремится к нулю на бесконечности, то $\|F(z)\|=0$ на $\mathbf{C}$ и, в частности, $\|F(0)\|=\|x^{-1}\|=0$, а это невозможно.

Б) *Второй случай: тело K коммутативно и -1 не является в K квадратом.* Пусть L — поле, полученное присоединением к K одного из корней j многочлена T^2+1. Поле L является векторным пространством над K, для которого пара $(1, j)$ служит базисом; очевидно, L представляет собой алгебру над $\mathbf{R}$. Ясно, что функция $x+yj\to\|x\|+\|y\|$ представляет собой норму на L, согласованную со структурой векторного пространства над $\mathbf{R}$. С другой стороны, для элементов $z=x+yj$, $z'=x'+y'j$ из L имеем

$$\|zz'\|=\|xx'-yy'\|+\|xy'+x'y\|\leqslant\|xx'\|+\|yy'\|+\|xy'\|+\|x'y\|\leqslant$$
$$\leqslant\|x\|\cdot\|x'\|+\|y\|\cdot\|y'\|+\|x\|\cdot\|y'\|+\|x'\|\cdot\|y\|=$$
$$=(\|x\|+\|y\|)(\|x'\|+\|y'\|)=\|z\|\cdot\|z'\|.$$

Таким образом, определенная выше норма согласована со структурой $\mathbf{R}$-алгебры L. В силу случая А), L является $\mathbf{R}$-алгеброй, изоморфной полю $\mathbf{C}$. Однако единственной $\mathbf{R}$-подалгеброй в $\mathbf{C}$, отличной от $\mathbf{C}$, является $\mathbf{R}$. Следовательно, K изоморфно $\mathbf{R}$.

В) *Третий случай: тело K некоммутативно.* Пусть Z — центр тела K, а x — произвольный элемент из K, не принадлежащий Z. Подтело $Z(x)$ тела K коммутативно и норма, индуцированная на нем нормой тела K, согласована со структурой $\mathbf{R}$-алгебры на $Z(x)$. Поскольку $Z \neq Z(x)$ и $\mathbf{R}$-алгебры Z, $Z(x)$ изоморфны $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, в силу случаев А) и Б), то поле Z обязательно изоморфно $\mathbf{R}$, а поле $Z(x)$ изоморфно $\mathbf{C}$. Для любого $x \in K$ поле $Z(x)$ является, следовательно, алгеброй ранга $\leqslant 2$ над Z. Однако справедлива следующая лемма:

Лемма 1. *Пусть D — такое тело с центром L, что для всякого $x \in D$ поле $L(x)$ является расширением поля L степени $\leqslant m$. Тогда ранг тела D над L не превосходит m^2.*

Очевидно, можно ограничиться случаем $D \neq L$. Тогда в D существует *сепарабельное* алгебраическое коммутативное расширение E поля L степени >1 (*Алгебра*, гл. VIII, § 10, n° 3, лемма 1). Поскольку $E = L(x)$ для некоторого подходящим образом выбранного x из E (*Алгебра*, гл. V, § 7, n° 7, предложение 12, и гл. VII, § 5, n° 7), то, в силу сделанных предположений, $[E : L] \leqslant m$. Предположим, что сепарабельное расширение E выбрано так, что число $[E : L]$ конечно и в то же время максимально велико; рассмотрим *коммутант* $E' \supset E$ поля E в теле D, который представляет собой тело с центром E, такое, что

$$[D : E'] = [E : L] \leqslant m$$

(*Алгебра*, гл. VIII, § 10, n° 2, теорема 2). Если бы $E \neq E'$, то в E' существовало бы алгебраическое сепарабельное расширение F поля E конечной степени >1 (*Алгебра*, гл. VIII, § 10, n° 3, лемма 1). Тогда F было бы сепарабельным алгебраическим расширением и для L (*Алгебра*, гл. V, § 7, n° 4, предложение 7) конечной степени $>[E : L]$, а это противоречит определению поля E. Следовательно, $E' = E$, откуда $[D : L] = [D : E] \cdot [E : L] \leqslant m^2$.

Применяя эту лемму к K при $m = 2$, мы видим, что K является некоммутативным надтелом конечного ранга над $\mathbf{R}$, которое обязательно изоморфно телу кватернионов $\mathbf{H}$ (*Алгебра*, гл. VIII, § 11, n° 2, теорема 2).

Замечание. 1) В главе, посвященной нормированным алгебрам, мы дадим более короткое доказательство теоремы Гельфанда — Мазура, пригодное для случая любой отделимой связной локально компактной топологической алгебры K над $\mathbf{R}$.

Принцип этого доказательства заключается в следующем: рассуждения сводятся (так же, как и в случаях Б) и В)) к ситуации, когда K является коммутативной алгеброй *над* $\mathbf{C}$; если $x \in K - \mathbf{C} \cdot 1$, то рассматривается, как и выше, отображение $z \to (x - z \cdot 1)^{-1}$ из $\mathbf{C}$ в K, которое непрерывно и дифференцируемо в $\mathbf{C}$. Для любого элемента x' пространства K', *сопряженного* к локально выпуклому пространству K, отображение $z \to \langle (x - z \cdot 1)^{-1}, x' \rangle$ представляет собой, следовательно, *целую и ограниченную* функцию в $\mathbf{C}$, которая должна быть постоянной в силу теоремы Лиувилля. Теперь мы заключаем, как и в случае А) доказательства теоремы 1, что из полученного факта следует равенство $\langle (x - z \cdot 1)^{-1}, x' \rangle = 0$ при любом $z \in \mathbf{C}$ и любом $x' \in K'$. Теорема Хана — Банаха показывает, что этот вывод противоречит тому, что $(x - z \cdot 1)^{-1} \neq 0$. Следует заметить, что рассуждение в части А) доказательства теоремы 1 лишь по внешнему виду отличается от приведенного выше, так как оно является не чем иным, как частным случаем рассуждения, использованного при доказательстве принципа максимума для аналитических функций, поскольку суммирование по корням из единицы и переход к пределу эквивалентны вычислению интеграла $\int_{\gamma} \frac{F(z+t)\,dt}{t}$ вдоль окружности с центром в нуле, а использования формулы Коши в нашем случае удалось избежать благодаря специальному виду функции F.

Теорема 2 (Островский). *Пусть K — тело, f — элемент множества $\mathscr{V}(K)$, не являющийся ультраметрическим абсолютным значением. Тогда существует, и притом единственное, действительное число $s > 0$ и изоморфизм j тела K на некоторое всюду плотное подтело одного из тел $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$, такие, что $f(x) = |j(x)|^s$ для любого $x \in K$ [1]). Для того чтобы f было абсолютным значением на K, необходимо и достаточно, чтобы $s \leqslant 1$.*

В силу следствия предложения 3 n° 2, тело K имеет характеристику 0; следовательно, оно является алгеброй над $\mathbf{Q}$. Для любого $x \in \mathbf{Q}$ положим $h(x) = f(x \cdot 1)$. Ясно, что $h \in \mathscr{V}(\mathbf{Q})$ и, следовательно, можно применить предложение 4 n° 3. Случаи (i) или (ii) этого предложения не могут иметь места, так как они влекут за собой неравенство $f(n \cdot 1) \leqslant 1$ для любого целого $n > 0$, а отсюда следует, что f есть ультраметрическое абсолютное значение в силу предложения 3 n° 2. Следовательно, существует вещественное число $s > 0$, такое, что $h(x) = |x|^s$ для любого

[1]) На теле $\mathbf{H}$ мы полагаем $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = \bar{z} \cdot z$, где $\bar{z}$ — кватернион, сопряженный с кватернионом z.

$x \in \mathbf{Q}$, т. е. $f(x \cdot 1) = |x|^s$. Положим $g = f^{1/s}$. Тогда $g \in \mathscr{V}(K)$ и $g(n \cdot 1) = n$ для любого целого $n > 0$. Предложение 2 n° 1 показывает, следовательно, что g является абсолютным значением на K.

Для $x \in \mathbf{Q}$ и $y \in K$ имеет место соотношение $g(xy) = |x| \cdot g(y)$. Следовательно, g представляет собой *норму* на K, согласованную со структурой $\mathbf{Q}$-алгебры (для обычной абсолютной величины на $\mathbf{Q}$). Пополнение $\hat{K}$ тела K является, следовательно, нормированной алгеброй над $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$ (*Topologie générale*, chap. IX, § 3, n° 7). Пусть $\hat{g}$ — норма на $\hat{K}$, служащая непрерывным продолжением нормы g. Поскольку g является абсолютным значением на K, кольцо $\hat{K}$ является телом и $\hat{g}$ — абсолютным значением на $\hat{K}$ (*Topologie générale*, chap. IX, § 3, n° 3, proposition 6). В силу теоремы 1, существует изоморфизм $\hat{j}$ (как $\mathbf{R}$-алгебр) тела $\hat{K}$ на одно из тел $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$, и $g'(x) = |\hat{j}(x)|$ является абсолютным значением на $\hat{K}$. Поскольку $\hat{K}$ имеет конечную размерность над $\mathbf{R}$, а g' и $\hat{g}$ совпадают на подполе $\mathbf{R} \cdot 1$ тела K, справедливо равенство $g' = \hat{g}$ ввиду следующей леммы:

Лемма 2. *Пусть L — некоторое тело и K — такое подтело в L, что L является левым векторным пространством конечной размерности над K. Пусть g — абсолютное значение на L и f — его ограничение на K. Если K полно и недискретно относительно f, то L полно относительно g. Если, кроме того, g' — второе абсолютное значение на L, имеющее то же самое ограничение f на K, то $g' = g$.*

Поскольку топология, определенная абсолютным значением g, отделима и согласована со структурой левого векторного K-пространства на L, наше первое утверждение следует из теоремы 2, гл. I, § 2, n° 3, *Топологических векторных пространств*. Кроме того, топологии на L, определенные абсолютными значениями g и g', тождественны (loc. cit.). Следовательно, существует такое вещественное число $s > 0$, что $g' = g^s$ (*Topologie générale*, chap. IX, § 3, n° 2, proposition 5). Пусть x — такой элемент из K, что $f(x) \neq 1$. Равенство $g'(x) = g(x)$ доказывает, что $s = 1$.

Вернемся к доказательству теоремы 2. Мы видим, что если через j обозначить ограничение $\hat{j}$ на K, то j будет изоморфизмом тела K на некоторое всюду плотное подтело в $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$ и $g(x) = |j(x)|$ для $x \in K$. Отсюда следует, что $f(x) = |j(x)|^s$.

Заметим, наконец, что если f является абсолютным значением на K, то h является абсолютным значением на $\mathbf{Q}$ и $s \leqslant 1$ в силу предложения 4 n° 3. Обратно, если $s \leqslant 1$, то $f = g^s$ является абсолютным значением на K, так как этим свойством

обладает g (*Topologie générale*, chap. IX, § 3, n° 2). Этим доказывается последнее утверждение теоремы.

Замечания. 2) Если K есть тело, представляющее собой нормированную алгебру над R, то эта норма не обязана быть абсолютным значением на K; например, $\xi + i\eta \to |\xi| + |\eta|$ является нормой на $\mathbf{C}$, согласованной со структурой алгебры над $\mathbf{R}$.

3) Для доказательства случая B) теоремы 1, в котором не используются общие результаты *Алгебры*, гл. VIII, см. упражнение 2.

Упражнения

¶ 1) Любой элемент z из p-адического поля $\mathbf{Q}_p$ (p — простое число) единственным образом записывается в виде $p^h \sum_{k=0}^{\infty} c_k p^k$, где $h \in \mathbf{Z}$, $c_0 \neq 0$ и $0 \leqslant c_k < p$ для любого $k \geqslant 0$ („p-адическое разложение" числа z).

а) Показать, что, для того чтобы $z \in \mathbf{Q}$, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие два целых числа $m \geqslant 0$, $n \geqslant 1$, что $c_{k+n} = c_k$ при любом $k \geqslant m$. (Заметить, что если $z = a/b \in \mathbf{Q}$, где b не делится на p, то

$$a - b \sum_{k=0}^{n} c_k p^k = a_{n+1} p^{n+1},$$

где a_{n+1} является целым числом и последовательность чисел $|a_k|$ (обычная абсолютная величина) ограничена.)

б) Предположим, что возрастающая последовательность (k_n) целых чисел k, для которых $c_k \neq 0$, такова, что $\limsup_{n\to\infty} (k_{n+1}/k_n) = +\infty$. Показать, что элемент z является трансцендентным над $\mathbf{Q}$. (Для произвольного элемента $x \in \mathbf{Q}$ обозначить через $|x|$ и $|x|_p$ обычное абсолютное значение и p-адическое абсолютное значение соответственно. Предположим, что $P \in \mathbf{Z}[X]$ — такой неприводимый многочлен, что $P(z) = 0$; если $z_n = p^h \sum_{k=0}^{k_n} c_k p^k$, то показать, что $|P(z_n)/(z - z_n)|_p$ стремится к некоторому пределу, отличному от 0, когда n стремится к $+\infty$, используя для этого формулу Тейлора; получить отсюда противоречие, рассматривая обычные абсолютные значения $|P(z_n)|$.)

2) Пусть D — некоммутативное тело характеристики $\neq 2$ и Z — его центр. Предположим, что любое подполе K в D, содержащее Z, имеет степень $\leqslant 2$ над Z.

а) Показать, не используя лемму 1, что $[D:Z] = 4$. (Пусть $a \in D - Z$ есть такой элемент, что $a^2 \in Z$, и пусть $\sigma(x) = axa^{-1}$ для любого $x \in D$; заметить, что D распадается в прямую сумму двух таких векторных подпространств над Z, обозначаемых через D_+ и D_-, что $\sigma(x) = x$ в D_+ и $\sigma(x) = -x$ в D_-; заметить также, что D_+ является подтелом в D, а D_- — векторным пространством размерности 1 над D_+; наконец, показать, что D_+ не может отличаться от $Z(a)$.)

б) Показать, что D является некоторой алгеброй кватернионов над Z. (Построить базис D над Z с помощью упражнения а).)

§ 7. Теорема об аппроксимации

1. Пересечение конечного числа колец нормирования

Предложение 1. *Пусть K — поле, $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — некоторое конечное семейство колец нормирования для K и $B=\bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Положим $\mathfrak{p}_i = B\cap \mathfrak{m}(A_i)$. Тогда $A_i = B_{\mathfrak{p}_i}$ для любого i и полем частных кольца B является K.*

Ясно, что $B_{\mathfrak{p}_i}\subset A_i$. Для доказательства обратного включения нам потребуется следующая лемма:

Лемма 1. *Пусть $v_i\ (1\leqslant i\leqslant n)$ — нормирования поля K и $x\in K^*$. Тогда существует многочлен $f(X)$ вида*

$$f(X)=1+n_1X+\ \dots\ +n_{k-1}X^{k-1}+X^k \qquad (1)$$
$$(k\geqslant 2,\ n_j\in \mathbf{Z} \text{ для } 1\leqslant j\leqslant k-1),$$

такой, что $f(x)\neq 0$ и элемент $z=f(x)^{-1}$ обладает следующими свойствами при $1\leqslant i\leqslant n$:

$$v_i(z)=0, \quad \text{если} \quad v_i(x)\geqslant 0,$$
$$v_i(z)+v_i(x)>0, \quad \text{если} \quad v_i(x)<0.$$

Допустим временно, что эта лемма верна, и покажем, как из нее следует включение $A_1\subset B_{\mathfrak{p}_1}$. Пусть x — произвольный ненулевой элемент из A_1. Применим лемму к x и нормированиям v_i, ассоциированным с кольцами A_i. Тогда $v_i(z)\geqslant 0$ и $v_i(zx)\geqslant 0$ для любого i; следовательно, $z\in B$ и $zx\in B$. Поскольку $v_1(x)\geqslant 0$, то $v_1(z)=0$; значит, $z\notin \mathfrak{p}_1$. Поэтому $x=xz/z\in B_{\mathfrak{p}_1}$. Поле частных кольца B содержит, таким образом, A_1, а потому и K.

Приступим к доказательству леммы. Пусть I — множество таких индексов i, что $v_i(x)\geqslant 0$. Для $i\in I$ пусть A_i — кольцо нормирования v_i, и обозначим через $\bar{x}_i$ канонический образ элемента x в поле $\kappa(A_i)$. Для любого $i\in I$ построим многочлен f_i следующим образом: если существует многочлен $g(X)$ вида (1), для которого $g(\bar{x}_i)=0$ в $\kappa(A_i)$, то мы возьмем в качестве f_i этот многочлен, в противном случае положим $f_i=1$. Пусть $f(X)=1+X^2\prod_{i\in I} f_i(X)$. Очевидно, что это многочлен вида (1). Если $i\in I$, то $f(x)\in A_i$ и $f(\bar{x}_i)\neq 0$ по построению. Следовательно, $f(x)\notin \mathfrak{m}(A_i)$, $v_i(f(x))=0$ и $v(z)=0$. Если $i\notin I$, то $v_i(x)<0$, откуда $v_i(f(x))=kv_i(x)$ (§ 3, n° 1, предложение 1) и $v_i(x)+v_i(z)=(1-k)v_i(x)>0$ (так как $k\geqslant 2$). Отсюда следует лемма.

Предложение 2. *Сохраняя предположения предложения* 1, *допустим, кроме того, что* $A_i \not\subset A_j$ *для* $i \neq j$. *Тогда* $\mathfrak{p}_i$ *являются попарно различными максимальными идеалами в* B *и всякий максимальный идеал в* B *равен одному из идеалов* $\mathfrak{p}_i$.

Если бы $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}_j$ при $i \neq j$, то получилось бы, что $A_i = B_{\mathfrak{p}_i} \supset \supset B_{\mathfrak{p}_j} = A_j$. Теперь достаточно применить следствие предложения 17, гл. II, § 3, n° 5.

Следствие 1. *Предположим, что* $A_i \not\subset A_j$ *при* $i \neq j$. *Тогда для любого семейства элементов* $a_i \in A_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *существует такой элемент* $x \in B$, *что* $x \equiv a_i \pmod{\mathfrak{m}(A_i)}$ *при* $1 \leqslant i \leqslant n$.

Так как $\mathfrak{p}_i$ — максимальные идеалы в B, то $A_i/\mathfrak{m}(A_i) = B_{\mathfrak{p}_i}/\mathfrak{p}_i B_{\mathfrak{p}_i} = B/\mathfrak{p}_i$, и, следовательно, можно предположить, что $a_i \in B$ для любого i. Следствие вытекает теперь из того факта, что каноническое отображение кольца B в $\prod_{i=1}^{n} (B/\mathfrak{p}_i)$ сюръективно (гл. II, § 1, n° 2, предложение 5).

Следствие 2. *Предположим, что* $A_i \not\subset A_j$ *при* $i \neq j$. *Тогда существуют такие элементы* x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *поля* K, *что* $v_i(x_i) = 0$ *и* $v_j(x_i) > 0$ *для* $i \neq j$.

Для каждого индекса i надо применить следствие 1 к такому семейству (a_j), что $a_i = 1$ и $a_j = 0$ для $j \neq i$.

Следствие 3. *Всякое кольцо нормирования для поля* K, *содержащее кольцо* B, *содержит и одно из* A_i.

Можно ограничиться случаем, когда $A_i \not\subset A_j$ при $i \neq j$. Пусть V — произвольное кольцо нормирования для K, содержащее B. Положим

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m}(V) \cap B.$$

Существует максимальный идеал $\mathfrak{p}_i$ кольца B, содержащий $\mathfrak{p}$; отсюда следует, что

$$A_i = B_{\mathfrak{p}_i} \subset B_{\mathfrak{p}} \subset V.$$

2. Независимые нормирования

Определение 1. *Пусть* A *и* A' — *два кольца нормирования для одного и того же поля* K. *Говорят, что кольца* A *и* A' *независимы, если поле* K *порождается кольцами* A *и* A'. *Говорят, что два нормирования независимы, если независимы их кольца; в противном случае нормирования называются зависимыми.*

Несобственное нормирование поля K и любое другое нормирование для K являются независимыми. Для того чтобы два

нормирования высоты 1 поля K были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы они были неэквивалентными (§ 4, п° 5, предложение 6в)).

Теорема 1 (теорема об аппроксимации для нормирований). *Пусть v_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — попарно независимые нормирования поля K и Γ_i — группа порядков для v_i. Пусть $a_i \in K$ и $\alpha_i \in \Gamma_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Тогда существует такой элемент $x \in K$, что $v_i(x - a_i) \geqslant \alpha_i$ для любого i.*

Если нормирование v_i несобственное, то $\alpha_i = 0$ и соотношение $v_i(x - a_i) \geqslant \alpha_i$ выполняется для любого $x \in K$. Следовательно, можно предположить, что нормирования v_i *не являются несобственными.*

Пусть A_i — кольцо нормирования v_i, $B = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ и $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}(A_i) \cap B$. В силу предложения 1 п° 1, элементы a_i могут быть записаны в виде $a_i = b_i/s$ $(b_i \in B,\ s \in B - \{0\})$. Если положить $x = y/s$ и $\alpha_i' = \alpha_i + v_i(s)$, то требуемый результат перепишется в виде $v_i(y - b_i) \geqslant \alpha_i'$. Это показывает, что можно считать выполненным включение $a_i \in B$ при любом i; можно также предполагать, что $\alpha_i > 0$ для любого i. Пусть $\mathfrak{v}$ — множество тех $z \in K$, для которых $v_i(z) \geqslant \alpha_i$. Положим $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{v}_i \cap B$. Для $x \in B$ условие $v_i(x - a_i) \geqslant \alpha_i$ эквивалентно сравнению $x \equiv a_i\ (\mathfrak{q}_i)$. Следовательно, достаточно показать, что канонический гомоморфизм $B \to \prod_{i=1}^{n} (B/\mathfrak{q}_i)$ сюръективен, т. е. что справедливо равенство $\mathfrak{q}_i + \mathfrak{q}_j = B$ при $i \neq j$ (гл. II, § 1, п° 2, предложение 5). Поскольку максимальные идеалы кольца B — это идеалы $\mathfrak{p}_i$ (предложение 2), для доказательства последнего равенства достаточно показать, что $\mathfrak{q}_i \not\subset \mathfrak{p}_j$ при $i \neq j$.

Предположим, что существуют такие индексы i, j, что $\mathfrak{q}_i \subset \mathfrak{p}_j$ и $i \neq j$. Мы вскоре увидим, что корень идеала $\mathfrak{q}_i$ есть некоторый *простой* идеал $\mathfrak{p}$ в B. Тогда $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_j$, а также $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_i$, ибо $\alpha_i > 0$, и поэтому $\mathfrak{q}_i \subset \mathfrak{p}_i$. Значит, $A_j = B_{\mathfrak{p}_j} \subset B_{\mathfrak{p}}$ (п° 1, предложение 1) и, аналогично, $A_i \subset B_{\mathfrak{p}}$. Но так как $\mathfrak{v}_i \neq (0)$ и $\mathfrak{v}_i = B_{\mathfrak{p}_i}\mathfrak{q}_i$ (гл. II, § 2, п° 4, предложение 10), то $\mathfrak{q}_i \neq (0)$, откуда $\mathfrak{p} \neq (0)$ и $B_{\mathfrak{p}} \neq K$. Это противоречит предположению о том, что кольца A_i, A_j независимы.

Остается доказать, что идеал $\mathfrak{p}$ прост. Это вытекает из следующей леммы:

Лемма 2. *Пусть A — кольцо нормирования и $\mathfrak{b}$ — идеал в A, отличный от A. Тогда корень $\mathfrak{r}$ идеала $\mathfrak{b}$ является простым идеалом.*

Предположим, что $xy \in \mathfrak{r}$. Тогда существует такое $n \geqslant 1$, что $(xy)^n \in \mathfrak{b}$. Обозначим через v нормирование, ассоциированное с кольцом A. Если, например, $v(x) \geqslant v(y)$, то $v(x^{2n}) \geqslant v(x^n y^n)$, откуда $x^{2n} \in \mathfrak{b}$ и $x \in \mathfrak{r}$.

Следствие 1. *Для любого семейства элементов* $\gamma_i \in \Gamma_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *существует такой элемент* $x \in K$, *что* $v_i(x) = \gamma_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Можно предполагать, что $A_i \neq K$ для любого i. Тогда существует для всякого i такой элемент $a_i \in K$, что $v_i(a_i) = \gamma_i$, и такой элемент $\alpha_i \in \Gamma_i$, что $\gamma_i < \alpha_i$. Применим теорему 1 к этим элементам a_i: существует такой $x \in K$, что $v_i(x - a_i) > v_i(a_i)$, откуда, в силу равенства $x = a_i + (x - a_i)$, получаем $v_i(x) = v_i(a_i) = \gamma_i$ (§ 3, n° 1, предложение 1).

Следствие 2. *Пусть* $\mathcal{T}_i$ — *топология на* K, *определенная нормированием* v_i; *наделим* K^n *топологией, совпадающей с произведением топологий* $\mathcal{T}_i$. *Если* v_i *не являются несобственными нормированиями, то диагональ пространства* K^n *плотна в* K^n.

Предложение 3. *Пусть* v *и* v' — *два нормирования поля* K, *не являющиеся несобственными. Для того чтобы* v *и* v' *определяли одну и ту же топологию на* K, *необходимо и достаточно, чтобы эти нормирования были зависимыми.*

Предположим, что топологии $\mathcal{T}_v$ и $\mathcal{T}_{v'}$, определенные нормированиями v и v', совпадают. Так как топология $\mathcal{T}_v$ отделима, диагональ в K^2 замкнута, а потому v и v' зависимы (следствие 2 теоремы 1).

Обратно, предположим, что v и v' зависимы. Тогда их кольца A и A' содержатся в одном и том же кольце A'', отличном от K, и A'' является кольцом некоторого нормирования v'' (§ 4, n° 1, предложение 1). Достаточно доказать, что топология $\mathcal{T}_{v''}$ совпадает с топологией $\mathcal{T}_v$. Пусть Γ и Γ'' — группы порядков нормирований v и v''. Существует такой возрастающий гомоморфизм λ группы Γ на Γ'', что $v'' = \lambda \circ v$ (§ 4, n° 3). Если $\alpha'' \in \Gamma''$, то пусть $\alpha \in \lambda^{-1}(\alpha'')$. Из условия $v(x) \geqslant \alpha$ следует, что $v''(x) \geqslant \alpha''$. Пусть $\beta \in \Gamma$ и $\beta'' = \lambda(\beta)$. Условие $v(x) \leqslant \beta$ влечет за собой $v''(x) \leqslant \beta''$; следовательно, из $v''(x) > \beta''$ вытекает, что $v(x) > \beta$. Поскольку v и v'' не являются несобственными, рассматриваемые неравенства определяют фундаментальную систему окрестностей нуля для $\mathcal{T}_v$ и $\mathcal{T}_{v''}$. Значит, $\mathcal{T}_v = \mathcal{T}_{v''}$; доказательство закончено.

Замечания. 1) Предложение 3 показывает, что отношение „v и v' являются зависимыми“ представляет собой *отношение эквивалентности.*

2) В силу соотношений между нормированиями высоты 1 и ультраметрическими абсолютными значениями (§ 6, n° 2), предложение 3 для случая нормирований высоты 1 следует также из описания эквивалентных абсолютных значений (*Topologie générale*, chap. IX, 2e éd., § 3, n° 2, proposition 5).

Предложение 4. *Пусть* $v_1, \ldots, v_n$ $(n \geqslant 2)$ *— система попарно зависимых нормирований поля* K. *Тогда кольца* $A_1, \ldots, A_n$ *нормирований* $v_1, \ldots, v_n$ *порождают подкольцо в* K, *отличное от* K.

Для $n = 2$ предложение 4 следует из определения 1. Предположим, что требуемый результат установлен для $n-1$ нормирований. Тогда существует подкольцо A поля K, отличное от K и содержащее кольца $A_1, \ldots, A_{n-1}$. Существует также подкольцо $B \neq K$, содержащее A_{n-1} и A_n. Поскольку A и B содержат A_{n-1}, они сравнимы в смысле отношения включения (§ 4, n° 1, следствие предложения 1). Наибольшее из этих двух колец содержит, следовательно, все A_i.

3. Случай абсолютных значений

Теорема 2 (теорема об аппроксимации для абсолютных значений). *Пусть* f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *— система абсолютных значений, не являющихся несобственными и попарно неэквивалентных на одном и том же поле* K. *Пусть* a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *— элементы из* K *и* ε *— вещественное число* > 0. *Тогда существует такой элемент* $x \in K$, *что* $f_i(x - a_i) \leqslant \varepsilon$ *для любого* i.

Обозначим через K_i поле K, наделенное топологией, определяемой абсолютным значением f_i. Результат, который мы должны доказать, эквивалентен следующему: в произведении $P = K_1 \times \ldots \times K_n$ замыкание $\overline{D}$ диагонали D равно P. Это очевидно для $n = 1$. Мы будем считать, что этот факт уже установлен для случая k абсолютных значений, где $k < n$.

Сначала покажем, что для $2 \leqslant h \leqslant n$ существует такой элемент x_h из K, что $f_1(x_h) < 1$, $f_2(x_h) > 1$ и $f_i(x_h) \neq 1$ для $3 \leqslant i \leqslant h$. Будем рассуждать индукцией по h. Если $h = 2$, то это следует из того, что f_1 и f_2 не эквивалентны. Следовательно, предположим, что существование элемента x_{h-1} уже доказано, и найдем требуемое x_h. Если $f_h(x_{h-1}) \neq 1$, то можно взять $x_h = x_{h-1}$; если же $f_h(x_{h-1}) = 1$, то выберем $z \in K^*$, такой, что $f_h(z) \neq 1$, и элемент $x_h = z(x_{h-1})^s$ будет удовлетворять предъявленным требованиям при достаточно большом s. Таким образом, доказано существование элемента x_h.

Когда целое число q стремится к бесконечности, $f_1(x_n^q)$ стремится к нулю, а $f_2(x_n^q) - к + \infty$; что же касается $f_i(x_n^q)$ при

$i \geqslant 3$, то эти величины стремятся или к 0, или к $+\infty$. Полагая $y_q = x_n^q (1 + x_n^q)^{-1}$, мы получаем, что $1 - y_q = (1 + x_n^q)^{-1}$; значит, последовательность (y_q) стремится к 0 в K_1 и к 1 в K_2; в пространствах же K_i при $i \geqslant 3$ эта величина стремится к 0 или к 1. Изменяя нумерацию пространств K_i, можно предположить, что существует такое целое число r $(1 \leqslant r < n)$, что $\bar{D}$ содержит точку $(e_1, \ldots, e_n)$, где $e_i = 1$ при $1 \leqslant i \leqslant r$ и $e_i = 0$ при $r + 1 \leqslant i \leqslant n$. Однако $\bar{D}$ является векторным K-подпространством в P. Следовательно, $\bar{D}$ содержит диагонали D' и D'' пространства $P' = K_1 \times \ldots \times K_r$ и пространства $P'' = K_{r+1} \times \ldots \times K_n$. В силу предположения индукции, $P' = \bar{D}'$ и $P'' = \bar{D}''$. Поэтому $\bar{D} = P$.

Упражнения

1) Пусть $(\varphi_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство точек некоторого поля K, принимающих значения в конечном числе полей; предположим, кроме того, что для любого $x \in K$ множество элементов $\varphi_\iota(x)$ конечно. Показать, что существует такой многочлен $f(X)$ вида (1) из n° 1, что $f(x) \neq 0$ и что элемент $z = f(x)^{-1}$ обладает следующими свойствами: (i) если $\varphi_\iota(x) = \infty$, то $\varphi_\iota(xz) = 0$ и $\varphi_\iota(z) = 0$; (ii) из $\varphi_\iota(x) \neq \infty$ следует, что $\varphi_\iota(xz) \neq \infty$ и $\varphi_\iota(z) \neq 0$. (Доказательство то же, что и для леммы 1.)

2) Сохраним предположения и обозначения предложения 1 n° 1. Пусть $\mathfrak{q}$ — простой идеал в B; показать, что $B_\mathfrak{q}$ является кольцом нормирования.

3) Пусть A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — кольца попарно независимых нормирований поля K, и пусть $A = \bigcap_i A_i$. Для любого i пусть $\mathfrak{a}_i$ обозначает идеал $\neq 0$ в A_i, положим $\mathfrak{a} = \bigcap_i \mathfrak{a}_i$; показать, что для любого i имеет место равенство $\mathfrak{a}_i = A_i \mathfrak{a}$. Обратно, если $\mathfrak{b}$ — ненулевой идеал в A и если $\mathfrak{b}_i = A_i \mathfrak{b}$, то $\mathfrak{b} = \bigcap_i \mathfrak{b}_i$ (воспользоваться теоремой 1 из n° 2).

§ 8. Продолжения нормирования на алгебраическое расширение

1. Индекс ветвления. Степень вычетов

Пусть K — поле, L — расширение поля K и A' — некоторое кольцо нормирования для L. Как мы видели в § 1, n° 4, кольцо $A = K \cap A'$ является кольцом нормирования для K и $\mathfrak{m}(A) = \mathfrak{m}(A') \cap K$. Если v' — нормирование, ассоциированное с A', то ограничение v нормирования v' на K является нормированием, ассоциированным с A; группа порядков Γ_v нормирования v представляет собой подгруппу группы порядков $\Gamma_{v'}$ нормирования v'.

Определение 1. *Индексом ветвления нормирования v' относительно нормирования v* (или поля K) *называется индекс* $[\Gamma_{v'}:\Gamma_v]$, *который обозначается через* $e(v'/v)$ (а также через $e(A'/A)$ или $e(L/K)$).

Этот индекс есть или натуральное число, или $+\infty$. Когда v_0' является нормированием, *эквивалентным* v', то $e(v'/v)$ называют также индексом ветвления нормирования v_0' *относительно* v. Если $e(v'/v)=1$, то говорят, что v' *не разветвлено* относительно v.

С другой стороны, поле вычетов $\varkappa(A)$ нормирования v отождествляется с некоторым подполем в поле вычетов $\varkappa(A')$ нормирования v'.

Определение 2. *Степенью вычетов нормирования v' относительно нормирования v* (относительно поля K) *называется степень* $[\varkappa(A'):\varkappa(A)]$, *которая обозначается через* $f(v'/v)$ (а также через $f(A'/A)$ *или* $f(L/K)$).

Эта степень есть или натуральное число, или $+\infty$.

Лемма 1. *Пусть K, K', K'' — такие три поля, что $K\subset K'\subset K''$, v'' — нормирование поля K'', а v и v' — ограничения на K и K' нормирования v''. Тогда*

$$e(v''/v)=e(v''/v')\,e(v'/v),\quad f(v''/v)=f(v''/v')\,f(v'/v). \tag{1}$$

Это очевидно.

Лемма 2. *Пусть K — поле, L — расширение конечной степени n над K, v' — некоторое нормирование на L и v — его ограничение на K. Тогда имеет место неравенство*

$$e(v'/v)\,f(v'/v)\leqslant n; \tag{2}$$

в частности, числа $e(v'/v)$ и $f(v'/v)$ конечны.

Действительно, возьмем любые натуральные числа r и s, не превосходящие $e(v'/v)$ и $f(v'/v)$ соответственно. Достаточно доказать, что $rs\leqslant n$. В силу определения r, существуют элементы x_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ из L, такие, что $v'(x_i)\not\equiv v'(x_j)\,(\Gamma_v)$ при $i\neq j$. В силу определения числа s, существуют элементы y_k $(1\leqslant k\leqslant s)$ из кольца A' нормирования v', канонические образы $\bar{y}_k$ которых в поле $\varkappa(A')$ линейно независимы над $\varkappa(A)$. Очевидно, что $v'(y_k)=0$ для любого k. Мы сейчас докажем, что rs элементов x_iy_k линейно независимы над K; тем самым будет установлено неравенство $rs\leqslant n$.

Предположим, таким образом, что существует нетривиальное линейное соотношение вида

$$\sum_{i,\,k} a_{ik}x_iy_k=0 \qquad (a_{ik}\in K). \tag{3}$$

Выберем индексы j, m так, чтобы

$$v'(a_{jm}x_jy_m) \leqslant v'(a_{ik}x_iy_k)$$

для любой пары (i, k). Тогда $a_{jm} \neq 0$. Если $i \neq j$, то равенство $v'(a_{ik}x_iy_k) = v'(a_{jm}x_jy_m)$ не может иметь места, так как из него следовало бы, что

$$v'(x_i) - v'(x_j) = v'(a_{jm}) - v(a_{ik}) \in \Gamma_v,$$

в противоречие с выбором элементов x_i. Умножая (3) на $(a_{jm}x_j)^{-1}$, мы получаем соотношение вида

$$\sum_k b_k y_k + z = 0, \quad \text{где} \quad b_k = \frac{a_{jk}x_j}{a_{jm}x_j} \in A', \qquad z \in A'$$

и $v'(b_k) \geqslant 0$, $v'(z) > 0$. Отсюда следует, что в $\varkappa(A')$ имеет место соотношение вида $\sum_k \bar{b}_k \bar{y}_k = 0$. Поскольку $b_m = 1$, это противоречит предположению, сделанному относительно y_k.

Предложение 1. *Пусть K — поле, L — некоторое алгебраическое расширение поля K, v' — нормирование поля L, v — его ограничение на K и A, A' — кольца нормирований v и v'. Тогда $\Gamma_{v'}/\Gamma_v$ является группой кручения, а $\varkappa(A')$ — алгебраическим расширением поля $\varkappa(A)$.*

Пусть, в самом деле, (L_α) — семейство всех подрасширений конечной степени расширения L; положим $\Gamma_\alpha = v'(L_\alpha^*)$. Группа $\Gamma_{v'}$ представляет собой объединение возрастающего фильтрующегося семейства, образованного группами Γ_α. Поскольку группы Γ_α/Γ_v конечны (лемма 2), $\Gamma_{v'}/\Gamma_v$ является группой кручения. Аналогичными рассуждениями доказывается, что $\varkappa(A')$ является алгебраическим расширением поля вычетов $\varkappa(A)$.

Следствие 1. *Высота нормирования v' равна высоте нормирования v.*

В самом деле, это вытекает из предложения 1 и из следующей леммы:

Лемма 3. *Пусть G' — совершенно упорядоченная группа, G — подгруппа в G' и $\mathfrak{S}'$ (соответственно $\mathfrak{S}$) — множество изолированных подгрупп в G' (соответственно в G). Тогда отображение $H' \to H' \cap G$ переводит множество $\mathfrak{S}'$ на множество $\mathfrak{S}$. Это отображение биективно, если G'/G является группой кручения.*

Очевидно, что из включения $H' \in \mathfrak{S}'$ следует, что $H' \cap G \in \mathfrak{S}$. Пусть теперь $H \in \mathfrak{S}$; обозначим через H' множество таких $x' \in G'$, для которых существует элемент $h \in H$, удовлетворяющий условию $-h \leqslant x' \leqslant h$. Немедленно проверяется, что H'

является изолированной подгруппой в G'. Поскольку H — изолированная подгруппа, справедливо равенство $H' \cap G = H$. Следовательно, отображение $H' \to H' \cap G$ сюръективно. Предположим теперь, что G'/G является группой кручения. Пусть H'_1 и H'_2 — такие две изолированные подгруппы в G', что $H'_1 \cap G = H'_2 \cap G$. Поскольку одна из этих подгрупп содержится в другой, пусть $H'_1 \supset H'_2$ (ср. § 4, n° 4). Тогда H'_1/H'_2 — совершенно упорядоченная группа, изоморфная факторгруппе $H'_1/(H'_1 \cap G)$, которая в свою очередь отождествляется с подгруппой в G'/G. Следовательно, H'_1/H'_2 есть группа кручения; значит, она равна 0.

Следствие 2. *Для того чтобы нормирование v' было несобственным* (соответственно *высоты 1*), *необходимо и достаточно, чтобы несобственным* (соответственно *высоты 1*) *было нормирование v.*

Следствие 3. *Предположим, что L является расширением конечной степени поля K. Для того чтобы нормирование v' было дискретным, необходимо и достаточно, чтобы дискретным было нормирование v.*

Если нормирование v' дискретно, то группа Γ_v изоморфна ненулевой подгруппе группы целых чисел $\mathbf{Z}$ (следствие 2), а потому самой группе $\mathbf{Z}$. Обратно, если нормирование v дискретно, группа Γ_v изоморфна $\mathbf{Z}$ и факторгруппа $\Gamma_{v'}/\Gamma_v$ конечна (лемма 2). Следовательно, $\Gamma_{v'}$ является коммутативной группой конечного типа ранга 1 и без кручения. Таким образом, она изоморфна группе $\mathbf{Z}$.

2. Продолжение нормирования и пополнение

Определение 3. *Пусть K — поле, v — нормирование поля K и L — расширение поля K. Полной системой продолжений v на L называется семейство $(v'_\iota)_{\iota \in I}$ нормирований поля L, продолжающих нормирование v, такое, что всякое нормирование поля L, продолжающее v, эквивалентно одному и только одному из v'_ι.*

Предложение 2. *Пусть K — поле, v — нормирование на K, $\hat{K}$ — пополнение поля K относительно v, $\hat{v}$ — непрерывное продолжение v на $\hat{K}$ и L — некоторое расширение конечной степени n поля K.*

а) *Пусть v' — произвольное нормирование поля L, продолжающее v; обозначим через $\hat{L}_{v'}$ пополнение поля L относительно v' и через $\hat{v}'$ — непрерывное продолжение v' на $\hat{L}_{v'}$; при отождествлении $\hat{K}$ с замыканием поля K в $\hat{L}_{v'}$ получаются сле-*

дующие соотношения:

$$e(\hat{v}'/\hat{v}) = e(v'/v), \quad f(\hat{v}'/\hat{v}) = f(v'/v), \tag{4}$$

$$[\hat{L}_{v'} : \hat{K}] \leqslant n, \tag{5}$$

$$e(v'/v)\, f(v'/v) \leqslant [\hat{L}_{v'} : \hat{K}]. \tag{6}$$

б) *Любое семейство попарно независимых нормирований поля L, продолжающих нормирование v, конечно. Обозначим через $v'_1, \ldots, v'_s$ такие попарно независимые нормирования поля L, продолжающие v, что любое нормирование поля L, продолжающее v, зависимо от одного из v'_i. Пусть L_i — поле L, наделенное топологией, которая определяется нормированием v'_i, а $\hat{L}_i$ — пополнение этого поля L_i. Положим $n_i = [\hat{L}_i : \hat{K}]$. Тогда каноническое отображение* $\varphi\colon \hat{K} \otimes_K L \to \prod_{i=1}^{s} \hat{L}_i$ *(продолжающее по непрерывности диагональное отображение* $L \to \prod_{i=1}^{s} L_i$*) сюръективно, его ядром служит радикал кольца $\hat{K} \otimes_K L$ и имеет место соотношение*

$$\sum_{i=1}^{s} n_i \leqslant n. \tag{7}$$

Докажем сначала а). Можно предполагать, что v не является несобственным. Поскольку v и $\hat{v}$ (соответственно v' и $\hat{v}'$) имеют одну и ту же группу порядков и одинаковые поля вычетов (§ 5, п° 3, предложение 5б) и е)), равенства (4) справедливы. Из них выводится соотношение (6) с помощью леммы 2. Наконец, векторное $\hat{K}$-подпространство в $\hat{L}_{v'}$, порожденное полем L, замкнуто (§ 5, п° 2, следствие предложения 4) и всюду плотно. Следовательно, оно равно $\hat{L}_{v'}$; это доказывает (5).

Перейдем к б). Опять-таки можно предполагать, что нормирование v не является несобственным. Пусть $(v'_1, \ldots, v'_r)$ — произвольное конечное семейство нормирований поля L, попарно независимых и продолжающих v. Образ поля L в кольце $\prod_{i=1}^{r} L_i$ относительно диагонального отображения всюду плотен (§ 7, п° 2, теорема 1), а кольцо $\prod_{i=1}^{r} L_i$ плотно в $\prod_{i=1}^{r} \hat{L}_i$. Следовательно, канонический образ кольца $\hat{K} \otimes_K L$ в $\prod_{i=1}^{r} \hat{L}_i$ всюду плотен. С другой стороны, этот образ является векторным

$\hat{K}$-подпространством в $\prod_{i=1}^{r} \hat{L}_i$; поскольку $\prod_{i=1}^{r} \hat{L}_i$ имеет конечную размерность над $\hat{K}$ в силу (5), образ кольца $\hat{K} \otimes_K L$ замкнут (§ 5, n° 2, следствие предложения 4), а потому и равен $\prod_{i=1}^{r} \hat{L}_i$. Поскольку размерность пространства $\hat{K} \otimes_K L$ над $\hat{K}$ равна n, имеет место неравенство $\sum_{i=1}^{r} n_i \leqslant n$. Это, в частности, доказывает, что целое число r ограничено числом n и доказывает первое утверждение из б).

Возьмем теперь такую систему $(v'_1, \ldots, v'_s)$, как указано в формулировке. Сюръективность отображения φ: $\hat{K} \otimes_K L \to \prod_{i=1}^{s} \hat{L}_i$ и соотношение (7) уже доказаны. Остается доказать, что ядро $\mathfrak{n}$ отображения φ является радикалом $\mathfrak{r}$ кольца $\hat{K} \otimes_K L$. Поскольку кольцо $\sum_{i=1}^{s} \hat{L}_i$ полупросто, то $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{n}$.

С другой стороны, для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ из $\hat{K} \otimes_K L$ факторкольцо $L(\mathfrak{m}) = (\hat{K} \otimes_K L)/\mathfrak{m}$ является расширением, представляющим собой композит полей $\hat{K}$ и L над K (*Алгебра*, гл. VIII, § 8, предложение 1). Существует нормирование w поля $L(\mathfrak{m})$, продолжающее $\hat{v}$ (§ 3, n° 3, предложение 5); ограничение v' нормирования w на L продолжает v. Поскольку степень $[L(\mathfrak{m}) : \hat{K}]$ конечна, поле $L(\mathfrak{m})$ полно относительно w (§ 5, n° 2, предложение 4). Но замыкание поля L в $L(\mathfrak{m})$ является полем, содержащим $\hat{K}$ и L; следовательно, оно равно $L(\mathfrak{m})$. Поэтому $L(\mathfrak{m})$ отождествляется с пополнением $\hat{L}_{v'}$ и $\mathfrak{m}$ является ядром канонического отображения из $\hat{K} \otimes_K L$ на $\hat{L}_{v'}$. Однако по условию существует такой индекс i, что v' и v'_i зависимы, откуда $\hat{L}_{v'} = \hat{L}_i$ (§ 7, n° 2, предложение 3). Таким образом, $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}$, что и доказывает включение $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{r}$. Доказательство закончено.

Следствие 1. *Если поле K полно относительно нормирования v, не являющегося несобственным, то любые два нормирования поля L, продолжающие v, зависимы.*

Действительно, ведь $\hat{K} \otimes_K L = L$.

Следствие 2. *Если поле $\hat{K}$ или поле L сепарабельно над K, то каноническое отображение* φ: $\hat{K} \otimes_K L \to \prod_{i=1}^{s} \hat{L}_i$ *является изоморфизмом.*

Действительно, в этом случае радикал кольца $\widehat{K} \otimes_K L$ равен нулю (*Алгебра*, гл. VIII, § 7, n° 3, теорема 1).

Замечание. Предложение 2б) показывает, что любой *композит* полей $\widehat{K}$ и L над K (*Алгебра*, гл. VIII, § 8) изоморфен одному из пополнений $\widehat{L}_i$ и что последние являются попарно неизоморфными композитами [1]).

3. Соотношение $\sum_i e_i f_i \leqslant n$

Пусть K — поле, v — нормирование на K и L — расширение конечной степени n поля K. Пусть $(v'_1, \ldots, v'_r)$ — попарно *неэквивалентные* нормирования поля L, являющиеся продолжениями нормирования v; если эти нормирования *независимы* (что всегда имеет место, если v является нормированием высоты 1), то $\sum_{i=1}^{r} e(v'_i/v) f(v'_i/v) \leqslant n$ в силу предложения 1 (формулы (6) и (7)). Мы увидим сейчас, что этот результат верен и в общем случае. Точнее, имеет место

Теорема 1. *Пусть K — поле, v — нормирование на K и L — расширение конечной степени n поля K. Тогда:*

а) *Любая полная система $(v'_i)_{i \in I}$ продолжений нормирования v на L конечна.*

б) *Имеет место неравенство $\sum_{i \in I} e(v'_i/v) f(v'_i/v) \leqslant n$ и тем более* $\mathrm{Card}\,(I) \leqslant n$.

в) *Кольца нормирований v'_i попарно несравнимы в смысле отношения включения.*

Теорема тривиальна, если нормирование v несобственно, так что будем считать, что v несобственным не является. Пусть $(v'_1, \ldots, v'_s)$ — произвольное конечное семейство попарно неэквивалентных нормирований поля L, продолжающих v. Мы сначала докажем, что $\sum_{i=1}^{s} e(v'_i/v) f(v'_i/v) \leqslant n$. Этим будут установлены пункты а) и б).

Будем рассуждать индукцией по s и, следовательно, предположим, что требуемое неравенство установлено для случая $0, 1, \ldots, s-1$ нормирований. Мы будем различать два случая.

---

[1]) Имеется в виду, что не существует изоморфизма между $\widehat{L}_i$ и $\widehat{L}_j$ при $i \neq j$, продолжающего канонические вложения L в $\widehat{L}_i$ и $\widehat{L}_j$ соответственно; как расширения поля $\widehat{K}$ они, однако, могут быть изоморфны (например, когда L — расширенне Галуа поля K). — *Прим. ред.*

1) Предположим, что существуют по крайней мере два независимых нормирования v'_i. Тогда существует (§ 7, n° 2, замечание 1) такое разбиение $(1, s) = I_1 \cup \ldots \cup I_t$ отрезка $(1, s)$, что

(i) для того чтобы v'_i и v'_j были зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы i и j принадлежали одному и тому же множеству I_k;

(ii) $\mathrm{Card}\,(I_k) < s$ для любого k.

Выберем в каждом множестве I_k некоторый индекс $i(k)$. Обозначим через $\hat{L}_{i(k)}$ пополнение поля L относительно нормирования $v'_{i(k)}$ и положим $n(k) = [\hat{L}_{i(k)} : \hat{K}]$. Для любого $i \in I_k$ нормирование v'_i определяет на L ту же топологию, что и $v_{i(k)}$ (§ 7, n° 2, предложение 3); следовательно, это нормирование продолжается до некоторого нормирования $\hat{v}'_i$ поля $\hat{L}_{i(k)}$, ограничение которого на $\hat{K}$ равно $\hat{v}$. Так как нормирования v'_i при $i \in I_k$ попарно неэквивалентны, то таковы же и нормирования $\hat{v}'_i$. Предположение индукции применительно к $(\hat{K}, \hat{L}_{i(k)})$ показывает, что, в силу предложения 2а), формулы (4), имеет место соотношение $\sum_{i \in I_k} e(v'_i/v) f(v'_i/v) \leqslant n(k)$. Поскольку $\sum_{k=1}^{t} n(k) \leqslant n$ (предложение 2б), формула (7)), мы получаем, что

$$\sum_{i=1}^{s} e(v'_i/v) f(v'_i/v) \leqslant n.$$

2) Перейдем к случаю, когда любые два нормирования v'_i зависимы. Пусть A'_i — кольцо нормирования v'_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$; обозначая через A кольцо нормирования v, мы можем записать, что $A'_i \cap K = A$ для любого i. Пусть B' — подкольцо в L, порожденное кольцами $A'_1, \ldots, A'_s$. Положим $B = B' \cap K$; тогда $B \supset A$. В этом случае B является кольцом некоторого нормирования w поля K, а B' — кольцом некоторого, не являющегося несобственным нормирования w' поля L, продолжающего w (§ 7, n° 2, предложение 4). Поле вычетов $\kappa(B')$ является расширением степени $f(w'/w)$ поля $\kappa(B)$. Рассмотрим канонические образы $\bar{A}'_i$, $\bar{A}$ колец A'_i и A в $\kappa(B')$; тогда $\bar{A}$ будет кольцом некоторого нормирования $\bar{v}$ поля $\kappa(B)$, а $\bar{A}'_i$ — кольцами некоторых нормирований $\bar{v}'_i$ поля $\kappa(B')$, продолжающих $\bar{v}$. Поскольку A'_i порождают кольцо B', кольца $\bar{A}'_i$ порождают поле $\kappa(B')$; следовательно, нормирования $\bar{v}'$ не все являются зависимыми (§ 7, n° 2, предложение 4). В силу первой части доказательства, мы

получаем

$$\sum_{i=1}^{s} e(\bar{v}_i'/\bar{v}) f(\bar{v}_i'/\bar{v}) \leqslant [\kappa(B') : \kappa(B)] = f(w'/w);$$

следовательно,

$$\sum_{i=1}^{s} e(w'/w)\, e(\bar{v}_i'/\bar{v}) f(\bar{v}_i'/\bar{v}) \leqslant e(w'/w) f(w'/w) \leqslant n \quad (\text{n° 1, лемма 1}).$$

Доказательство пунктов а) и б) будет окончено, если мы докажем, что

$$f(\bar{v}'/\bar{v}) = f(v_i'/v'), \quad e(w'/w)\, e(\bar{v}'/\bar{v}) = e(v_i'/v). \tag{8}$$

Заметим для этого, что v и $\bar{v}$ (соответственно v_i' и $\bar{v}_i'$) имеют одно и то же поле вычетов (§ 4, n° 1, следствие предложения 2); это доказывает первое равенство. Для доказательства второго заметим, что, согласно замечанию, сделанному в § 4, n° 3, имеет место следующая коммутативная диаграмма, в которой строки представляют собой точные последовательности, а вертикальные стрелки означают канонические вложения

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \Gamma_{\bar{v}} & \to & \Gamma_v & \to & \Gamma_w & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \Gamma_{\bar{v}_i'} & \to & \Gamma_{v'} & \to & \Gamma_{w'} & \to & 0 \end{array}$$

Отсюда выводится, и это доказывает вторую формулу в (8), что имеет место точная последовательность

$$0 \to \Gamma_{\bar{v}'}/\Gamma_{\bar{v}} \to \Gamma_{v'}/\Gamma_v \to \Gamma_{w'}/\Gamma_w \to 0,$$

справедливая в силу предложения 2 гл. I, § 1, n° 4.

Для доказательства теоремы 1 остается установить в). Если кольцо нормирования v_i' содержит кольцо нормирования v_j', то группа $\Gamma_{v_i'}$ отождествляется с некоторой факторгруппой $\Gamma_{v_j'}/H$, где H — изолированная подгруппа (§ 4, n° 3). Так как композиция канонических отображений $\Gamma_v \to \Gamma_{v_j'} \to \Gamma_{v_j'}/H = \Gamma_{v_i'}$ инъективна, то $H \cap \Gamma_v = \{0\}$, откуда $H = \{0\}$ (лемма 3, n° 1). Но тогда v_i' и v_j' эквивалентны, откуда следует, что $i = j$.

Замечание. Пересечение C колец A_i' нормирований v_i' ($i \in I$) является *целым замыканием* кольца A в поле L (§ 1, n° 3, следствие 3 теоремы 3); кроме того, из в) и из предложений 1 и 2 § 7, n° 1, следует, что C — *полулокальное кольцо*,

максимальными идеалами которого служат пересечения $\mathfrak{m}_i = C \cap \mathfrak{m}(A_i')$; оттуда же следуют равенства $A_i' = C_{\mathfrak{m}_i}$ для любого $i \in I$.

4. Начальный индекс

Определение 4. *Пусть G — совершенно упорядоченная коммутативная группа и H — подгруппа конечного индекса в G. Начальным индексом подгруппы H в G (обозначение $\varepsilon(G, H)$) называется число мажорных подмножеств в G, образованных строго положительными элементами и содержащих все положительные элементы из H.*

Начальный индекс является натуральным числом ввиду следующего предложения:

Предложение 3. *В тех же предложениях, что в определении 4, если множество строго положительных элементов группы G не имеет наименьшего элемента, то $\varepsilon(G, H) = 1$ для любой подгруппы H. Если же существует наименьший строго положительный элемент в G, то $\varepsilon(G, H) = (G' : (G' \cap H))$, где G' — подгруппа в G, порожденная этим элементом.*

В первом случае пусть x — произвольный положительный элемент из G. Множество тех $y \in G$, для которых $0 < y < x$, является бесконечным, а потому существуют два элемента в этом множестве, которые друг от друга отличаются, но сравнимы по модулю H. Их разность z принадлежит H и $0 < z < x$. Следовательно, всякое мажорное подмножество, содержащее все строго положительные элементы из H, содержит и x, а потому и все элементы из G, большие нуля.

Во втором случае пусть x — наименьший положительный элемент группы G и $n > 0$ — наименьшее целое число, удовлетворяющее условию $nx \in H$. Ясно, что $n = (G' : (G' \cap H))$. С другой стороны, обозначая через $M(y)$ множество элементов $z \in G$, для которых $y \leqslant z$ $(y \in G)$, мы видим, что мажорные множества из определения 4 — это в точности множества $M(x)$, $M(2x)$, ..., $M(nx)$.

Следствие. *Начальный индекс $\varepsilon(G, H)$ делит индекс $(G : H)$ и равен ему, если G изоморфна группе $\mathbf{Z}$.*

В частности, $\varepsilon(G, H) \leqslant (G : H)$.

Определение 5. *Пусть K — поле, L — расширение поля K конечной степени, w — нормирование на L, v — его ограничение на K, Γ_w и Γ_v — группы порядков указанных нормирований. Начальным индексом ветвления нормирования w относительно нормирования v (или относительно поля K) называется началь-*

ный индекс подгруппы Γ_v *в группе* Γ_w; *это число обозначается через* $\varepsilon(w/v)$.

В силу только что указанного следствия, число $\varepsilon(w/v)$ делит $e(w/v)$, а равенство между этими числами имеет место в случае дискретного нормирования.

Предложение 4. *В тех же предпосылках, что в определении* 5, *пусть* A *и* $\mathfrak{m}$ (соответственно A' *и* $\mathfrak{m}'$) — *кольцо и идеал нормирования* v (соответственно *нормирования* w). *Тогда*

$$[A'/\mathfrak{m}A' : A/\mathfrak{m}] = \varepsilon(w/v) f(w/v).$$

В самом деле, идеалы из A', содержащие $\mathfrak{m}A'$ и отличные от A', соответствуют мажорным подмножествам группы Γ_w, образованным положительными элементами и содержащим положительные элементы из Γ_v (§ 3, n° 5, следствие предложения 7). Следовательно, число этих идеалов равно $\varepsilon(w/v)$ и, поскольку они образуют множество, совершенно упорядоченное по включению, это число равно длине факторкольца $A'/\mathfrak{m}A'$. Но произвольный модуль длины 1 над кольцом A' является векторным пространством размерности 1 над полем $A'/\mathfrak{m}'$, следовательно, этот модуль представляет собой некоторый модуль длины $f(w/v)$ над A. Но так как $A'/\mathfrak{m}A'$ является модулем длины $\varepsilon(w/v)$ над A', то над A соответствующая длина равна $\varepsilon(w/v) f(w/v)$; поэтому такова же эта длина и над $A/\mathfrak{m}$.

5. Соотношение $\sum e_i f_i = n$

Предложение 5. *Пусть* K — *поле,* v — *нормирование на* K, A — *кольцо этого нормирования,* $\mathfrak{m}$ — *его идеал,* L — *расширение конечной степени* n *над* K, B — *целое замыкание кольца* A *в поле* L *и* $(v'_i)_{1 \leqslant i \leqslant s}$ — *полная система продолжений нормирования* v *на поле* L. *Тогда*

$$[B/\mathfrak{m}B : A/\mathfrak{m}] = \sum_{i=1}^{s} \varepsilon(v'_i/v) f(v'_i/v).$$

Пусть A_i — кольцо нормирования v'_i. Имеем $A_i = B_{\mathfrak{m}_i}$, где $\mathfrak{m}_i$ пробегает семейство максимальных идеалов кольца B (n° 3, замечание). Пусть $\mathfrak{q}_i$ — насыщение идеала $\mathfrak{m}B$ относительно идеала $\mathfrak{m}_i$ (гл. II, § 2, n° 4). В силу следствия 3 предложения 1, гл. V, § 2, n° 1, канонический гомоморфизм $B/\mathfrak{m}B \to \prod_{i=1}^{s} B/\mathfrak{q}_i$ является изоморфизмом и $\mathfrak{m}_i$ представляет собой единственный идеал кольца B, содержащий $\mathfrak{q}_i$. Следовательно, $B/\mathfrak{q}_i$ канонически изоморфно $(B/\mathfrak{q}_i)_{\mathfrak{m}_i}$ (гл. II, § 3, n° 3, предложение 8),

т. е. кольцу $B_{\mathfrak{m}_i}/\mathfrak{m}B_{\mathfrak{m}_i} = A_i/\mathfrak{m}A_i$. Следовательно, имеет место канонический изоморфизм $B/\mathfrak{m}B \to \prod_{i=1}^{s} A_i/\mathfrak{m}A_i$, откуда и получаем нужный результат в силу предложения 4 n° 4.

Следствие. *При тех же предположениях и в тех же обозначениях имеет место соотношение*

$$[B/\mathfrak{m}B : A/\mathfrak{m}] = \sum_{i=1}^{s} \varepsilon(v_i'/v) f(v_i'/v') \leqslant \sum_{i=1}^{s} e(v_i'/v) f(v_i'/v) \leqslant n.$$

Действительно, ведь известно, что $\varepsilon(v_i'/v) \leqslant e(v_i'/v)$ (n° 4, следствие из предложения 3) и что $\sum_{i=1}^{s} e(v_i'/v) f(v_i'/v) \leqslant n$ (n° 3, теорема 1).

Теорема 2. *В предположениях и обозначениях предложения* 5 *следующие условия эквивалентны*:

а) *кольцо B является A-модулем конечного типа*;

б) *кольцо B является свободным A-модулем*;

в) *имеет место равенство $[B/\mathfrak{m}B : A/\mathfrak{m}] = n$*;

г) *справедливо равенство $\sum_{i=1}^{n} e(v_i'/v) f(v_i'/v) = n$ и при любом i имеет место равенство $\varepsilon(v_i'/v) = e(v_i'/v)$.*

Эквивалентность условий а) и б) следует из леммы 1, § 3, n° 6. Ясно, что из б) следует в) (*Algèbre*, chap. II, 3^{e} éd., § 1, n° 5, formule (19)). Эквивалентность условий в) и г) вытекает из следствия предложения 5. Остается показать, что из в) следует б).

В общем случае, если M — некоторый A-модуль, мы будем обозначать через $V(M)$ векторное пространство $M/\mathfrak{m}M$ над полем $A/\mathfrak{m}$. Условие в) означает, что $\dim(V(B)) = n$. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — элементы из B, канонические образы которых в $V(B)$ образуют базис пространства $V(B)$, и пусть $L \subset B$ — порожденный этими элементами A-подмодуль. Поскольку L без кручения и является модулем конечного типа, он свободен (§ 3, n° 6, лемма 1). Мы сейчас увидим, что $B = L$. Пусть $y \in B$; положим $M = L + Ay$. Это свободный A-модуль. Канонические вложения $L \to M \to B$ дают канонические гомоморфизмы $V(L) \to V(M) \to V(B)$. Поскольку ранги модулей L и M не превосходят n, то же верно и в отношении размерностей пространств $V(L)$ и $V(M)$. Однако, по условию, гомоморфизм $V(L) \to V(B)$ сюръективен и $V(B)$ имеет размерность n. Следовательно, пространства $V(L)$ и $V(M)$ имеют размерность n и гомоморфизм $V(L) \to V(M)$ сюръективен. Так как M является

модулем конечного типа, гомоморфизм $L \to M$ сюръективен (гл. II, § 3, n° 2, следствие 1 предложения 4), откуда $L = M$, $y \in L$ и $B = L$. Следовательно, модуль B свободен.

Замечание 1. Когда нормирование v *дискретно*, имеет место равенство $\varepsilon(v'_i/v) = e(v'_i/v)$ (n° 4) и условие г) сводится к соотношению $\sum_{i=1}^{s} e(v'_i/v) f(v'_i/v) = n$.

Следствие 1. *При тех же предположениях и обозначениях допустим, что нормирование v дискретно, а расширение L сепарабельно. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{s} e(v'_i/v) f(v'_i/v) = n.$$

Действительно, целое замыкание B кольца A в поле L в этом случае является свободным A-модулем ранга n, так как A — кольцо главных идеалов (гл. V, § 1, n° 6, следствие 2 предложения 18).

Следствие 2. *Пусть K — поле, v — дискретное нормирование на K, относительно которого K полно, и L — некоторое расширение конечной степени n поля K. Тогда v допускает продолжение v' на L, которое единственно (с точностью до эквивалентности); кольцо A' нормирования v' представляет собой свободный A-модуль конечного типа, где A — кольцо нормирования v, и $e(v'/v) f(v'/v) = n$.*

Действительно, все продолжения v на L зависимы (n° 2, следствие предложения 2); так как эти продолжения дискретны (n° 1, следствие 3 предложения 1), то, следовательно, они эквивалентны (§ 4, n° 5, предложение 6в)). Этим доказана единственность продолжения v'. Целое замыкание кольца A в поле L равно, следовательно, A' (§ 1, n° 3, следствие 3 теоремы 3). Поскольку v дискретно, топология, индуцированная на A топологией поля K, является $\mathfrak{m}$-адической (где $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(A)$). Кольцо A полно, ибо оно замкнуто в K. Отсюда мы заключаем, что A' является A-модулем конечного типа, поскольку $A'/\mathfrak{m}A'$ представляет собой (n° 4, предложение 4) векторное $(A/\mathfrak{m})$-пространство конечной размерности (гл. III, § 2, n° 9, следствие 3 предложения 12). Следовательно, этот модуль свободен и $e(v'/v) f(v'/v) = n$ в силу теоремы 2.

Следствие 3. *Предположим, что нормирование v имеет высоту 1 и что выполнены эквивалентные условия теоремы 2. Если $\hat{L}_i$ — пополнение поля L относительно v'_i, то степень*

$n_i = [L_i : K]$ *равна* $e(v_i'/v)f(v_i'/v)$ *при любом* i *и канонический гомоморфизм*

$$\varphi\colon \hat{K} \otimes_K L \to \prod_{i=1}^{s} L_i$$

(n° 2, предложение 2) *биективен. Для любого* $x \in L$ *характеристический многочлен* $\mathrm{Pc}_{L/K}(x; X)$ *равен произведению характеристических многочленов* $\mathrm{Pc}_{\hat{L}_i/\hat{K}}(x; X)\ (1 \leqslant i \leqslant s)$. *В частности, имеют место равенства*

$$\mathrm{Tr}_{L/K}(x) = \sum_{i=1}^{s} \mathrm{Tr}_{\hat{L}_i/\hat{K}}(x),$$

$$N_{L/K} = \prod N_{\hat{L}_i/\hat{K}}(x), \tag{9}$$

$$v(N_{L/K}(x)) = \sum_{i=1}^{s} n_i v_i'(x).$$

(Последнее из соотношений (9) имеет смысл, так как, очевидно, можно предполагать, что нормирования v_i', имеющие высоту 1, в силу следствия 2 предложения 1 n° 1, принимают значения, так же как и нормирование v, в некоторой подгруппе группы $\mathbf{R}$.)

Поскольку нормирования v_i' попарно неэквивалентны и имеют высоту 1, они независимы и предложение 2 n° 2 показывает, следовательно, что $e(v_i'/v)f(v_i'/v) \leqslant n_i$ при любом i и $\sum_{i=1}^{s} n_i \leqslant n$.

Первое утверждение следует из этих неравенств и соотношения $\sum_{i=1}^{s} e(v_i'/v)f(v_i'/v) = n$. Посредством изоморфизма φ эндоморфизм $z \to z(1 \otimes x)$ кольца $\hat{K} \otimes_K L$ (для $x \in L$) превращается в эндоморфизм кольца $\prod_{i=1}^{s} \hat{L}_i$, относительно которого устойчив каждый из сомножителей и который в каждом из сомножителей сводится к умножению на x (L считается каноническим образом вложенным в свое пополнение $\hat{L}_i$). Отсюда следует утверждение о характеристическом многочлене элемента x и первые две формулы (9). Наконец, пусть E — расширение типа Галуа поля K конечной степени, содержащее L_i. Поскольку $\hat{K}$ полно и $\hat{v}$ имеет высоту 1, существует лишь одно (с точностью до эквивалентности) нормирование w на E, продолжающее $\hat{v}$ (n° 2, следствие 1 предложения 2). Для любого $\hat{K}$-автомор-

физма σ поля E поэтому $w(\sigma(x)) = v_i'(x)$ [1]). Следовательно, $\hat{v}\left(N_{\hat{L}_i/\hat{K}}(x)\right) = n_i v_i'(x)$ (*Алгебра*, гл. VIII, § 12, n° 2, формула (15)). Этим доказана третья из формул в (9).

Следствие 4. *В предположениях следствия* 3 *если* L — *сепарабельное расширение поля* K, *то каждое из полей* $\hat{L}_i$ *является сепарабельным расширением поля* $\hat{K}$. *Если, кроме того,* L *является расширением Галуа поля* K *с группой Галуа* $\mathfrak{G}$ *и если* $\mathfrak{G}_i$ — *группа разложения идеала нормирования* v_i' *в кольце* B (гл. V, § 2, n° 2, определение 2), *то* $\hat{L}_i$ *представляет собой расширение Галуа поля* $\hat{K}$, *группа Галуа которого изоморфна группе* $\mathfrak{G}_i$.

Ясно, что $L_i = \hat{K}(L)$. Следовательно, если L сепарабельно над K, то $\hat{L}_i$ сепарабельно над K (*Алгебра*, гл. V, § 7, n° 6, предложение 10). Предположим теперь, что L является расширением Галуа. Любой автоморфизм $\sigma \in \mathfrak{G}_i$ *непрерывен* на L в топологии, определяемой нормированием v_i', и тот факт, что идеалы нормирований v_i' попарно несравнимы между собой относительно включения (§ 7, n° 2, следствие 1 теоремы 1), влечет за собой, что $v_i' = v_i' \circ \sigma$ в силу определения группы $\mathfrak{G}_i$. Следовательно, σ можно продолжить по непрерывности до некоторого $\hat{K}$-автоморфизма $\hat{\sigma}$ поля $\hat{L}_i$. Этим доказано, что число $\hat{K}$-автоморфизмов поля $\hat{L}_i$ не меньше, чем $\mathrm{Card}(\mathfrak{G}_i)$. Но так как нормирования v_i' попарно сопряжены относительно $\mathfrak{G}$ (гл. V, § 2, n° 3, предложение 6), то $s = (\mathfrak{G} : \mathfrak{G}_i)$, откуда

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{G}_i) = n/s \leqslant n_i,$$

и, с другой стороны, $n = sn_i$ в силу следствия 3. Этим доказано, что $\hat{L}_i$ есть расширение Галуа поля $\hat{K}$ и что продолжения по непрерывности автоморфизмов $\sigma \in \mathfrak{G}_i$ являются единственными $\hat{K}$-автоморфизмами поля $\hat{L}_i$.

Замечание 2. Часть предыдущих результатов имеет место и в том случае, когда K *является телом, не обязательно коммутативным* (ср. § 3, n° 1). Пусть L — надтело тела K, и пусть v' — нормирование на L, v — его ограничение на K, A' и A — кольца нормирований v' и v соответственно. В этой ситуации определяется индекс ветвления $e(v'/v)$ так же, как и в n° 1; с другой стороны, тело $\kappa(A)$ отождествляется с некоторым под-

[1]) Тот факт, что $w(\sigma(r)) = w(x)$, непосредственно вытекает из следующего легко проверяемого утверждения: всякий сохраняющий порядок автоморфизм упорядоченной группы высоты 1, оставляющий неподвижным какой-либо ее элемент, отличный от нуля, является тождественным. — *Прим. ред.*

телом в $\kappa(A')$, и *рангом вычетов* (слева) нормирования v' относительно нормирования v называется число $f(v'/v)$, равное размерности левого векторного $\kappa(A)$-пространства $\kappa(A')$, когда эта размерность конечна, и $+\infty$ в противном случае. Если L является левым векторным K-пространством *конечной* размерности n, то лемма 2 n° 1 и ее доказательство сохраняются без изменения. Кроме того, если тело K *полно* относительно v, то утверждения следствия 2 теоремы 2 n° 5 (за исключением существования v') опять-таки выполняются (n обозначает размерность L как левого векторного K-пространства) со следующим доказательством:

В первую очередь топология, определенная нормированием v' на теле L, отделима и согласована со структурой левого векторного K-пространства; следовательно, любые два продолжения нормирования v на L дают одну и ту же топологию (§ 5, n° 2, предложение 4). Это доказывает, что указанные продолжения одинаковы с точностью до эквивалентности (§ 6, n° 2). Покажем, далее, что если $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(A)$, то $A'/\mathfrak{m}A'$ является левым векторным $(A/\mathfrak{m})$-пространством размерности $e(v'/v)f(v'/v)$. Действительно, положим $e = e(v'/v)$; можно предполагать, что $v(K^*) = \mathbf{Z}$, $v'(L^*) = e^{-1}\mathbf{Z}$; пусть u' — такой элемент из L, что $v'(u') = e^{-1}$, u — такой элемент из K, что $v(u) = 1$. Следовательно, $u = zu'^e$, где $z \in L$ — такой элемент, что $v'(z) = 0$. Поскольку $\mathfrak{m}$ порождается элементом u (как левый идеал или как правый идеал в A), то $\mathfrak{m}A' = u'^e A' = A'v'^e$ и достаточно доказать, что при $0 \leqslant k \leqslant e-1$ множество $A'u'^k/A'u'^{k+1}$ является левым векторным $(A/\mathfrak{m})$-пространством размерности $f(v'/v)$. Но $\to tu'^k$ является изоморфизмом левого A-модуля A' на левый A-модуль $A'u'^k$, переводящим $A'u'$ в $A'u'^{k+1}$; этот изоморфизм при переходе к фактормодулям дает $(A/\mathfrak{m})$-изоморфизм пространства $A'/A'u'$ на пространство $A'u'^k/A'u'^{k+1}$, откуда и следует наше утверждение, в силу определения числа $f(v'/v)$, ибо u' порождает максимальный идеал в A'. Заканчивается доказательство так же, как и тогда, когда K и L являются полями (тот факт, что A-модуль без кручения свободен, доказывается так же, как и в лемме 1 § 3, n° 6).

6. Кольца нормирования в алгебраическом расширении

Предложение 6. *Пусть K — поле, v — нормирование на K, A — его кольцо, L — алгебраическое расширение поля K, A' — целое замыкание A в L. Пусть $\mathfrak{B}$ — множество колец нормирований поля L, продолжающих v, $\mathfrak{M}'$ — множество максимальных идеалов в A'. Тогда отображение $V \to \mathfrak{m}(V) \cap A'$ является биектив-*

ным отображением множества $\mathfrak{B}$ *на множество* $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{m}' \to A'_{\mathfrak{m}'}$ — *обратным биективным отображением.*

Для любого максимального идеала $\mathfrak{m}'$ кольца A' пересечение $\mathfrak{m}' \cap A$ представляет собой максимальный идеал $\mathfrak{m}$ кольца A (гл. V, § 2, n° 1, предложение 1) и $A'_{\mathfrak{m}'}$ доминируется некоторым кольцом нормирования V поля L (которое, следовательно, представляет собой кольцо некоторого нормирования поля L, продолжающего v) (§ 1, n° 2, следствие теоремы 2). Поле L является объединением фильтрующегося семейства подрасширений K_α поля L, имеющих конечную степень над K, и для того чтобы установить равенство $V = A'_{\mathfrak{m}'}$, достаточно доказать, что $V \cap K_\alpha = A'_{\mathfrak{m}'} \cap K_\alpha$ для любого α. Но если положить $A'_\alpha = A' \cap K_\alpha$, то A'_α будет целым замыканием кольца A в поле K_α и, следовательно, пересечением колец нормирований поля K_α, продолжающих v, причем этих колец $V_{i\alpha}$ имеется лишь конечное число и они являются локальными кольцами $(A'_\alpha)_{\mathfrak{m}'_{i\alpha}}$ кольца A'_α $(1 \leqslant i \leqslant n)$, где $\mathfrak{m}'_{i\alpha}$ — различные максимальные идеалы в A'_α (n°3, замечание); но $\mathfrak{m}' \cap A'_\alpha$ совпадает с одним из идеалов $\mathfrak{m}'_{i\alpha}$ и, следовательно, пересечение $V \cap K_\alpha$ равно соответствующему локальному кольцу $(A'_\alpha)_{\mathfrak{m}'_{i\alpha}} \subset A'_{\mathfrak{m}'}$, что и завершает доказательство равенства $V = A'_{\mathfrak{m}'}$. Обратно, если $V \in \mathfrak{B}$, то $A' \subset V$ (§ 3, n° 3, предложение 6), и если $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}(V) \cap A'$, то $\mathfrak{m}' \cap A = \mathfrak{m}$; следовательно, $\mathfrak{m}'$ является максимальным идеалом в A' (гл. V, § 2, n° 1, предложение 1) и предыдущее рассуждение показывает, что $V = A'_{\mathfrak{m}'}$.

Предложение 7. *Пусть* K — *поле,* L — *расширение типа Галуа поля* K, f *и* f' — *точки поля* L *со значениями в одном и том же поле* F. *Предположим, что ограничения точек* f *и* f' *на* K *совпадают. Тогда существует такой* K*-автоморфизм* s *поля* L, *что* $f' = f \circ s$.

Пусть, в самом деле, A есть кольцо точки поля K, являющейся общим значением ограничений f и f'. Кольца точек f и f' содержат целое замыкание A' кольца A в поле L (§ 1, n° 3, следствие 3 теоремы 3); следовательно (гл. V, § 2, n° 3, следствие 1 предложения 6), существует такой K-автоморфизм s поля L, что ограничения точек f' и $f \circ s$ на A' равны; если $\mathfrak{m}'$ — общее ядро этих ограничений, то $\mathfrak{m}' \cap A$ является максимальным идеалом в A; следовательно, $\mathfrak{m}'$ является максимальным идеалом в A' и точки f' и $f \circ s$ совпадают на кольце $A'_{\mathfrak{m}'}$. Но, в силу предложения 6, единственным кольцом нормирования поля L, доминирующим над $A'_{\mathfrak{m}'}$, является само кольцо $A'_{\mathfrak{m}'}$; следовательно, кольца точек f' и $f \circ s$ совпадают.

Следствие 1. *Пусть K — поле, v — нормирование на K, L — расширение типа Галуа поля K и v', v'' — два продолжения v на L. Тогда существует такой K-автоморфизм s поля L, что v'' эквивалентно $v' \circ s$.*

Пусть f' и f'' — точки поля K, ассоциированные с v' и v''; заменяя их при необходимости на эквивалентные точки, можно предположить, что обе эти точки принимают значения в некотором алгебраическом замыкании поля вычетов нормирования v (n° 1, предложение 1). Тогда существует такой K-автоморфизм s поля L, что $f'' = f' \circ s$ (предложение 7); таким образом, v'' эквивалентно нормированию $v' \circ s$ в силу соответствия между точками и нормированиями (§ 3, n° 3).

Следствие 2. *Пусть K — поле, f — некоторая точка* (соответственно v — некоторое нормирование) *поля K и L — радикальное расширение поля K. Тогда все продолжения точки f* (соответственно нормирования v) *на поле L эквивалентны.*

В самом деле, L является расширением типа Галуа и его единственный автоморфизм — тождественное отображение. Следствие 2 вытекает поэтому из предложения 7 (соответственно из следствия 1).

Предложение 8. *Пусть K — поле, v — нормирование на K, L — расширение типа Галуа поля K конечной степени n и $(v'_i)_{1 \leqslant i \leqslant g}$ — полная система продолжений нормирования v на поле L. Тогда индекс $e(v'_i/v)$ и степень $f(v'_i/v)$ имеют значения e и f, не зависящие от i. Имеет место неравенство $efg \leqslant n$. Если целое замыкание в L кольца A нормирования v является A-модулем конечного типа, то $efg = n$.*

Это немедленно следует из теорем 1 (n° 3) и 2 (n° 5).

7. Продолжение абсолютных значений

Предложение 9. *Пусть K — поле, L — алгебраическое расширение поля K и f — некоторое абсолютное значение на K. Тогда f продолжается до некоторого абсолютного значения на поле L.*

Предположим сначала, что существует такое нормирование v на K с вещественными значениями, что $f(x) = e^{-v(x)}$. Существует нормирование v' на L, ограничение которого на K эквивалентно v (§ 3, n° 3, предложение 5). Тогда v' имеет высоту 0 или 1 (n° 1, следствие 2 предложения 1); следовательно, можно предполагать, что это продолжение имеет вещественные значения. Ограничение отображения $x \to e^{-v'(x)}$ на K является абсолютным значением, эквивалентным f; следовательно, оно имеет

вид f^s при некотором $s>0$ (*Topologie générale*, chap. IX, § 3, n° 2, proposition 5). Отсюда мы заключаем, что

$$x \to e^{-v'(x)/s}$$

представляет собой абсолютное значение на L, продолжающее f.

Предположим теперь, что f не является ультраметрическим. Тогда K отождествляется с некоторым подполем в поле $\mathbf{C}$ и при этом $f(x)=|x|^s$, где $0 \leqslant s \leqslant 1$ (§ 6, n° 4, теорема 2). Поскольку поле $\mathbf{C}$ алгебраически замкнуто, L отождествляется с некоторым подполем в $\mathbf{C}$ и абсолютное значение $x \to |x|^s$ продолжает f.

Предложение 10. *Пусть K — поле, f — некоторое абсолютное значение на K, относительно которого K полно и не дискретно, и L — алгебраическое расширение поля K. Тогда f продолжается единственным образом до абсолютного значения f' на L, и если L имеет конечную степень n, то $f'(x)=(f(N_{L/K}(x)))^{1/n}$ для любого $x \in L$.*

Существование абсолютного значения f' следует из предложения 9, а его единственность (на любом подрасширении конечной степени расширения L, а потому и на всем L) — из леммы 2, § 6, n° 4. Пусть f' — единственное продолжение абсолютного значения f на алгебраическое замыкание поля K, и предположим, что L имеет конечную степень n. Известно, что $N_{L/K}(x)=\prod_{i=1}^{n} x_i$, где каждый множитель x_i сопряжен с x над K (*Алгебра*, гл. VIII, § 12, n° 2, предложение 4). В силу единственности f', имеем $f'(x_i)=f'(x)$ для любого i, откуда и следует требуемая формула.

Предложение 11. *Пусть K — поле, f — неультраметрическое абсолютное значение на K, $\hat{K}$ — пополнение поля K относительно f, $\hat{f}$ — продолжение абсолютного значения f на $\hat{K}$ и L — расширение конечной степени n поля K.*

а) *Пусть f' — абсолютное значение на L, продолжающее f; обозначим через $\hat{L}_{f'}$ пополнение L относительно f' и отождествим $\hat{K}$ с замыканием поля K в $\hat{L}_{f'}$; тогда $[\hat{L}_{f'}:\hat{K}] \leqslant n$.*

б) *Число абсолютных значений поля L, продолжающих f, конечно. Если обозначить их через $f'_1, \ldots, f'_s$, а через $\hat{L}_i$ — пополнение L относительно f'_i, то каноническое отображение $\hat{K} \otimes_K L \to \prod_{i=1}^{s} \hat{L}_i$ будет изоморфизмом и*

$$\sum_{i=1}^{s} [\hat{L}_i : \hat{K}] = n. \tag{10}$$

Доказательство здесь такое же, как и в случае аналогичных утверждений из предложения 2 (n° 2). Надо лишь заменить ссылки „ § 7, n° 2, теорема 1; § 5, n° 2, следствие предложения 4“ на следующие: „§ 7, n° 3, теорема 2; *Топологические векторные пространства*, гл. I, § 2, n° 3, следствие 1 теоремы 2.“ Отметим, что любые два продолжения абсолютного значения f на L, определяющие одну и ту же топологию, равны (*Topologie gènerale*, chap. IX, § 3, n° 2, proposition 5). Наконец, поскольку f не является ультраметрическим, поле K имеет характеристику 0; следовательно, радикал кольца $\hat{K} \otimes_K L$ равен нулю.

Замечания. 1) Предложение 11б) показывает, что любой композит расширений $\hat{K}$ и L над K изоморфен одному из пополнений $\hat{L}_i$ и что эти композиты попарно неизоморфны [1]).

2) Мы знаем, что пополнения $\hat{K}$ и $\hat{L}_i$ изоморфны **R** или **C** (§ 6, n° 4, теорема 2). Когда $\hat{K}$ изоморфно **C**, каждое из полей L_i также изоморфно **C** и (10) показывает, что число продолжений f'_i *равно* n. Если $\hat{K}$ изоморфно **R** (например, когда $K = \mathbf{Q}$), то обозначим через r_1 (соответственно через r_2) число таких индексов i, для которых $\hat{L}_i$ изоморфно **R** (соответственно **C**); тогда (10) перепишется в виде

$$r_1 + 2r_2 = n. \tag{11}$$

Предложение 12. *Пусть K — поле, f — абсолютное значение на K, L — расширение типа Галуа поля K, f' и f'' — два продолжения f на L. Тогда существует такой K-автоморфизм s поля L, что $f'' = f' \circ s$.*

Если абсолютное значение f ультраметрическое, то следствие 1 предложения 7 (n° 6) показывает, что существует такой K-автоморфизм s поля L, что f'' и $f' \circ s$ являются эквивалентными абсолютными значениями. Но тогда существует такое вещественное число $a > 0$, что $f''(x) = (f'(s(x)))^a$ для любого $x \in L$. Если f не является несобственным, то, взяв такой элемент $x \in K^*$, что $f(x) \neq 1$, мы получим, что $a = 1$. Если же f является несобственным, то тем же свойством обладают и f' и f'' (следствие 2 предложения 1 n° 1), и мы можем взять в качестве s тождественный автоморфизм.

Если абсолютное значение f не является ультраметрическим, то существуют **Q**-изоморфизмы u' и u'' поля L на некоторые подполя поля **C** и вещественные числа $a' > 0$, $a'' > 0$, для которых $f'(x) = |u'(x)|^{a'}$ и $f''(x) = |u''(x)|^{a''}$ при любом $x \in L$ (§ 6,

[1]) См. примечание на стр. 499. — *Прим. ред.*

n° 4, теорема 2). Полагая $x = 2$, мы получаем, что $a' = a''$. Ограничения изоморфизмов u' и u'' на K продолжаются по непрерывности до изоморфизмов u_1 и u_2 поля $\hat{K}$ на $\mathbf{R}$ (соответственно $\mathbf{C}$). Тогда $u_2 \circ u_1^{-1}$ представляет собой автоморфизм нормированного поля $\mathbf{R}$ (соответственно $\mathbf{C}$) и, следовательно, он тождествен (соответственно тождествен или равен автоморфизму c: $\zeta \to \bar{\zeta}$). Заменяя при необходимости u' на cu', мы обнаруживаем, что можно считать ограничения изоморфизмов u' и u'' на K совпадающими. Отождествляя K с некоторым подполем в $\mathbf{C}$ посредством указанного ограничения, мы получаем, что u' и u'' являются K-изоморфизмами поля L на некоторые подполя в $\mathbf{C}$. Поскольку L есть расширения типа Галуа поля K, существует такой K-автоморфизм s поля L, что $u'' = u' \circ s$. Так как $a' = a''$, то отсюда немедленно следует, что $f'' = f' \circ s$.

Замечание 3. Когда поле $\hat{K}$ изоморфно $\mathbf{R}$, предложение 12 показывает, что все пополнения $\hat{L}_i$ поля L (обозначения из предложения 11) изоморфны друг другу. Таким образом, в обозначениях замечания 2 мы имеем, что либо $r_1 = n$ и $r_2 = 0$, либо $r_1 = 0$ и $2r_2 = n$.

Упражнения

1) Пусть K — поле, $A = K[[X, Y, Z]]$ — кольцо формальных рядов от трех переменных над K; пусть v' (соответственно v'') — нормирование на A со значениями в группе $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, упорядоченной лексикографически, при котором $v'(X) = (1, 0)$, $v'(Y) = (0, 1)$, $v'(Z) = (0, 0)$ (соответственно $v''(X) = (1, 0)$, $v''(Y) = (0, 0)$, $v''(Z) = (0, 1)$). Пусть σ — автоморфизм кольца A, оставляющий неподвижными элементы из K и X, для которого $\sigma(Y) = Z$, $\sigma(Z) = Y$. Если B обозначает подкольцо в A, образованным инвариантными относительно σ элементами, а E (соответственно $\hat{F}$) — поле частных кольца A (соответственно B), то нормирования v' и v'' (канонически продолженные на E) имеют одинаковое ограничение v на F; при этом F *полно* в топологии, определенной нормированием v, и E представляет собой квадратичное расширение поля F; два нормирования v', v'' на E зависимы, но не эквивалентны.

2) Пусть K_0 — поле, полученное присоединением к 2-адическому полю $\mathbf{Q}_2$ корней всех многочленов $X^{2^n} - 2$; пусть v — единственное нормирование на K_0, продолжающее 2-адическое нормирование, и пусть K — пополнение поля K_0 относительно v. Показать, что многочлен $X^2 - 3$ неприводим в $K[X]$; пусть K' — поле корней этого многочлена, и пусть v' — продолжение v на K'. Имеют место следующие соотношения:

$$n = [K' : K] = 2, \qquad e(v'/v) = f(v'/v) = 1.$$

3) Пусть k — поле рациональных дробей $\mathbf{F}_p(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ от бесконечного семейства переменных над простым полем $\mathbf{F}_p$, и пусть $K = k(U, V)$ — поле рациональных дробей от двух переменных над k.

а) Показать, что элемент $P(U) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n^p U^{np}$ поля формальных рядов $k((U))$ не является алгебраическим над полем $k(U)$ рациональных дробей. Отображение $F(U, V) \to F(U, P(U))$ поля $k[U, V]$ в $k((U))$ продолжается до изо-

морфизма поля K на некоторое подполе в $k((U))$; ограничение на это подполе нормирования поля $k((U))$, равного порядку формальных рядов (§ 3, n° 3, пример 3), представляет собой дискретное нормирование v на K, поле вычетов которого равно k.

б) Пусть K' — алгебраическое расширение $K(V^{1/p})$ поля K, так что $[K':K]=p$; если v' — то единственное нормирование на K', которое продолжает v, то показать, что $e(v'/v)=f(v'/v)=1$. Кольцо нормирования v' не является, следовательно, модулем конечного типа над кольцом нормирования v.

4) Пусть k — поле, $K=k(X,Y)$ — поле рациональных дробей от двух переменных над k и v — такое нормирование на K со значениями в лексикографически упорядоченной группе $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, что $v(X)=(0,1)$, $v(Y)=(1,0)$. Пусть K' — поле $K(\sqrt{X})$. Показать, что v имеет единственное продолжение v' на K' и что $e(v'/v)=2$, $f(v'/v)=1$, но кольцо нормирования v' не является модулем конечного типа над кольцом нормирования v.

5) Пусть K — поле, A — некоторое кольцо нормирования для K и L — алгебраическое расширение поля K конечной степени. Пусть $A'\supset A$ — второе кольцо нормирования поля K; пусть A'_i $(1\leqslant i\leqslant m)$ — такие кольца нормирования для L, что $A'_i\cap K=A'$, и пусть k'_i — соответствующие им поля вычетов. Пусть k — поле вычетов кольца A' и A'' — кольцо нормирования для k, являющееся каноническим образом A; наконец, пусть A''_{ij} $(1\leqslant j\leqslant n_i)$ — такие кольца нормирования для k'_i, что $A''_{ij}\cap k=A''$, и пусть A_{ij} — прообразы в A'_i колец A''_{ij} $(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n_i)$.

а) Показать, что кольца A_{ij} являются кольцами нормирования для L, причем они попарно различны $A_{ij}\cap K=A$; показать, что любое кольцо нормирования B для L, удовлетворяющее равенству $B\cap K=A$, совпадает с одним из колец A_{ij}.

б) Показать, что

$$e(A_{ij}/A)=e(A'_i/A')\,e(A''_{ij}/A'')\quad\text{и}\quad f(A_{ij}/A)=f(A''_{ij}/A'').$$

¶ 6) Пусть K — поле, v — нормирование на K и A — кольцо нормирования v.

а) Предположим, что кольцо A гензелево (гл. III, § 4, упражнение 3); в этом случае, допуская некоторую нестрогость, говорят также, что поле K *гензелево относительно* v. Тогда для любого алгебраического расширения L поля K и любого нормирования v' на L, продолжающего v, кольцо A' нормирования v' гензелево (гл. III, § 4, упражнение 4).

б) Если K полно относительно v и v имеет высоту 1, то A гензелево. Привести пример, когда K полно относительно v и v имеет высоту 2, но кольцо A гензелевым не является (ср. упражнение 1).

в) Если K *линейно компактно* относительно v, то показать, что K гензелево. (В обозначениях условия (H) гл. III, § 4, упражнение 3, пусть $\mathscr{P}$ — это множество простых идеалов кольца A, (совершенно) упорядоченное по включению, а $\mathfrak{L}$ — это множество пар $(\mathscr{B},\varphi)$, где $\mathscr{B}$ — вполне упорядоченное подмножество в $\mathscr{P}$ (в смысле отношения $\supset$) и $\varphi\colon\mathfrak{p}\to(Q_\mathfrak{p},Q'_\mathfrak{p})$ — отображение из $\mathscr{B}$ в множество $A[X]\times A[X]$, обладающее следующими свойствами: 1° $Q_\mathfrak{p}$ и $Q'_\mathfrak{p}$ унитарны и имеют степени $\deg(\overline{Q})$ и $\deg(\overline{Q'})$ соответственно; 2° если $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{q}$ — два элемента из $\mathscr{B}$, то коэффициенты многочленов $Q_\mathfrak{p}-Q_\mathfrak{q}$ и $Q'_\mathfrak{p}-Q'_\mathfrak{q}$ принадлежат $\mathfrak{p}$; 3° коэффициенты многочлена $P-Q_\mathfrak{p}Q'_\mathfrak{p}$ принадлежат $\mathfrak{p}$; 4° $\overline{f}(Q_\mathfrak{p})=\overline{Q}$, $\overline{f}(Q'_\mathfrak{p})=\overline{Q}'$. Определим на $\mathfrak{L}$ отношение порядка, положив $(\mathscr{B},\varphi)\leqslant(\mathscr{B}',\varphi')$, когда $\mathscr{B}\subset\mathscr{B}'$ и φ' продолжает φ на $\mathscr{B}'$.

Доказать, что $\mathfrak{L}$ обладает максимальным элементом $(\mathscr{B}_0, \varphi_0)$ и что $\mathscr{B}_0$ имеет последний элемент, равный (0); для этого надо рассуждать от противного, рассматривая два случая соответственно тому, имеет $\mathscr{B}_0$ последний элемент или нет; в первом случае, если $\mathfrak{p}$ — этот последний элемент, рассмотреть такой элемент $c \in A$, что $v(c)$ является наименьшим значением, принимаемым нормированием v на множестве коэффициентов многочлена $P - Q_{\mathfrak{p}}Q'_{\mathfrak{p}}$, а также наименьший простой идеал $\mathfrak{p}'$ кольца A, содержащий c; когда $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$, воспользоваться упражнением 2а) § 4 и тем фактом, что фактормодуль линейно компактного модуля по замкнутому подмодулю линейно компактен, а потому полон. Если же, напротив, $\mathscr{B}_0$ не имеет последнего элемента, то воспользоваться непосредственно предложением о том, что A линейно компактно.)

г) В обозначениях упражнения 5 показать следующее: для того чтобы A было гензелевым, необходимо и достаточно, чтобы A' и A'' также были гензелевыми. (Заметить, что если $P \in A'[X]$, то существует такой элемент $a \in A$, что $a^n P(X/a) \in A[X]$ (где n есть степень многочлена P); для проверки аксиомы (H) из упражнения 3 гл. III, § 4, применительно к A' можно, следовательно, ограничиться многочленами из $A[X]$; воспользоваться тем фактом, что $A' = A_{\mathfrak{p}}$, где $\mathfrak{p}$ — некоторый простой идеал в A, содержащийся в максимальном идеале $\mathfrak{m}$, и заметить, что если два многочлена из $(A/\mathfrak{p})[X]$ сильно взаимно просты, то таковы же и их образы в $(A/\mathfrak{m})[X]$.)

д) Предположим, что кольцо A гензелево; тогда для любого расширения L поля K существует (с точностью до эквивалентности) лишь одно нормирование на L, продолжающее v. (Если $P \in A[X]$ — унитарный неприводимый многочлен, x_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ — различные корни многочлена P в его поле корней N, то показать, что для любого нормирования v' на N, продолжающего v, все $v'(x_i)$ равны при $1 \leqslant i \leqslant m$.) Обратно, если кольцо нормирования A обладает этим свойством, то оно гензелево (заметить, что в целом замыкании A' кольца A в поле L может существовать лишь один максимальный идеал, лежащий над $\mathfrak{m}$ (гл. V, § 1, упражнение 13), и заключить отсюда, что если $P \in A[X]$ — унитарный неприводимый многочлен, то его образ в $(A/\mathfrak{m})[X]$ не может быть равен произведению двух взаимно простых многочленов).

7) Пусть K — поле, v — нормирование на K, A — кольцо нормирования v и $\mathfrak{m}$ — идеал нормирования v. Предположим, что A гензелево. Пусть L — расширение поля K степени n; пусть v' — единственное нормирование на L, которое продолжает v (упражнение 6д)), A' — его кольцо и $\mathfrak{m}'$ — его идеал. Пусть x — произвольный элемент из A'. Показать, что степень над полем $A/\mathfrak{m}$ класса $\bar{x}$ элемента x в $A'/\mathfrak{m}'$ является делителем числа n и что порядок класса элемента $v'(x)$ в $\Gamma_{v'}/\Gamma_v$ является делителем n (рассмотреть минимальный многочлен элемента x над K).

¶ 8) Пусть K' — поле, B — кольцо нормирования v на K', $\mathscr{G}$ — конечная группа автоморфизмов поля K', а K — подполе в K', образованное инвариантными относительно $\mathscr{G}$ элементами. Положим $A = K \cap B$, это кольцо нормирования для K, соответствующее нормированию $w = v \mid K$.

а) Нормирования на K', продолжающие w, — это нормирования $v \circ \sigma$, где $\sigma \in \mathscr{G}$ (n° 6, следствие 1 предложения 6), и целое замыкание A' кольца A в K' является пересечением колец $\sigma \cdot B$, где σ пробегает группу $\mathscr{G}$. Если $\mathfrak{p}(B)$ — пересечение кольца A' и максимального идеала $\mathfrak{m}(B)$, то $\sigma \cdot \mathfrak{p}(B) = \mathfrak{p}(\sigma \cdot B)$. Показать, что группа разложения $\mathscr{G}^Z(\mathfrak{p}(B))$ (гл. V, § 2, n° 2) является подгруппой в $\mathscr{G}$, образованной такими σ, что $\sigma \cdot B = B$. Положим $\mathscr{G}^Z = \mathscr{G}^Z(\mathfrak{p}(B))$ и обозначим через K^Z подполе в K', образованное инвариантными относительно $\mathscr{G}^Z$ элементами, а через B^Z — кольцо нормирования, индуцированного на K^Z нормированием v; это последнее кольцо равно $B \cap K^Z$.

Напомним, что поля вычетов колец B^Z и A совпадают и что максимальный идеал $\mathfrak{m}(B^Z)$ совпадает с идеалом $\mathfrak{m}(A)B^Z$ (гл. V, § 2, п° 2, предложение 4).

б) Обозначим через v^Z ограничение нормирования v на поле K^Z, через Γ и Γ^Z — группы порядков нормирований w и v^Z. Показать, что $\Gamma = \Gamma^Z$. (Пусть $\mathscr{G}^D \supset \mathscr{G}^Z$ — подгруппа в $\mathscr{G}$, образованная такими $\sigma \in \mathscr{G}$, что кольцо $\sigma \cdot B$ зависит от кольца B (§ 7, п° 2). Рассуждать с помощью индукции по порядку группы $\mathscr{G}$. Если $(\mathscr{G} : \mathscr{G}^D) > 1$, то пусть K'' — поле инвариантов группы $\mathscr{G}^D$, $A'' = K'' \cap B$; показать, что группа порядков нормирования $v \mid K''$ равна Γ; для этого, используя теорему об аппроксимации (§ 7, п° 2, теорема 1), доказать, что для любого $x \in K''$ существует такой элемент $y \in K''$, что $v(y) = v(x)$ и $v(y_i) = 0$ для всех элементов y_i, сопряженных с y относительно K и *отличных* от y; после этого можно заменить $\mathscr{G}$ на $\mathscr{G}^D$ и воспользоваться предположением индукции. Если $\mathscr{G}^D = \mathscr{G}$, то пусть B_0 — кольцо нормирования поля K', порожденное кольцами $\sigma \cdot B$, где $\sigma \in \mathscr{G}$; пусть $\overline{K}' = \kappa(B_0)$ — его поле вычетов, π: $B_0 \to \overline{K}'$ — канонический гомоморфизм, $\overline{B} = \pi(B)$ — кольцо нормирования поля $\overline{K}'$, $\bar{v}$ — соответствующее нормирование на $\overline{K}'$, для которого $v = \bar{v} \circ \pi$ в B_0, так что группа порядков $\overline{\Delta}$ нормирования $\bar{v}$ является подгруппой группы порядков Δ нормирования v; если $\Delta_0 = \Delta/\overline{\Delta}$ и если ϖ: $\Delta \to \Delta_0$ — канонический гомоморфизм, то $v_0 = \varpi \circ v$ есть нормирование на K', соответствующее B_0 и инвариантное относительно $\mathscr{G}$. С помощью перехода к факторкольцу группа $\mathscr{G}$ определяет группу автоморфизмов $\overline{\mathscr{G}}$ поля $\overline{K}'$; пусть $\mathscr{N}$ — ядро канонического гомоморфизма $\mathscr{G} \to \overline{\mathscr{G}}$. Показать, что $\mathscr{N} \subset \mathscr{G}^Z$, и вывести отсюда, что когда $\mathscr{N} \neq \{e\}$, то можно заменить $\mathscr{G}$ на $\mathscr{G}/\mathscr{N}$ и применить предположение индукции. Наконец, предположим, что $\mathscr{N} = \{e\}$. Пусть $A_0 = K \cap B_0$, w_0 — ограниченне нормирования v_0 на K; показать, что группа порядков нормирования w_0 равна Δ_0 и что $\pi(A_0) = \overline{K}$ есть поле инвариантов группы $\overline{\mathscr{G}}$ (ср. п° 1, лемма 2); если $\bar{w}$ — ограничение нормирования $\bar{v}$ на $\overline{K}$ и $\overline{\Gamma}$ — его группа порядков, то Δ_0, следовательно, канонически изоморфна группе $\Gamma/\overline{\Gamma}$. С другой стороны, группа $\overline{\mathscr{G}}^Z(\mathfrak{p}(B))$ является каноническим образом группы $\overline{\mathscr{G}}^Z(\mathfrak{p}(B))$ в $\overline{\mathscr{G}}$; заметить, что $\overline{\mathscr{G}}^D \neq \overline{\mathscr{G}}$ и что можно поэтому применить предположение индукции для доказательства того, что $\overline{\Gamma}$ равна группе порядков $\overline{\Gamma}^Z$ ограничения нормирования $\bar{v}$ на $\overline{K}^Z$.)

в) Пусть $\mathscr{G}^T = \mathscr{G}^T(\mathfrak{p}(B))$ — группа инерции идеала $\mathfrak{p}(B)$ (гл. V, § 2, п° 2); обозначим через K^T подполе в K', образованное инвариантами относительно $\mathscr{G}^T$, через B^T — кольцо нормирования на K^T, индуцированного нормированием v; это кольцо равно $B \cap K^T$. Напомним, что если k и k' — поля вычетов колец A и B, то поле вычетов k^T кольца B^T равно наибольшему сепарабельному расширению поля k, содержащемуся в расширении типа Галуа k' поля k, и что группа $\mathscr{G}^Z/\mathscr{G}^T$ канонически изоморфна группе k-автоморфизмов поля k' (или k^T) (гл. V, § 2, теорема 2 и предложение 5). Пусть v^T — ограниченне нормирования v на K^T. Показать, что группа порядков нормирования v^T снова равна группе Γ (применить лемму 2 п° 1 к расширению K^T поля K^Z).

9) Пусть K — поле, L — алгебраическое расширение конечной степени поля K, v' — нормирование поля L, A' — его кольцо, v — ограничение на K нормирования v' и $A = A' \cap K$ — его кольцо.

а) Предположим, что кольцо A — гензелево (упражнение 6). Показать, что произведение $e(v/v)f(v'/v)$ делит $n = [L : K]$, а частное $n/e(v'/v)f(v'/v)$

представляет собой степень характеристической экспоненты поля вычетов k нормирования v. (Свести доказательство к случаю, когда L является расширением Галуа поля K; воспользоваться упражнениями 6д) и 7, а также теоремой 2 и предложением 5 гл. V, § 2.)

б) Предположим, кроме того, что n не делится на характеристическую экспоненту поля вычетов k нормирования v и что $f(v'/v)=1$. Показать, что для каждого целого числа m, равного порядку некоторого элемента γ нз группы $\Gamma_{v'}/\Gamma_v$, существует такой элемент $x\in L$, что класс $v'(x)\pmod{\Gamma_v}$ равен γ и $x^m\in K$.

¶ 10) Пусть w есть 2-адическое нормирование на 2-адическом поле $\mathbf{Q}_2$; на поле рациональных дробей $\mathbf{Q}_2(X)$ рассмотрим дискретное нормирование v, продолжающее w и такое, что

$$v(a_0+a_1X+\ \dots\ a_nX^n)=\inf_i(w(a_i))$$

(§ 10, n° 1, лемма 1); пусть K — пополнение поля $\mathbf{Q}_2(X)$ относительно этого нормирования; обозначим снова через v нормирование этого поля. Пусть L — поле корией многочлена $(Y^2-X^2)^2-2$ из $K[Y]$, и пусть v' — единственное нормирование на L, продолжающее v. Показать, что $[L:K]=8$, $e(v'/v)=4$, $f(v'/v)=2$; если k (соответственно k') — поле вычетов нормирования v (соответственно v'), то k' является радикальным расширением поля k степени 2. Показать, что не существует никакого подрасширения E в L, для которого $[E:K]=2$ и поле вычетов ограничения нормирования v' на E равно k'. (В противном случае обязательно $E=K(\sqrt{\alpha})$, где $\alpha\in K$ не является квадратом в K, но $\alpha\equiv X\pmod 2$; выразить $\sqrt{\alpha}$ через подходящий базис поля L над полем $K(\sqrt{2})$ и заметить, что в $K(\sqrt{2})$ не существует элемента, квадрат которого был бы сравним с $X\pmod 2$.)

¶ 11) Пусть K — поле, L — его расширение Галуа конечной степени и $\mathscr{G}$ — группа Гаула этого расширения. Пусть v — нормирование на L с полем вычетов k и группой порядков Γ. Предположим, что v инвариантно относительно $\mathscr{G}$ и что ограничение $v\mid K$ имеет то же поле вычетов k, что и v, так что $\mathscr{G}=\mathscr{G}^Z=\mathscr{G}^T$ (обозначения взяты из упржнения 8).

а) Пусть $x\in L^*$, $\sigma\in\mathscr{G}$. Показать, что элемент $x^{-1}\sigma(x)$ является единицей относительно v, что его образ $\varepsilon_\sigma(x)$ в k^* зависит от нормирования $v(x)$ и класса σ по модулю коммутанта $\mathscr{G}'$ группы $\mathscr{G}$ и что тем самым определяется $\mathbf{Z}$-билинейное отображение (обозначаемое снова через ε) $(\mathscr{G}/\mathscr{G}')\times\Gamma\to k^*$, равное 1 на $(\mathscr{G}/\mathscr{G}')\times v(K^*)$.

б) Для любого $\sigma\in\mathscr{G}$ пусть $\varphi(\sigma)$ — гомоморфизм $\Gamma/v(K^*)\to k^*$, сопоставляющий $\varepsilon_\sigma(x)$ элементу $v(x)$ для всякого $x\in L^*$. Таким образом определяется гомоморфизм φ: $\mathscr{G}\to\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Gamma/v(K^*),k^*)$. Показать, что если p — характеристическая экспонента поля k, то ядро $\mathscr{N}$ гомоморфизма φ имеет порядок, равный некоторой степени числа p. (В противном случае существовал бы элемент $\sigma\neq e$ в $\mathscr{N}$ и простое число $q\neq p$, такие, что $\sigma^q=e$; для любого целого x из $L-K$ имеет место равенство $\sigma(x)=x+y$, где $v(y)>v(x)$; после этого надо вычислить $\sigma^q(x)$, чтобы получить противоречие.) Вывести отсюда, что $\mathscr{G}$ является *разрешимой* группой.

в) Предположим, что $n=[L:K]$, и пусть это число не делится на p. Показать, что гомоморфизм φ биективен, что $e(L/K)=n$ и что если ν обозначает наименьшее общее кратное порядков элементов в $\mathscr{G}$, то k^* содержит корни ν-й степени из единицы. (Воспользоваться пунктом б) и леммой 2 из n° 1.)

¶ 12) Пусть K — поле, v — нормирование на K, A — кольцо нормирования v и Γ — группа его порядков.

а) Пусть $f(X)=a_0X^n+a_1X^{n-1}+\ \dots\ +a_n$ — многочлен из $A[X]$, для которого $v(a_0)=0$ и все корни которого принадлежат K; пусть x_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ —

все эти различные корни, и пусть k_i — кратность корня x_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Пусть

$$g(X) = b_0X^n + b_1X^{n-1} + \ldots + b_n = b_0(X - y_1)\ldots(X - y_n)$$

— второй многочлен из $A[X]$, для которого $v(b_0) = 0$ и корни y_h которого принадлежат K. Показать, что существует элемент $\lambda_0 \in \Gamma$, удовлетворяющий следующим условиям: $v(x_i - x_j) < \lambda_0$ для любой пары различных индексов i, j и для любого $\lambda \geqslant \lambda_0$ существует такой элемент $\mu \geqslant \lambda$, что из соотношений $v(a_i - b_i) \geqslant \mu$ для всех i следует, что при $1 \leqslant i \leqslant r$ имеется точно k_i индексов h, для которых $v(x_i - y_h) \geqslant \lambda$. (Сначала подсчитать двумя способами $v(f(y_h))$, чтобы показать, что $v(x_i - y_h) \geqslant \lambda$ хотя бы для одного индекса i; затем вычислить $v\left(\dfrac{f'(z)}{f(z)} - \dfrac{g'(z)}{g(z)}\right)$ в подходящих точках $z \in K$.) Если, кроме того, $b_i = a_i$, за исключением $i = n - 1$, то показать, что когда λ_0 достаточно велико, все элементы y_h различны (подсчитать $f'(y_h)/f(y_h)$, предполагая, что y_h не является простым корнем многочлена g).

б) В дальнейшем предполагается, что K является алгебраическим замыканием такого подполя K_0, что кольцо $A_0 = A \cap K_0$ *гензелево*. Предположим, что многочлен f принадлежит кольцу $A_0[X]$ и является *неприводимым и сепарабельным* над K_0. Пусть $z \in K$ — такой элемент, что $v(z - x_i) > v(z - x_j)$ для любого $j \neq i$. Показать, что тогда $K_0(x_i) \subset K_0(z)$. (Показать, что $z - x_i$ равен всем элементам, сопряженным с ним над $K_0(x_i)$.)

в) Предположим, что многочлен $f \in A_0[X]$ *сепарабелен*, и пусть $f = a_0 \prod_{i=1}^{r} f_i$ — разложение многочлена f на унитарные неприводимые многочлены в $K_0[X]$ (которые принадлежат $A_0[X]$; ср. гл. V, § 1, n° 3, предложение 11). Показать (в обозначениях из пункта а)), что если μ достаточно велико, то разложение многочлена g на унитарные неприводимые множители в $K_0[X]$ может быть записано в виде $b_0 \prod_{i=1}^{r} g_i$, где для любого i многочлен g_i имеет ту же степень, что и f_i (о таком разложении говорят, что оно „того же типа“, что и разложение f), и, кроме того, поля корней многочленов f_i и g_i совпадают при каждом i. (Показать сначала, что многочлен g сепарабелен; после этого рассмотреть расширение Галуа конечной степени поля K_0, содержащее корни многочленов f и g и проанализировать способ, которым группа Галуа рассматриваемого расширения переставляет эти корни. После этого воспользоваться пунктом б).)

г) Привести пример, когда f неприводим, но несепарабелен и когда для любого $\mu \geqslant \lambda_0$ существует многочлен

$$g(X) = b_0X^n + b_1X^{n-1} + \ldots + b_n \in A_0[X],$$

у которого $v(a_i - b_i) \geqslant \mu$ при любом i и который не является неприводимым (взять такое K_0, что $K \neq K_0$ и K есть радикальное расширение поля K_0).

¶ 13) а) Пусть K — поле, v — нормирование на K, не являющееся несобственным. Пусть E — множество, фильтрующееся по ультрафильтру $\mathfrak{U}$, и $\xi \to x_\xi$, $\xi \to y_\xi$ — два отображения из E в поле K, наделенное топологией $\mathscr{T}_v$. Показать, что если отображение $\xi \to x_\xi y_\xi$ сходится к 0 в K по фильтру $\mathfrak{U}$, то таково же и одно из отображений $\xi \to x_\xi$, $\xi \to y_\xi$. (Заметить, что если $\xi \to x_\xi$ не имеет предельного значения по $\mathfrak{U}$, то отображение $z \to x_\xi^{-1}$ ограничено на некотором множестве фильтра $\mathfrak{U}$.)

б) Пусть f — непостоянный многочлен из $K[X]$. Показать, что если $\xi \to f(x_\xi)$ сходится к 0 в K по фильтру $\mathfrak{U}$, то $\xi \to x_\xi$ сходится в $\widehat{K}$ (разложить f на множители в алгебраическом расширении поля K и применить упражнение а).

в) Предположим, что K алгебраически замкнуто в $\widehat{K}$. Тогда отображение $x \to f(x)$ поля K в себя замкнуто (воспользоваться пунктом б)). Вывести отсюда, что если g — рациональная дробь из $K(X)$ и B — замкнутое и ограниченное подмножество в K, то $g(B-P)$ (где P — множество полюсов функции g в B) замкнуто в K.

г) Предположим, что алгебраическое замыкание поля K является радикальным расширением поля K. Показать, что тогда $\widehat{K}$ алгебраически замкнуто. (Применить б) к алгебраическому замыканию поля $\widehat{K}$ и многочлену $f \in \widehat{K}[X]$; воспользоваться также упражнением 12а).)

¶ 14) а) Для того чтобы поле K было гензелевым относительно нормирования v, необходимо и достаточно, чтобы K было наибольшим сепарабельным алгебраическим расширением поля K, содержащимся в $\widehat{K}$, и чтобы гензелевым было само $\widehat{K}$. (Для доказательства необходимости условия воспользоваться упражнением 12б); для доказательства достаточности заметить, что для проверки условия (H) из упражнения 3 гл. III, § 4, можно ограничиться случаем, когда P сепарабелен над K, учитывая при этом, что если Q — неприводимый множитель многочлена P в кольце $\widehat{K}[X]$, степень Q^{p^e} которого принадлежит $K[X]$, то Q представляет собой наибольший общий делитель P и Q^{p^e} в $\widehat{K}[X]$.) Рассмотреть случай, когда v является нормированием высоты 1 (ср. упражнение 6б)).

б) Вывести из пункта а), что в p-адическом поле $\mathbf{Q}_p$ содержится счетное подполе, которое гензелево относительно p-адического нормирования.

в) Привести пример поля K, гензелева относительно некоторого дискретного нормирования, не полного и такого, что $\widehat{K}$ является радикальным расширением конечной степени поля K (ср. гл. V, § 1, упражнение 20).

¶ 15) а) Пусть K — поле, v_1, v_2 — два независимых нормирования (§ 7, п°2) на K и K_1, K_2 — пополнения поля K относительно v_1 и v_2 соответственно. Пусть L_1, L_2 — такие два поля, что $K \subset L_1 \subset K_1$, $K \subset L_2 \subset K_2$, и предположим, что эти два поля являются гензелевыми (относительно продолжений по непрерывности нормирований v_1 и v_2 соответственно). Пусть $g_1 \in L_1[X]$, $g_2 \in L_2[X]$ — два сепарабельных многочлена одной и той же степени n. Показать, что существует многочлен $h \in K[X]$, который в $L_i[X]$ имеет тот же тип разложения (упражнение 12 в)), что и g_i $(i = 1, 2)$. (Свести к случаю, когда g_1 и g_2 лежат в $K[X]$ и унитарны; рассмотреть многочлен $a^n g_1(X/a) + b^n g_2(X/b) - X^n$, где $v_1(a) \leqslant 0$, $v_2(a) > 0$ произвольно велико и $v_1(b) > 0$ произвольно велико.)

б) Вывести из пункта а), что если K гензелево относительно v_1, то алгебраическое замыкание поля L_2 радикально над L_2 и K_2 алгебраически замкнуто (взять g_2 неприводимым и $g_1 \in K(X)$ равным произведению n различных множителей первой степени).

в) Вывести из пункта б), что если K гензелево относительно v_1 и v_2, то алгебраическое замыкание поля K радикально над K.

г) Показать, что если K гензелево относительно дискретного нормирования v, то алгебраическое замыкание поля K не может быть радикальным над K и, следовательно, K не может быть гензелевым относительно какого бы то ни было нормирования, независимого от v (воспользоваться упражнением 12 из *Алгебры*, гл. V, § 11).

16) Пусть K — поле, гензелево относительно некоторого нормирования v высоты 1. Если L — сепарабельное алгебраическое расширение поля K *бесконечной* степени, то показать, что L не может быть полным относи-

тельно нормирования, продолжающего v (и снова обозначаемого через v). (Построить такую последовательность (x_p) элементов из L, что степень n_p элемента x_p относительно K стремится к $+\infty$ и при этом значение $v(x_{p+1}-x_p)$ строго больше нормирований разностей элемента x_p и сопряженных с ним над K; используя упражнение 12б), показать, что последовательность (x_p) является последовательностью Коши, не сходящейся в E.)

¶ 17) Пусть K — поле, гензелево относительно некоторого нормирования v и являющееся алгебраически замкнутым, а L — такое подполе в K, что степень $[K:L]$ конечна. Показать, что при этих условиях L является гензелевым относительно ограничения нормирования v. (В противном случае существовали бы два продолжения v_1, v_2 нормирования $v|L$ на алгебраическое замыкание Ω поля K, ограничения которых на некоторое алгебраическое расширение L' поля L конечной степени были бы неэквивалентными. Отсюда можно вывести, что тогда на надлежаще выбранном расширении типа Галуа K' поля L, содержащем K и имеющем конечную степень над L, существовали бы два неэквивалентных нормирования v_1', v_2', относительно которых K' было бы гензелевым. Используя упражнение 15в), показать, что если $E=L^{p^{-\infty}}$ (p — характеристическая экспонента поля Ω), то $E\neq\Omega$, но Ω — расширение конечной степени поля E; закончить доказательство с помощью упражнения 31 из *Алгебры*, гл. VI, § 2).

¶ 18) Пусть K — гензелево поле относительно некоторого нормирования v, k — поле вычетов нормирования v, и пусть всякое алгебраическое расширение конечной степени поля k *циклично* над k (это так, например, когда поле k конечно). Пусть A — кольцо нормирования v и $f\in A[X]$ — такой унитарный многочлен, что если $f(X)=(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_n)$, где α_i принадлежнт алгебраическому замыканию поля K, то элемент $D=\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2$ из A („дискриминант" многочлена f) удовлетворяет равенству $v(D)=0$. Пусть $\bar{f}_j$ $(1\leqslant i\leqslant s)$ — неприводимые множители канонического образа $\bar{f}$ многочлена f в кольце $k[X]$, и пусть r_j — степень многочлена $\bar{f}_j$. Показать, что группа Галуа поля корней многочлена f над полем K, рассматриваемая как группа перестановок элементов α_i, порождена единственной перестановкой σ, которая разлагается в циклы длины $r_1, r_2, \dots, r_s$ соответственно (заметить, что существует единственное с точностью до k-изоморфизма расширение поля k заданной степени). Вывести отсюда такое утверждение: для того чтобы элемент D был *квадратом* в A, необходимо и достаточно, чтобы число $n-s$ было четным (*теорема Штикельбергера*; выяснить, при каких условиях элемент $\sqrt{D}$ инвариантен относительно σ).

19) Пусть K — поле, гензелево относительно некоторого нормирования v. Пусть E — векторное пространство конечной размерности над K, Q — некоторая невырожденная квадратичная форма на E, для которой равенство $Q(x)=0$ влечет за собой $x=0$. Пусть $\Phi(x,y)=Q(x+y)-Q(x)-Q(y)$ — ассоциированная билинейная форма. Показать, что $2v(\Phi(x,y))\geqslant v(Q(x))+v(Q(y))$; вывести отсюда, что

$$v(Q(x+y))\geqslant \inf(v(Q(x)),\ v(Q(y))).$$

¶ 20) Пусть K — поле характеристики $\neq 2$, гензелево относительно некоторого нормирования v; пусть $\xi\to\bar{\xi}$ — такой инволютивный автоморфизм поля K, что $v(\bar{\xi})=v(\xi)$, и пусть Φ — невырожденная эрмитова форма на векторном пространстве E конечной размерности над K.

а) Пусть $U=(\alpha_{ij})$ — матрица формы Φ относительно некоторого базиса (e_i) пространства E. Доказать существование такого элемента λ группы порядков нормирования v, что если Φ' — вторая эрмитова форма на E,

матрица которой $U' = (\alpha'_{ij})$ относительно (e_i) удовлетворяет условиям $v(\alpha_{ij} - \alpha'_{ij}) > \lambda$ при любой паре (i, j), то Φ и Φ' эквивалентны. (Рассуждать так же, как в упражнении 6 *Алгебры*, гл. IX, § 6, используя приведенное выше упражнение 14а).)

б) Предположим, что отображение $\xi \to \xi$ тождественное (следовательно, форма Φ симметрическая) и что нормирование v дискретно, нормировано и $v(2) = 0$; пусть π — униформизирующая для v. Показать, что Φ характеризуется с точностью до эквивалентности своим индексом ν и двумя симметрическими билинейными формами Ψ_1, Ψ_2 *индекса* 0 на векторных пространствах k^r и k^s соответственно, где k — поле вычетов нормирования v и $r + s = n - 2$. (С помощью разложения Витта свести доказательство к случаю, когда Φ имеет индекс 0; с помощью упражнения 19 показать, что для любого $i \geqslant 0$ множество M_i таких $x \in E$, что $v(\Phi(x, x)) \geqslant i$, является модулем над кольцом A нормирования v. Показать, что если $x \in M_i$, $y \in M_{i+1}$, то $v(\Phi(x, y)) \geqslant i + 1$, и с помощью перехода к фактормодулям получить из Φ симметрические билинейные формы на векторных k-пространствах M_0/M_1 и M_1/M_2. Воспользоваться далее упражнением 6в) из § 3 и тем фактом, что уравнение $\xi^2 = \alpha$ имеет решение в A при $\alpha \equiv 1 \pmod{\pi}$.) Рассмотреть случай, когда k конечно (ср. *Алгебра*, гл. IX, § 6, упражнение 4).

21) Пусть K — поле, v — дискретное нормирование на K, A — кольцо нормирования v, π — униформизирующая для v и k — поле вычетов нормирования v.

а) Пусть P, R — два многочлена из $A[X]$, причем P унитарен; предположим, что $1°$ $\deg(R) < h \cdot \deg(P)$, где $h \geqslant 1$ — некоторое целое число; $2°$ канонический образ $\overline{P}$ многочлена P в кольце $k[X]$ неприводим. Показать, что если многочлен $Q = P^h + \pi R$ приводим в $\hat{K}[X]$, то $h > 1$ и $\overline{P}$ делит канонический образ $\overline{R}$ многочлена R в кольце $k[X]$. Вывести отсюда, что для любого заданного унитарного неприводимого многочлена $r(X) \in k[X]$ и любого заданного целого числа $h \geqslant 1$ существует такой неприводимый и сепарабельный многочлен $Q \in A[X]$, что его канонический образ $\overline{Q}$ равен r^h.

б) Пусть $k' = k(\alpha)$ — алгебраическое расширение поля k степени m и h — целое число $\geqslant 1$. Показать, что существует алгебраическое расширение L поля K степени hm, на котором имеется только одно (с точностью до эквивалентности) нормирование v', продолжающее v, причем $e(v'/v) = h$, $f(v'/v) = m$ и поле вычетов нормирования v' изоморфно k' (воспользоваться пунктом а)).

22) а) Показать, что если на поле K существует дискретное нормирование, то алгебраическое замыкание поля K имеет над K бесконечную степень.

б) Пусть K — расширение конечного типа некоторого поля K_0. Показать, что если K не алгебраично над K_0, то существует такое дискретное нормирование v на K, что $v(x) = 0$ в K_0.

§ 9. Приложение: локально компактные тела

1. Функция модуля на локально компактном теле

Пусть K — локально компактное тело. Напомним, что мы определили (*Интегрирование*, гл. VII, § 1, n° 10, определение 6) функцию mod (или mod_K) на K следующим образом: $\mathrm{mod}_K(0) = 0$ и для $x \neq 0$ из K число $\mathrm{mod}_K(x)$ равно модулю автоморфизма $y \to xy$ аддитивной группы тела K.

Предложение 1. *Если K — локально компактное тело, то функция mod_K принадлежит множеству $\mathscr{V}(K)$* (§ 6, n° 1). *Кроме того,*

(i) *если $s>0$ — такое число, что $(\mathrm{mod}_K)^s = g$ является абсолютным значением, то g определяет топологию тела K;*

(ii) *если тело K недискретно и если mod_K является ультраметрическим абсюлютным значением, то существует нормированное дискретное нормирование v на K, кольцо которого компактно, а поле вычетов конечно и состоит из q элементов, так что $\mathrm{mod}_K = q^{-v}$. Топология тела K определяется нормированием v.*

Это следует из предложения 1, § 6, n° 1, и предложения 2, § 5, n° 1, и из предложений 12 и 13 в *Интегрировании*, гл. VII, § 1, n° 10.

Предложение 2. *Пусть K, K' — два локально компактных тела, причем K является топологическим подтелом в K' и K недискретно. Тогда:*

(i) *Тело K' представляет собой левое* (соответственно *правое*) *векторное пространство конечной размерности над K.*

(ii) *Если K содержится в центре тела K', то для любого $x \in K'$*

$$\mathrm{mod}_{K'}(x) = \mathrm{mod}_K(N_{K'/K}(x)). \tag{1}$$

Действительно, поскольку K представляет собой недискретное полное нормированное тело, утверждение (i) следует из теоремы 3в) в *Топологических векторных пространствах*, гл. I, § 2, n° 4, а утверждение (ii) представляет собой не что иное, как предложение 17 из *Интегрирования*, гл. VII, § 1, n° 11.

Следствие 1. *Всякое локально компактное тело, центр которого недискретен, имеет конечный ранг над своим центром.*

Действительно, центр Z локально компактного тела K замкнут в K, а потому локально компактен.

Следствие 2. *Пусть K' — локально компактное тело и K — замкнутое подтело в K'. Если K' является левым* (соответственно *правым*) *векторным пространством конечной размерности n над K, то*

$$\mathrm{mod}_{K'}(x) = (\mathrm{mod}_K(x))^n \text{ для любого } x \in K. \tag{2}$$

Действительно, в общем случае известно, что в векторном пространстве (левом или правом) конечной размерности n над K гомотетия умножения на $x \in K$ имеет модуль, равный числу $(\mathrm{mod}_K(x))^n$; достаточно применить это к K'.

2. Существование представителей

Предложение 3. *Пусть K — недискретное локально компактное тело, топология на котором определена некоторым дискретным нормированием v. Пусть A — кольцо и $\mathfrak{m}$ — идеал нормирования v; положим* $\mathrm{Card}\,(A/\mathfrak{m}) = q = p^f$ *(p — простое число). Тогда существует система представителей S поля вычетов $A/\mathfrak{m}$ в кольце A и униформизирующая и для v, такие, что $0 \in S$, причем $S^* = S \cap K^*$ является циклической подгруппой в K^* и $u^{-1}Su = S$. Кроме того, любой элемент из A единственным образом записывается в виде $\sum_{i=0}^{\infty} s_i u^i$, где $s_i \in S$.*

Мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма 1. *Пусть x, y — два таких коммутирующих элемента из A, что $x - y \in \mathfrak{m}^j$ ($j \geqslant 1$). Тогда $x^{p^n} - y^{p^n} \in \mathfrak{m}^{j+n}$ при любом целом $n \geqslant 0$.*

Индукцией по n доказательство сводится к случаю $n = 1$. Тогда $x^p - y^p = (x-y)(x^{p-1} + x^{p-2}y + \ldots + y^{p-1})$; второй сомножитель является суммой p членов, попарно сравнимых $\bmod \mathfrak{m}$; поскольку поле $A/\mathfrak{m}$ имеет характеристику p, в кольце A справедливо включение $p \cdot 1 \in \mathfrak{m}$; следовательно, $x^{p-1} + x^{p-2}y + \ldots + y^{p-1} \in \mathfrak{m}$, откуда $x^p - y^p \in \mathfrak{m}^{j+1}$.

Известно, что мультипликативная группа $(A/\mathfrak{m})^*$ является циклической и состоит из $q-1$ элементов (*Алгебра*, гл. I, § 11, n° 1, теорема 1). Пусть x — представитель в кольце A образующей этой группы; следовательно, $x^q - x \in \mathfrak{m}$, откуда, в силу леммы 1, $x^{q^{n+1}} - x^{q^n} \in \mathfrak{m}^{1+fn}$, так как x^q и x перестановочны. Этим доказано, что $\left(x^{q^n}\right)_{n \geqslant 0}$ является последовательностью Коши в кольце A. Так как A компактно, оно полно, и эта последовательность имеет в A некоторый предел s, для которого, очевидно, имеет место сравнение $s \equiv x \pmod{\mathfrak{m}}$ и равенство $s^q = s$. Так как $s \neq 0$, то $s^{q-1} = 1$; точнее говоря, s является *примитивным корнем $(q-1)$-й степени из единицы* в A. Ясно, что множество S, образованное элементом 0 и степенями s^j $(0 \leqslant j \leqslant q-2)$, является *системой представителей* классов кольца $A \bmod \mathfrak{m}$ и что эта система *замкнута* относительно умножения.

Пусть теперь a — униформизирующая для нормирования v, и рассмотрим внутренний автоморфизм $y \to a^{-1}ya$ тела K; он отображает на себя кольцо A и идеал $\mathfrak{m}$, а поэтому при переходе к факторкольцам он определяет автоморфизм поля $A/\mathfrak{m}$; известно (*Алгебра*, гл. V, § 11, n° 4, предложение 5), что любой такой автоморфизм имеет вид $z \to z^{p^r}$, где $0 \leqslant r \leqslant f-1$. Следо-

вательно, $a^{-1}s^j a \equiv s^{jp^r} \pmod{\mathfrak{m}}$ при $0 \leqslant j \leqslant q-2$; поскольку $a \in \mathfrak{m}$ и $s \notin \mathfrak{m}$, из этого следует, что $s^{-j}as^{jp^r} \equiv a \pmod{\mathfrak{m}^2}$.

Положим

$$u = \sum_{j=0}^{q-2} s^{-j}as^{jp^r}.$$

Имеем $u \equiv (q-1)\,a \equiv -a \pmod{\mathfrak{m}^2}$, ибо $p \cdot 1 \in \mathfrak{m}$; отсюда мы заключаем, что u также является униформизирующей для v; кроме того,

$$s^{-1}us^{p^r} = u, \tag{3}$$

откуда получается, что $u^{-1}Su = S$.

Наконец, для любого элемента $x \in A$ существует, и притом единственная, последовательность (s_i) $(i \in \mathbf{N})$, в которой $s_i \in S$ при любом i и $x \equiv \sum_{i=0}^{n} s_i u^i \pmod{\mathfrak{m}^{n+1}}$ при любом $n \geqslant 0$. Это получается непосредственно индукцией по n, так как любой элемент t из $\mathfrak{m}^{n+1}$ удовлетворяет некоторому соотношению вида $t \equiv t'u^{n+1} \pmod{\mathfrak{m}^{n+2}}$, где t' — некоторый элемент из S, определяемый единственным образом. Следовательно, $x = \sum_{i=0}^{\infty} s_i u^i$ и семейство (s_i), удовлетворяющее этому соотношению, таково, что $s_i \in S$ при любом i определяется однозначно.

3. *Структура локально компактных тел*

Пополнения $\mathbf{R}$ и $\mathbf{Q}_p$ поля $\mathbf{Q}$ относительно абсолютных значений на $\mathbf{Q}$, не являющихся несобственными (p — простое число), локально компактны. С другой стороны, для любой степени $q = p^f$ простого числа p поле $\mathbf{F}_q((T))$ формальных рядов над конечным полем $\mathbf{F}_q$, наделенное нормированием, которое было определено в примере 3 § 3, n° 4, *локально компактно*: действительно, максимальный идеал в кольце нормирования $\mathbf{F}_q[[T]]$ порождается элементом T; известно, что это кольцо полно относительно (T)-адической топологии (гл. III, § 2, n° 6, предложение 6) и, поскольку поле вычетов $\mathbf{F}_q$ конечно, предложение 2, § 5, n° 1, доказывает наше утверждение. Обратно,

Теорема 1. *Пусть K — недискретное локально компактное тело.*

(i) *Если K имеет характеристику 0 и если mod_K не является ультраметрическим абсолютным значением, то K изоморфно одному из тел* $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ *или* $\mathbf{H}$.

(ii) *Если K имеет характеристику 0 и если mod_K является ультраметрическим абсолютным значением, то K представляет собой алгебру конечного ранга над p-адическим полем $\mathbf{Q}_p$.*

(iii) *Если K имеет характеристику $p \neq 0$, то оно изоморфно телу, имеющему своим центром поле формальных рядов $\mathbf{F}_q((T))$ (где q — некоторая степень числа p) и ранг которого над этим центром конечен.*

(i) Из теоремы Островского (§ 6, n° 4, теорема 2) следует, что K является топологическим телом, изоморфным всюду плотному подтелу в $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или в $\mathbf{H}$; поскольку K полно, оно изоморфно $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$.

(ii) Пусть A — кольцо абсолютного значения mod_K и $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал. Известно, что $A/\mathfrak{m}$ является конечным полем (§ 5, n° 1, предложение 2); следовательно, абсолютное значение, индуцированное значением mod_K на $\mathbf{Q}$, имеет конечное поле вычетов, а это может быть лишь тогда, когда указанное абсолютное значение эквивалентно p-адическому абсолютному значению (§ 6, n° 3, предложение 4); замыкание поля $\mathbf{Q}$ в теле K, следовательно, изоморфно полю $\mathbf{Q}_p$ и содержится в центре тела K, ибо центр этот в K замкнут. Доказательство заканчивает предложение 2 n° 1.

(iii) Второе утверждение вытекает из первого и из следствия предложения 2 n° 2. Для доказательства же первого утверждения заметим, что mod_K обязательно является ультраметрическим абсолютным значением (§ 6, n° 2, следствие предложения 3); в обозначениях доказательства предложения 3 n° 2 центр Z тела K образован элементами, перестановочными одновременно с s и с u; но, в силу формулы (3),

$$u^{-q}su^q = s^{qp^r} = s,$$

так что $u^q \in Z$ и, следовательно, центр Z недискретен. Поскольку поле Z локально компактно, наше доказательство свелось к случаю, когда K *коммутативно*. В этом случае $\mathbf{F}_p$-подалгебра $\mathbf{F}_p[s]$ в K является конечным полем, так как $s^{q-1} = 1$, и, очевидно, $y^q = y$ для любого элемента этого поля, которое, следовательно, совпадает с S и изоморфно полю $\mathbf{F}_q$, так как $S \subset \mathbf{F}_q[s]$ имеет q элементов. Поскольку сумма двух любых элементов из S принадлежит S, отображение, сопоставляющее каждому формальному ряду $\sum_{i=0}^{\infty} s_i T^i \in \mathbf{F}_q[[T]]$ элемент $\sum_{i=0}^{\infty} s_i u^i$, является биективным гомоморфизмом кольца $\mathbf{F}_q[[T]]$ на кольцо A. Отсюда следует требуемое утверждение.

Следствие 1. *Всякое недискретное локально компактное тело имеет конечный ранг над своим центром.*

Следствие 2. *Всякое локально компактное тело связно или вполне несвязно. Если оно связно, то оно изоморфно* **R**, **C** *или* **H**.

Действительно, если топология на K определена ультраметрическим абсолютным значением, то K в этой топологии вполне несвязно.

Замечание. Пусть s — целое число >0. Подполе $\mathbf{F}_q((T^s)) = L$ поля $K = \mathbf{F}_q((T))$ замкнуто в K и $e(K/L) = s$, $f(K/L) = 1$. Мы, следовательно, видим, что существуют недискретные замкнутые подполя L поля K для которых $e(K/L)$ (и *тем более* степень $[K:L]$) является сколь угодно большим числом (в отличие от случая, когда поле локально компактно и имеет характеристику 0: здесь всякое локально компактное подполе L в таком поле K обязательно содержит $\mathbf{R}$ или $\mathbf{Q}_p$, так что в этом случае степень $[K:L]$ оказывается ограниченной).

Упражнения

1) а) Пусть K — тело, $\mathcal{T}$ — топология локально компактного пространства, на K, согласованная со структурой *кольца* на K. Показать, что $\mathcal{T}$ согласована и со структурой *тела* на K. (Воспользоваться теоремой Эллиса из *Topologie générale*, chap. X, § 3, exercice 25, или провести непосредственные рассуждения, обратившись к доказательствам из *Интегрирования*, гл. VII, § 1, n° 10, и доказательству предложения 1 из настоящего параграфа.)

б) Привести пример локально компактной топологии на каком-либо поле K, которая согласована со структурой аддитивной группы на K, но не согласована со структурой кольца на K. (Взять в качестве K поле частных компактного целостного кольца A (например, A — кольцо формальных рядов $k[[X, Y]]$, где k — конечное поле), а в качестве фундаментальной системы окрестностей нуля в K — окрестности нуля в кольце A.)

¶ 2) а) В пространстве $\mathbf{R}^n$ ($n \geqslant 2$) пусть U — непустое открытое множество, дополнение к которому также непусто; показать, что граница множества U содержит непустое совершенное миожество (ср. *Общая топология*, 1968, гл. 1, § 9, упражнение 17).

б) Вывести из упражнения а), что если A — всюду плотное подмножество в $\mathbf{R}^n$, пересекающее всякое совершенное множество в $\mathbf{R}^n$, то множество A связно.

в) Показать, что в **C** существует всюду плотное подполе K, *связное* и *локально связное* и представляющее собой *чисто трансцендентное* расширение поля **Q** (воспользоваться *Topologie générale*, chap. IX, 2e ed., § 5, exercice 18в) et c)); построение поля K проводится с помощью трансфинитной индукции, причем используется пункт б) и метод, описанный в *Theorie des ensembles*, chap. II, 2e ed., § 6, exercice 24). Вывести отсюда, что существует подполе $K' \supset K$ поля **C**, изоморфное (алгебраически) полю **R**, связное и локально связное.

г) Показать, используя упражнение в), что на **C** существует топология связного и локально связного пространства, согласованная со структурой поля, для которой пополнение поля **C** является алгеброй над **C**, представляющей собой прямой композит двух полей, изоморфных **C**.

3) Пусть K — вполне несвязное недискретное локально компактное поле; пусть A — кольцо абсолютного значения mod_K на K, и пусть U — группа единиц кольца A. Для любого целого $n>0$ обозначим через ${}_nU$ подгруппу корней n-й степени из единицы в K, а через U^n — подгруппу в U, образо-

ванную n-ми степенями элементов из U. Показать, что если n не делится на характеристику поля K, то U^n является открытой подгруппой в U и

$$\mathrm{Card}\,(U/U^n) = \mathrm{mod}_K\,(n) \cdot \mathrm{Card}\,({}_nU)$$

(использовать упражнение 14 из *Интегрирования*, гл. VII, § 2, упражнение 14) и следствие 1 теоремы 2 *Коммутативной алгебры*, гл. III, § 4, n° 6, для того чтобы показать, что если $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в A, то образ при отображении $x \to x^n$ множества $1 + \mathfrak{m}^k$ есть $1 + n \cdot \mathfrak{m}^k$, если k достаточно велико).

4) а) Пусть K — поле, v — нормирование на K, причем K гензелево относительно v (§ 8, упражнение 6). Предположим, кроме того, что K и поле вычетов k нормирования v имеют характеристику 0. Показать, что существует такое подполе K_0 кольца A нормирования v, что каноническое отображение $A \to k$, ограниченное на K_0, является изоморфизмом K_0 на k. (Пусть H — некоторое подполе в A и E — его образ при каноническом отображении в k; показать, что если $E \neq k$, то существует такой элемент $\alpha \notin H$ в A, что подполе $H(\alpha)$ в K содержится в A и канонически изоморфно подполю $E(\bar{\alpha})$, где $\bar{\alpha}$ — класс элемента α в k; рассмотреть два случая соответственно тому, будет $\bar{\alpha}$ алгебраическим или трансцендентным над E.)

б) Предположим, кроме того, что v является дискретным нормированием и что K полно относительно v; вывести из пункта а), что K изоморфно полю формальных рядов $k((T))$.

5) а) Пусть K — поле, v — нормирование высоты 1 на K, относительно которого K полно, и A — кольцо нормирования v. Предположим, кроме того, что поле вычетов k нормирования v совершенно и имеет характеристику $p > 0$. Для любого элемента $\xi \in k^*$ и любого целого числа n обозначим через x_n элемент из класса $\xi^{p^{-n}}$ в A; показать, что последовательность $\left(x_n^{p^n}\right)$ является подпоследовательностью Коши в A, предел которой не зависит от выбора элементов x_n в классах $\xi^{p^{-n}}$. Если этот предел обозначить через $\varphi(\xi)$, то показать, что φ является единственным изоморфизмом u мультипликативной группы k^* в мультипликативную группу K^*, при котором для любого $\xi \in k^*$ элемент $u(\xi)$ содержится в A и принадлежит классу ξ.

б) Если K имеет характеристику p, то показать, что φ, продолженный на k с помощью формулы $\varphi(0) = 0$, является изоморфизмом поля k на некоторое подполе в K. Вывести отсюда новое доказательство теоремы 1 (iii) из n° 3.

в) Предположим, что k *конечно*. Показать, что если r взаимно просто с p, то группа $(K^*)^r$ r-х степеней элементов из K^* имеет конечный индекс в K^* (воспользоваться леммой Гензеля). Показать, что если, кроме того, v дискретно и K имеет характеристику 0, то тот же результат выполняется без ограничения на r (заметить, что любой элемент из $1 + p^2A$ является p-й степенью).

§ 10. Продолжения нормирования на трансцендентное расширение

1. Случай моногенного трансцендентного расширения

Лемма. 1. *Пусть K — поле, v — нормирование на K, Γ — группа порядков этого нормирования, Γ' — совершенно упорядоченная группа, содержащая Γ, и ξ — некоторый элемент из Γ'. Тогда существует, и притом единственное, нормирование w поля $K(X)$,*

при котором для любого многочлена $P=\sum_j a_jX^j$ $(a_j\in K)$ *выполняется равенство* $w(P)=\inf_j (v(a_j)+j\xi)$.

В силу предложения 4 § 3, n°2, достаточно доказать, что формула

$$w\left(\sum_j a_jX^j\right)=\inf_j (v(a_j)+j\xi)$$

определяет некоторое нормирование кольца $K[X]$. Поскольку $v(a_j+b_j)+j\xi\geqslant \inf(v(a_j),\ v(b_j))+j\xi=\inf(v(a_j)+j\xi,\ v(b_j)+j\xi)$, имеет место неравенство

$$w(P+Q)\geqslant \inf(w(P),\ w(Q)) \tag{2}$$

для P, Q из $K[X]$, причем если $w(P)\neq w(Q)$, то справедливо равенство.

Докажем, что

$$w(P+Q)\geqslant \inf(w(P),\ w(Q)) \tag{3}$$

для $P=\sum_j a_jX^j$ и $Q=\sum_j b_jX^j$. Пусть i (соответственно k) — наименьшее из целых чисел j, для которых $v(a_j)+j\xi$ (соответственно $v(b_j)+j\xi$) принимает минимальное значение. Обозначим через α (соответственно через β) это минимальное значение. Для j, j' из $\mathbf{N}$ имеем

$$w(a_jb_{j'}X^{j+j'})=v(a_j)+j\xi+v(b_{j'})+j'\xi\geqslant \alpha+\beta,$$

откуда $w(PQ)\geqslant\alpha+\beta$ в силу формулы (2). Рассмотрим теперь член cX^{i+k} степени $i+k$ в PQ; имеем $c=\sum_{n\in z} a_{i+n}b_{k-n}$; в силу выбора чисел i и k, элемент

$$w(a_{i+n}b_{k-n}X^{i+k})=v(a_{i+n})+(i+n)\xi+v(b_{k-n})+(k-n)\xi$$

принимает ровно один раз — при $n=0$ — свое наименьшее значение $\alpha+\beta$; следовательно, $w(cX^{i+k})=\alpha+\beta$, откуда, в силу (1),

$$w(PQ)=\alpha+\beta=w(P)+w(Q).$$

Предложение 1. *Пусть* K *— поле,* v *— нормирование на* K, Γ *— группа порядков этого нормирования,* Γ' *— некоторая совершенно упорядоченная группа, содержащая* Γ *и* ξ *— такой элемент из* Γ', *что из соотношений* $n\xi\in\Gamma$, $n\in\mathbf{Z}$, *следует, что* $n=0$. *Тогда существует, и притом единственное, нормирование* w *поля* $K(X)$ *со значениями в* Γ', *продолжающее* v, *для которого* $w(X)=\xi$. *Поле вычетов нормирования* w *равно полю вычетов*

нормирования v и его группой порядков служит подгруппа $\Gamma + \mathbf{Z}\xi$ *в* Γ'.

Докажем сначала единственность нормирования w. Пусть $P = \sum_j a_j X^j$ — произвольный элемент из $K[X]$. Тогда $w(a_j X^j) = v(a_j) + j\xi$; это показывает, что одночлены $a_j X^j$, для которых $a_j \neq 0$, имеют различные значения относительно w. Отсюда получается, что $w(P) = \inf_j (v(a_j) + j\xi)$, а это одновременно доказывает единственность нормирования w на $K[X]$ (следовательно, и на $K(X)$) и тот факт, что группа порядков нормирования w равна $\Gamma + \mathbf{Z}\xi$. Кроме того, видно, что если $P \neq 0$, то можно записать $P = aX^n(1+u)$, где $a \in K^*$, $n \in \mathbf{N}$, $u \in K(X)$ и $w(u) > 0$; любой элемент $R \neq 0$ из $K(X)$ можно, следовательно, записать в виде $R = bX^n(1+u')$, где $b \in K^*$, $n \in \mathbf{Z}$, $u' \in K(X)$ и $w(u') > 0$; имеем $w(R) = v(b) + n\xi$. Следовательно, $w(R) = 0$ тогда и только тогда, когда $v(b) = 0$ и $n = 0$. Таким образом, когда $w(R) = 0$, R и b сравнимы по модулю идеала нормирования w, а это показывает, что поле вычетов нормирования w равно полю вычетов нормирования v.

Наконец, существование нормирования w следует из леммы 1.

Предложение 2. *Пусть K — поле, v — нормирование на K, Γ — группа порядков этого нормирования и k — его поле вычетов. Тогда существует, и притом единственное, нормирование w поля $K(X)$, продолжающее v, для которого $w(X) = 0$ и образ t элемента X в поле вычетов k' нормирования w трансцендентен над k. Группа порядков нормирования w равна группе порядков нормирования v и поле вычетов для w есть $k(t)$.*

Для доказательства единственности w достаточно показать, что если $P = \sum_j a_j X^j$ — ненулевой элемент из $K[X]$, то

$$w(P) = \inf_j (v(a_j)).$$

Умножая P на некоторый элемент из K^*, можно добиться того, что $v(a_j) \geqslant 0$ при всех j, причем один из элементов $v(a_j)$ в точности равен нулю. Поскольку $w(X) = 0$, P принадлежит кольцу нормирования w; обозначая через $\bar{a}_j$ канонический образ элемента a_j в поле k, мы получим, что образ элемента P в k' имеет вид $\sum_j \bar{a}_j t^j$. Так как t трансцендентен над k и один из элементов $\bar{a}_j$ не равен нулю, то указанный образ отличен от нуля, откуда

$$w(P) = 0 = \inf_j (v(a_j)).$$

Докажем теперь существование нормирования w. Формула $w(P) = \inf_j (v(a_j))$ $\left(\text{при } P = \sum_j a_j X^j\right)$ определяет некоторое нормирование w поля $K(X)$, в силу леммы 1, и, очевидно, это w имеет ту же группу порядков, что и v. Тогда $w(X) = 0$. Покажем, что канонический образ t элемента X в поле вычетов k' нормирования w трансцендентен над k. Действительно, если $\sum_j \bar{a}_j t^j = 0$, где $\bar{a}_j \in k$ для любого j, то, обозначив через a_j какой-либо представитель класса $\bar{a}_j$ в кольце нормирования v, получим $w\left(\sum_j a_j X^j\right) > 0$, откуда $v(a_j) > 0$ для каждого j; следовательно, $\bar{a}_j = 0$ для любого j. Наконец, покажем, что $k' = k(t)$. Действительно, всякий элемент R из $K(X)$ можно записать в виде $R = c\left(\sum_j a_j X^j\right)\left(\sum_j b_j X^j\right)$, где c, a_j, b_j лежит в K, $v(a_j) \geqslant 0$ и $v(b_j) \geqslant 0$ для любого j и один из элементов $v(a_j)$, а также один из элементов $v(b_j)$ отличен от нуля. Имеем $w(R) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $v(c) \geqslant 0$. Обозначая через f канонический гомоморфизм кольца нормирования w на поле k', получаем, что

$$f(R) = f(c)\left(\sum_j f(a_j) t^j\right) \Big/ \left(\sum_j f(b_j) t^j\right);$$

это и доказывает наше утверждение.

Замечание. Не следует полагать, что теми двумя типами продолжений нормирования v на поле $K(X)$, с которыми мы встретились, исчерпываются все продолжения: может существовать еще и третий тип продолжения, при котором Γ'/Γ является группой кручения, а k' — алгебраическим расширением (не обязательно имеющим конечную степень) поля k. К этому третьему типу не всегда можно прийти с помощью процесса, описанного леммой 1 (ср. § 3, упражнение 1).

2. *Рациональный ранг коммутативной группы*

Определение 1. *Рациональным рангом коммутативной группы G называется размерность векторного* $\mathbf{Q}$*-пространства* $G \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$.

Эта размерность может быть также определена как верхняя граница (конечная или бесконечная) таких кардинальных чисел r, что существует r элементов из G, линейно независимых над $\mathbf{Z}$ (*Algébre*, chap. II, 3^e éd., § 7, n° 10, proposition 26). Рациональный ранг группы G равен нулю тогда и только тогда, когда G является группой кручения. Для произвольной подгруппы адди-

тивной группы $\mathbf{R}^n$ значение рационального ранга совпадает со значением, определенным в *Общей топологии*, гл. VII, § 1.

На протяжении этого параграфа мы будем обозначать через $r(G)$ рациональный ранг коммутативной группы G. Если G' — подгруппа в G, то (ввиду того что $\mathbf{Q}$ — плоский $\mathbf{Z}$-модуль) выполняется формула сложения

$$r(G) = r(G') + r(G/G'). \tag{4}$$

Предложение 2. *Пусть G — совершенно упорядоченная коммутативная группа и H — подгруппа в ней. Если $h(G)$ и $h(H)$ обозначают высоты групп G и H* (§ 4, n° 4), *то имеет место неравенство*

$$h(G) \leqslant h(H) + r(G/H). \tag{5}$$

Пусть, в самом деле, $G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n$ — строго возрастающая последовательность изолированных подгрупп в G. Требуется установить неравенство

$$n \leqslant h(H) + r(G/H). \tag{6}$$

Оно очевидно при $n = 0$. Предположим, что $n \geqslant 1$, и будем рассуждать индукцией по n. Применяя предположение индукции к группе G_{n-1} и ее подгруппе $H \cap G_{n-1}$, мы получаем

$$n - 1 \leqslant h(H \cap G_{n-1}) + r(G_{n-1}/(H \cap G_{n-1})). \tag{7}$$

Будем различать два случая:

а) Имеет место равенство $H \cap G_{n-1} = H$; другими словами, $H \subset G_{n-1}$. Неравенство (7) записывается так:

$$n \leqslant h(H) + r(G_{n-1}/H) + 1. \tag{8}$$

Но G/G_{n-1} является совершенно упорядоченной группой, не равной нулю; следовательно, эта группа не является группой кручения и $r(G/G_{n-1}) \geqslant 1$. Отсюда, в силу формулы (4), следует, что $r(G/H) \geqslant r(G_{n-1}/H) + 1$. Подставляя это в (8), получим искомое неравенство (6).

б) Имеет место соотношение $H \cap G_{n-1} \neq H$. Поскольку $H \cap G_{n-1}$ является изолированной подгруппой в H, мы получаем, что $h(H) \geqslant h(H \cap G_{n-1}) + 1$. С другой стороны, очевидно, что $r(G/H) \geqslant r(G_{n-1}/(H \cap G_{n-1}))$. Подставляя это в (7), получаем снова (6).

Следствие. *Для любой совершенно упорядоченной коммутативной группы G имеет место неравенство $h(G) \leqslant r(G)$.*

Для доказательства надо положить $H = \{0\}$ в предложении 3.

Предложение 4. *Пусть G — совершенно упорядоченная коммутативная группа. Предположим, что G имеет конечный тип и что $h(G) = r(G)$. Тогда группа G изоморфна группе $\mathbf{Z}^{r(G)}$, упорядоченной лексикографически.*

Положим $r = r(G) = h(G)$. Если $r = 0$, то $G = \{0\}$. Если $r = 1$, то структура коммутативных групп конечного типа показывает, что существует изоморфизм j группы G на $\mathbf{Z}$ (*Алгебра*, гл. VII, § 4, n° 6, теорема 3). Однако $\mathbf{Z}$ обладает только двумя структурами совершенного порядка, согласованными со структурой группы, а именно обычной структурой и противоположной к ней. Следовательно, j или $-j$ представляет собой изоморфизм упорядоченной группы G на группу $\mathbf{Z}$, наделенную обычным порядком.

Предположим теперь, что $r \geqslant 2$ и будем рассуждать индукцией по r. Пусть H — изолированная подгруппа в G высоты $r - 1$. Имеют место равенство $r(H) + r(G/H) = r$ (формула (4)), неравенство $r(H) \geqslant h(H) = r - 1$ и неравенство $r(G/H) \geqslant h(G/H) = 1$ (следствие из предложения 3), откуда $r(H) = r - 1$ и $r(G/H) = 1$. Предположение индукции показывает, что H изоморфна группе $\mathbf{Z}^{r-1}$, упорядоченной лексикографически, и случай $r = 1$ показывает, что группа G/H изоморфна $\mathbf{Z}$. Так как $\mathbf{Z}$ является свободным $\mathbf{Z}$-модулем, то H является *прямым слагаемым* группы G (*Algèbre*, chap. II, 3e éd., § 1, n° 11, proposition 21). Следующая лемма показывает, что группа G изоморфна (не канонически) лексикографически упорядоченному прямому произведению $H \times (G/H)$, а это завершает доказательство.

Лемма 2. *Пусть H — изолированная подгруппа совершенно упорядоченной коммутативной группы G. Если H является прямым слагаемым в G, то упорядоченная группа G изоморфна группе $(G/H) \times H$, упорядоченной лексикографически.*

Пусть j — изоморфизм группы $G(H) \times H$ на G, при котором $j(0, x) = x$ для любого $x \in H$ и элемент $j(y, x)$ является представителем класса y группы G по модулю H. Так как группа $(G/H) \times H$ совершенно упорядоченна, то остается показать, что отображение j является *возрастающим* (*Théorie des ensembles*, chap. III, 2e éd., § 1, n° 12, proposition 11). Пусть (y, x) — произвольный элемент $\geqslant 0$ из группы $(G/H) \times H$, упорядоченной лексикографически. Если $y > 0$, то класс элемента $j(y, x)$ по модулю H положителен, откуда следует, что $j(y, x) > 0$, ибо в противном случае имело бы место неравенство $y \leqslant 0$ (§ 4, n° 2, предложение 3). Если $y = 0$ и $x \geqslant 0$, то $j(y, x) = x \geqslant 0$. Следовательно, изоморфизм j — возрастающий.

3. Случай произвольного трансцендентного расширения

В этом n° мы будем использовать следующие обозначения: K — поле, K' — расширение поля K, v — нормирование на K, v' — некоторое продолжение v на K', Γ и k (соответственно Γ' и k') — группа порядков и поле вычетов нормирования v (соответственно v'). Положим

$d(K'/K) = \dim \mathrm{al}_K K' =$ степень трансцендентности поля K' над K;

$s(v'/v) = \dim \mathrm{al}_k k' =$ степень трансцендентности поля k' над k;

$r(v'/v) = r(\Gamma'/\Gamma) =$ рациональный ранг группы Γ'/Γ;

при этом предполагается, что правые части конечны. Если же это не так, то положим $d(K'/K) = +\infty$ (соответственно $s(v'/v) = +\infty$, $r(v'/v) = +\infty$).

Теорема 1. *Пусть $x_1, \ldots, x_s$ — элементы кольца нормирования v', канонические образы $\bar{x}_i$ которых в k' алгебраически независимы над k, и $y_1, \ldots, y_r$ — такие элементы из K', что канонические образы элементов $v'(y_i)$ в факторгруппе Γ'/Γ линейно независимы над $\mathbf{Z}$. Тогда $r+s$ элементов $x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_r$ поля K' алгебраически независимы над K. Ограничение нормирования v' на поле $K(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_r)$ имеет $k(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_s)$ в качестве поля вычетов и $\Gamma + \mathbf{Z}v'(y_1) + \ldots + \mathbf{Z}v'(y_r)$ в качестве группы порядков.*

Наше утверждение очевидно, если $r+s=0$. Будем рассуждать индукцией по $r+s$. Если $r' \leqslant r$, $s' \leqslant s$ и $0 < r'+s' < r+s$, то предположение индукции показывает, что условия теоремы 1 будут выполнены, если заменить K на $K(x_1, \ldots, x_{s'}, y_1, \ldots, y_{r'})$ и семейства $(x_1, \ldots, x_s)$, $(y_1, \ldots, y_r)$ на $(x_{s'+1}, \ldots, x_s)$, $(y_{r'+1}, \ldots, y_r)$. Мы пришли, таким образом, к необходимости рассмотреть два следующих случая:

а) Имеется такой элемент x кольца нормирования v', что $\bar{x}$ трансцендентен над k; надо доказать, что x трансцендентен над K и что ограничение нормирования v' на $K(x)$ имеет $k(\bar{x})$ в качестве поля вычетов и Γ в качестве группы порядков.

б) Имеется такой элемент y из K', что из соотношений $nv'(y) \in \Gamma$ и $n \in \mathbf{Z}$ вытекает, что $n=0$. Надо доказать, что y трансцендентен над K и что ограничение нормирования v' на $K(y)$ имеет k в качестве поля вычетов и $\Gamma + \mathbf{Z}v'(y)$ в качестве группы порядков.

Но предложение 1 § 8, n° 1, показывает, что x (соответственно y) не может быть алгебраичным над K. Прочие же утверждения из а) (соответственно из б)) немедленно устанавливаются с помощью предложения 2 (соответственно предложения 1) n° 1.

Следствие 1. *Имеет место неравенство*

$$s(v'/v) + r(v'/v) \leqslant d(K'/K). \tag{9}$$

Кроме того, если K' является расширением конечного типа поля K и если в (9) *имеет место равенство, то Γ'/Γ представляет собой $\mathbf{Z}$-модуль конечного типа, а k' является расширением конечного типа поля k.*

Пусть r и s — такие натуральные числа, что $r \leqslant r(v'/v)$ и $s \leqslant s(v'/v)$. Покажем, и этим будет установлено (9), что $r+s \leqslant d$. По условию существуют элементы $x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_r$ поля K', удовлетворяющие предположениям теоремы 1. Они, следовательно, алгебраически независимы над K, что и доказывает неравенство $r+s \leqslant d(K'/K)$.

Если K' является расширением конечного типа поля K, то число $d(K'/K)$ конечно; следовательно, конечны также и числа $s(v'/v)$ и $r(v'/v)$. Обозначим их через s и r. Существуют элементы $x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_r$ поля K', удовлетворяющие предположениям теоремы 1. Если $r+s = d(K'/K)$, то эти элементы образуют базис трансцендентности поля K' над K и, следовательно, K' является алгебраическим расширением конечной степени поля $K'' = K(x_1, \ldots, y_r)$. Пусть Γ'' и k'' — группа порядков и поле вычетов ограничения нормирования v' на K''. В силу теоремы 1, группа Γ''/Γ представляет собой $\mathbf{Z}$-модуль конечного типа и k'' является чистым расширением конечного типа поля k. С другой стороны, поскольку K' является алгебраическим расширением конечной степени поля K'', группа Γ'/Γ'' конечна, а поле k' есть алгебраическое расширение конечной степени поля k'' (§ 8, n° 1, лемма 2). Этим доказано следствие 1.

Следствие 2. *Пусть h и h' — высоты нормирований v и v'. Тогда имеет место неравенство*

$$s(v'/v) + h \leqslant d(K'/K) + h. \tag{10}$$

Действительно, в силу предложения 3, имеет место неравенство $h' \leqslant r(v'/v) + h$.

Следствие 3. *Предположим, что K' является расширением конечного типа поля K, что группа Γ изоморфна группе $\mathbf{Z}^h$ (упорядоченной лексикографически) и что в* (10) *имеет место равенство. Тогда группа Γ' изоморфна группе $\mathbf{Z}^{h'}$ (упорядоченной лексикографически) и поле k' является расширением конечного типа поля k.*

Если в (10) имеет место равенство, то имеет место равенство и в (9), откуда следует, что k' есть расширение конечного типа

поля k, а Γ' представляет собой $\mathbf{Z}$-модуль конечного типа. Далее, сравнивая (9) и (10), мы видим, что $h'-h=r(\Gamma'/\Gamma)$, откуда $h'=r(\Gamma')$ и предложение 4 (n° 2) показывает теперь, что Γ' изоморфна группе $\mathbf{Z}^{h'}$, упорядоченной лексикографически.

Следствие 4. *Предположим, что нормирование v является несобственным (так что $k=K$). Тогда*

$$h(\Gamma')+d(k'/K)\leqslant r(\Gamma')+d(k'/K)\leqslant d(K'/K). \tag{11}$$

Если, в частности, нормирование v' имеет высоту 1, *то*

$$d(k'/K)\leqslant d(K'/K)-1. \tag{12}$$

Кроме того, если K' является расширением конечного типа поля K и если в (12) *имеет место равенство, то v' представляет собой дискретное нормирование и k' является расширением конечного типа поля K.*

Все эти утверждения представляют собой серию частных случаев следствий 1, 2, 3.

Упражнения

1) Пусть K — поле, P — простое подполе в K. *Абсолютной размерностью* поля K называется число $\dim \mathrm{al}_p K$, если P имеет характеристику $p>0$, и число $\dim \mathrm{al}_p K+1$, если P имеет характеристику 0. Пусть v — нормирование K, h — его высота, r — его рациональный ранг и k — его поле вычетов.

а) Предположим, что абсолютная размерность n поля K конечна. Тогда если s — абсолютная размерность поля k, то $r+s\leqslant n$.

б) Предположим, кроме того, что K является расширением конечного типа поля P. Тогда, если $r+s=n$, то k представляет собой расширение конечного типа своего простого подполя и группа порядков нормирования v изоморфна группе $\mathbf{Z}^r$; если $h+s=n$, то k является расширением конечного типа своего простого подполя и группа порядков нормирования v изоморфна группе $\mathbf{Z}^r$, упорядоченной лексикографически. Наконец, если $s=n-1$, то v является дискретным нормированием и k является расширением типа своего простого подполя.

¶ 2) Пусть K — поле, v — нормирование на K, L — расширение поля K, v' — нормирование на L, продолжающее v; говорят, что L является *непосредственным* (относительно v') *расширением*, если $e(v'/v)=f(v'/v)=1$. Пополнение $\widehat{K}$ поля K является непосредственным расширением поля K.

а) Для того чтобы L было непосредственным расширением поля K, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x\in L-K$ существовал такой элемент $y\in K$, что $v'(x-y)>v'(x)$.

б) Показать, что для любого поля K существует *максимальное* непосредственное расширение L поля K, т. е. такое расширение, которое не имеет никакого непосредственного расширения, кроме самого себя (воспользоваться упражнением 3б) § 3).

в) Показать, что если K линейно компактно относительно топологии, определенной нормированием v, то оно не имеет непосредственных расширений, отличных от самого себя (воспользоваться пунктом а), заметив, что в обозначениях из этого пункта множество значений $v'(x-y)$, где $y\in K$, не имеет наибольшего элемента в группе значений нормирования v').

г) Предположим, что K не является линейно компактным; пусть B — вполне упорядоченное подмножество группы порядков нормирования v и $(a_\beta)_{\beta\in B}$ — такое семейство элементов из K, что при $\lambda<\mu<\nu$

$$v(a_\lambda-a_\mu)<v(a_\mu-a_\nu),$$

но при этом не существует такого $x\in K$, что $v(x-a_\lambda)=v(a_\lambda-a_\mu)$ для любой пары (λ,μ) с условием $\lambda<\mu$. Для любого расширения E поля K и любого продолжения w нормирования v на E обозначим через $D_E(\lambda)$ множество таких $z\in E$, что $v(z-a_\lambda)\geqslant\gamma_\lambda$, где γ_λ — общее значение нормирований $v(a_\lambda-a_\mu)$ при $\lambda<\mu$; предположение, следовательно, заключается в том, что $\bigcap_{\beta\in B} D_k(\beta)=\varnothing$ (§ 5, упражнение 5а)). Пусть Ω — алгебраическое замыкание поля K, и пусть v_0 — некоторое продолжение нормирования v на Ω. Показать, что если P — многочлен из $K[X]$, то для существования такого элемента $\lambda\in B$, что $v(P(a_\mu))=v(P(a_\lambda))$ для любого $\lambda\leqslant\mu$, необходимо и достаточно, чтобы ни один из нулей многочлена P, лежащих в Ω, не принадлежал множеству $\bigcap_{\beta\in B} D_\Omega(\beta)$. Если P обладает этим свойством и если E и w имеют тот же смысл, что и выше, то показать, что для любого $z\in\bigcap_{\beta\in B} D_E(\beta)$ имеет место соотношение $w(P(z)-P(a_\mu))>w(P(z))=v(P(a_\mu))$, как только μ достаточно велико (разложить $P(X)$ на множители в кольце $\Omega[X]$). Вывести отсюда, что имеет место одна из следующих ситуаций:

1° Или $\bigcap_{\beta\in B} D_\Omega(\beta)\neq\varnothing$, и если θ — какой-нибудь элемент из этого пересечения, степень которого над K является наименьшей из всех возможных, то $K(\theta)$ есть непосредственное расширение поля K, отличное от K.

2° Или $\bigcap_{\beta\in B} D_\Omega(\beta)=\varnothing$; в этом случае имеется такое нормирование v' поля $K(X)$, продолжающее v, что $v'(P(X))=v(P(a_\mu))$ при достаточно больших μ и $K(X)$, наделенное нормированием v', является непосредственным расширением поля K (воспользоваться критерием пункта а)).

д) Вывести из пункта в) и г), что для линейной компактности K необходимо и достаточно, чтобы поле K не имело непосредственных расширений, отличных от него самого.

ГЛАВА VII

ДИВИЗОРЫ

Предполагается, что все кольца, рассматриваемые в этой главе, коммутативны и обладают единичным элементом, а также что все гомоморфизмы колец переводят единичный элемент в единичный. Кроме того, предполагается, что любое подкольцо кольца A содержит единичный элемент из A.

§ 1. Кольца Крулля

1. Дивизориальные идеалы целостного кольца

Определение 1. *Пусть A — целостное кольцо, K — его поле частных. Дробным идеалом кольца A (или поля K, если допускать некоторую вольность речи) называется любой A-подмодуль $\mathfrak{a}$ поля K, для которого существует такой элемент $d \neq 0$ из A, что $d\mathfrak{a} \subset A$.*

Любой A-подмодуль $\mathfrak{a}$ *конечного типа* в K представляет собой дробный идеал; в самом деле, если $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — система образующих модуля $\mathfrak{a}$, то можно записать $a_i = b_i/d_i$, где $b_i \in A$, $d_i \in A$ и $d_i \neq 0$; если $d = d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$, то ясно, что $d\mathfrak{a} \subset A$. В частности, *моногенные* A-подмодули в K являются дробными идеалами (напомним, что в *Алгебре*, гл. VI, § 1, n° 5, они назывались *дробными главными идеалами*). Если A — *нётерово* кольцо, то любой дробный идеал есть A-модуль *конечного типа*. Любой A-подмодуль дробного идеала кольца A является дробным идеалом. Любой идеал в A является дробным идеалом. Чтобы избежать путаницы, в этом случае говорят также, что указанные идеалы являются *целыми* идеалами кольца A.

Мы будем обозначать через $I(A)$ множество *ненулевых* дробных идеалов кольца A. Если заданы два элемента $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ из $I(A)$, то через $\mathfrak{a} \prec \mathfrak{b}$ (или через $\mathfrak{b} \succ \mathfrak{a}$) будет обозначаться отношение „любой дробный главный идеал, содержащий $\mathfrak{a}$, содержит также и $\mathfrak{b}$“. Ясно, что это отношение является отношением *предпорядка* на множестве $I(A)$. Обозначим через R ассоциированное отно-

шение эквивалентности „$\mathfrak{a} \prec \mathfrak{b}$ и $\mathfrak{b} \prec \mathfrak{a}$“ (*Теория множеств*, гл. III, § 1, n° 2) и через $D(A)$ — факторможество $I(A)/R$; мы будем называть элементы из $D(A)$ *дивизорами* кольца A и для всякого дробного идеала $\mathfrak{a} \in I(A)$ будем обозначать через $\operatorname{div}\mathfrak{a}$ (или через $\operatorname{div}_A\mathfrak{a}$) канонический образ элемента $\mathfrak{a}$ в множестве $D(A)$; элемент $\operatorname{div}\mathfrak{a}$ мы будем называть *дивизором* идеала $\mathfrak{a}$. Если $\mathfrak{a} = Ax$ — дробный главный идеал, то мы будем писать $\operatorname{div}(x)$ вместо $\operatorname{div}(Ax)$; элемент $\operatorname{div}(x)$ называется *дивизором* элемента x; элементы множества $D(A)$ вида $\operatorname{div}(x)$ называются *главными дивизорами*. При переходе к факторможеству отношение предпорядка $\prec$ на $I(A)$ определяет на $D(A)$ *отношение порядка*, которое мы будем обозначать через $\leqslant$.

По условию для всякого $\mathfrak{a} \in I(A)$ существует такой элемент $d \neq 0$ из A, что $\mathfrak{a} \subset Ad^{-1}$; следовательно, пересечение $\tilde{\mathfrak{a}}$ главных дробных идеалов, содержащих $\mathfrak{a}$, является элементом из $I(A)$. Ясно, что отношение $\mathfrak{a} \prec \mathfrak{b}$ эквивалентно отношению $\tilde{\mathfrak{a}} \supset \tilde{\mathfrak{b}}$; в частности, соотношение $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$ влечет за собой $\mathfrak{a} \prec \mathfrak{b}$. Для того чтобы два элемента $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ из $I(A)$ были эквивалентны по модулю R, необходимо и достаточно, чтобы $\tilde{\mathfrak{a}} = \tilde{\mathfrak{b}}$.

Определение 2. *Дивизориальным дробным идеалом кольца A называется всякий элемент $\mathfrak{a}$ из $I(A)$, для которого $\mathfrak{a} = \tilde{\mathfrak{a}}$.*

Иначе говоря, дивизориальный идеал — это ненулевое пересечение непустого семейства главных дробных идеалов. Всякое ненулевое пересечение дивизориальных идеалов является дивизориальным идеалом. Если $\mathfrak{a}$ — дивизориальный идеал, то таким же будет и любой идеал $\mathfrak{a}x$, где $x \in K^*$, так как отображение $\mathfrak{b} \to \mathfrak{b}x$ представляет собой биективное отображение множества дробных главных идеалов на себя. Для всякого $\mathfrak{a} \in I(A)$ дробный идеал $\tilde{\mathfrak{a}}$ является наименьшим дивизориальным идеалом, содержащим $\mathfrak{a}$, и он эквивалентен $\mathfrak{a}$ по модулю R. При этом если $\mathfrak{b}$ — некоторый дивизориальный идеал, эквивалентный $\mathfrak{a}$ по модулю R, то $\tilde{\mathfrak{a}} = \tilde{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}$. Следовательно, $\tilde{\mathfrak{a}}$ является единственным дивизориальным идеалом $\mathfrak{b}$, для которого $\operatorname{div}\mathfrak{a} = \operatorname{div}\mathfrak{b}$ (другими словами, ограничение отображения $\mathfrak{a} \to \operatorname{div}\mathfrak{a}$ на множество *дивизориальных* идеалов *инъективно*).

Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — два дробных идеала в K. Напомним (гл. I, § 2, n° 10), что через $\mathfrak{b} : \mathfrak{a}$ обозначается множество таких элементов $x \in K$, для которых $x\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$. Очевидно, это множество является A-модулем; если $\mathfrak{b} \in I(A)$ и $\mathfrak{a} \in I(A)$, то $\mathfrak{b} : \mathfrak{a} \in I(A)$; действительно, если d — ненулевой элемент из A, для которого $d\mathfrak{b} \subset A$ и $d\mathfrak{a} \subset A$, и если a — какой-нибудь ненулевой элемент из $\mathfrak{a}$, то $da(\mathfrak{b} : \mathfrak{a}) \subset A$; с другой стороны, если $b \neq 0$ принадлежит $\mathfrak{b}$, то $bd\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, так что $bd \in \mathfrak{b} : \mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b} : \mathfrak{a} \neq 0$.

Определение множества $\mathfrak{b} : \mathfrak{a}$ может быть также записано в виде:

$$\mathfrak{b} : \mathfrak{a} = \bigcap_{\substack{x \in \mathfrak{a}, \\ x \neq 0}} \mathfrak{b}x^{-1}. \tag{1}$$

Предложение 1. а) *Если* $\mathfrak{b}$ *— дивизориальный идеал и если* $\mathfrak{a} \in I(A)$, *то* $\mathfrak{b} : \mathfrak{a}$ *является дивизориальным идеалом.*

б) *Пусть* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *принадлежат* $I(A)$. *Для того чтобы* $\operatorname{div}\mathfrak{a} = \operatorname{div}\mathfrak{b}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $A : \mathfrak{a} = A : \mathfrak{b}$.

в) *Для любого* $\mathfrak{a} \in I(A)$ *имеет место равенство* $\mathfrak{a} = A : (A : \mathfrak{a})$.

Утверждение а) немедленно вытекает из формулы (1), так как если $\mathfrak{b}$ — дивизориальный идеал, то дивизориальным будет и $\mathfrak{b}x^{-1}$ для любого $x \neq 0$.

Для доказательства утверждения б) обозначим через $P(\mathfrak{a})$ множество дробных главных идеалов, содержащих $\mathfrak{a}$; соотношение $Ax \in P(\mathfrak{a})$ эквивалентно соотношению $x^{-1}\mathfrak{a} \subset A$ и, следовательно, соотношению $x^{-1} \in A : \mathfrak{a}$. Поскольку $\operatorname{div}\mathfrak{a} = \operatorname{div}\mathfrak{b}$, по определению, эквивалентно соотношению $P(\mathfrak{a}) = P(\mathfrak{b})$, оно эквивалентно и соотношению $A : \mathfrak{a} = A : \mathfrak{b}$.

Наконец, ввиду того что $\mathfrak{a}(A : \mathfrak{a}) \subset A$, имеет место включение $\mathfrak{a} \subset A : (A : \mathfrak{a})$. Заменяя в этой формуле $\mathfrak{a}$ на $A : \mathfrak{a}$, мы видим, что $A : \mathfrak{a} \subset A : (A : (A : \mathfrak{a}))$; с другой стороны, из $\mathfrak{a} \subset A : (A : \mathfrak{a})$ следует, что

$$A : \mathfrak{a} \supset A : (A : (A : \mathfrak{a})).$$

Следовательно, $A : \mathfrak{a} = A : (A : (A : \mathfrak{a}))$ и из утверждения б) вытекает, что $\operatorname{div}\mathfrak{a} = \operatorname{div}(A : (A : \mathfrak{a}))$. Поскольку $A : (A : \mathfrak{a})$ есть дивизориальный идеал в силу а), имеет место равенство $\tilde{\mathfrak{a}} = A : (A : \mathfrak{a})$; тем самым утверждение в) доказано.

Замечание. В процессе предыдущего доказательства мы получили, что $A : \mathfrak{a} = A : (A : (A : \mathfrak{a}))$ для идеала $\mathfrak{a} \in I(A)$; это является частным случаем предложения 2 из *Thèorie des ensembles*, chap. III, 3^{e} éd., § 1, n°5, proposition 2.

Предложение 2. (i) *В* $D(A)$ *всякое ограниченное сверху непустое множество имеет верхнюю границу. Точнее говоря, если* $(\mathfrak{a}_\iota)$ *— непустое ограниченное сверху семейство элементов из* $I(A)$, *то*

$$\sup_\iota (\operatorname{div}\mathfrak{a}_\iota) = \operatorname{div}\Big(\bigcap_\iota \tilde{\mathfrak{a}}_\iota\Big).$$

(ii) *В* $D(A)$ *всякое ограниченное снизу непустое множество имеет нижнюю границу. Точнее говоря, если* $(\mathfrak{a}_\iota)$ *— непустое огра-*

ниченное снизу семейство элементов из $I(A)$, то

$$\inf_\iota (\operatorname{div} \mathfrak{a}_\iota) = \operatorname{div}\left(\sum_\iota \mathfrak{a}_\iota\right).$$

(iii) *Множество $D(A)$ решеточно-упорядочено.*

Пусть $(\mathfrak{a}_\iota)$ — ограниченное сверху непустое семейство элементов из $I(A)$. Утверждение, что некоторый дивизориальный идеал $\mathfrak{b}$ ограничивает сверху это семейство, равносильно тому, что он содержится во всех $\tilde{\mathfrak{a}}_\iota$, т. е. $\mathfrak{b}$ содержится в $\bigcap_\iota \tilde{\mathfrak{a}}_\iota$. Следовательно, $\bigcap_\iota \tilde{\mathfrak{a}}_\iota \neq (0)$ и $\bigcap_\iota \tilde{\mathfrak{a}}_\iota$ представляет собой дивизориальный идеал; тем самым утверждение (i) доказано.

Пусть теперь $(\mathfrak{a}_\iota)$ — непустое ограниченное снизу семейство элементов из $I(A)$. Утверждение, что некоторый дивизориальный идеал $\mathfrak{b}$ ограничивает снизу это семейство, равносильно тому, что он содержит все $\tilde{\mathfrak{a}}_\iota$, т. е. (поскольку идеал $\mathfrak{b}$ дивизориальный) что он содержит все $\mathfrak{a}_\iota$, а это означает, что $\mathfrak{b} \supset \sum_\iota \mathfrak{a}_\iota$. Таким образом, доказано (ii).

Наконец, для доказательства утверждения (iii) достаточно, в силу (i) и (iii), доказать, что если $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ принадлежат $I(A)$, то множество $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}$ является одновременно ограниченным сверху и снизу. Но оно ограничено сверху элементом $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ (который отличен от (0)) и ограничено снизу элементом $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, так как $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} \in I(A)$: в самом деле, если d и d' — ненулевые элементы из A, для которых $d\mathfrak{a} \subset A$ и $d'\mathfrak{b} \subset A$, то $dd'(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \subset A$.

Следствие. *Если x, y и $x+y$ лежат в K^*, то* $\operatorname{div}(x+y) \geqslant \inf(\operatorname{div}(x), \operatorname{div}(y))$.

Действительно, $A(x+y) \subset Ax + Ay$; следовательно, $\operatorname{div}(x+y) \geqslant \operatorname{div}(Ax + Ay)$.

2. Структура моноида на $D(A)$

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ — некоторые элементы из $I(A)$. Соотношения $\mathfrak{a} > \mathfrak{a}'$ и $\mathfrak{b} > \mathfrak{b}'$ влекут за собой $\mathfrak{ab} > \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$.*

Можно ограничиться случаем $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$. Пусть Ax — дробный главный идеал, содержащий $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}$; для любого ненулевого элемента y из $\mathfrak{b}$ имеет место включение $Ax \supset \mathfrak{a}'y$; следовательно, $Axy^{-1} \supset \mathfrak{a}'$, откуда $Axy^{-1} \supset \mathfrak{a}$ и $Ax \supset \mathfrak{a}y$. Варьируя y, мы видим, что $Ax \supset \mathfrak{ab}$, откуда $\mathfrak{ab} > \mathfrak{a}'\mathfrak{b}$.

Из предложения 3 следует, что умножение в $I(A)$ при переходе к фактормножеству определяет некоторый закон компози-

ции на $D(A)$, который, очевидно, ассоциативен и коммутативен. Будем записывать его аддитивно, так что

$$\operatorname{div}(\mathfrak{ab}) = \operatorname{div}(\mathfrak{a}) + \operatorname{div}(\mathfrak{b}) \qquad (2)$$

для любых $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ из $I(A)$. Ясно, что $\operatorname{div}(1)$ является нейтральным элементом относительно этого сложения; будем обозначать его символом 0. Предложение 3 показывает, кроме того, что структура порядка на $D(A)$ *согласована* с этим сложением (*Алгебра*, гл. VI, § 1, n° 1); точнее говоря, имеют место соотношения (n° 1, предложение 2 (ii)):

$$\inf(\operatorname{div}\mathfrak{a} + \operatorname{div}\mathfrak{b},\ \operatorname{div}\mathfrak{a} + \operatorname{div}\mathfrak{c}) = \inf(\operatorname{div}(\mathfrak{ab}),\ \operatorname{div}(\mathfrak{ac})) =$$
$$= \operatorname{div}(\mathfrak{ab} + \mathfrak{ac}) = \operatorname{div}(\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})) = \operatorname{div}\mathfrak{a} + \operatorname{div}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) =$$
$$= \operatorname{div}\mathfrak{a} + \inf(\operatorname{div}\mathfrak{b},\ \operatorname{div}\mathfrak{c}).$$

Для того чтобы дробный идеал $\mathfrak{a} \neq 0$ был таким, что $\operatorname{div}\mathfrak{a} \geqslant 0$ в $D(A)$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{a} \subset A$ (иначе говоря, чтобы $\mathfrak{a}$ был *целым* идеалом кольца A).

Для любых двух элементов x, y из K^* соотношение $\operatorname{div}(x) = \operatorname{div}(y)$ эквивалентно соотношению $Ax = Ay$; множество главных дивизоров кольца A, наделенное отношением порядка и законом композиции моноида, индуцируемыми соответствующими структурами множества $D(A)$, является *упорядоченной группой*, канонически изоморфной мультипликативной группе дробных идеалов главных идеалов, упорядоченной отношением порядка, обратным включению (*Алгебра*, гл. IV, § 1, n° 5). Поэтому отношение S

„существует такой $x \in K^*$, что $P = Q + \operatorname{div}(x)$,“

между двумя элементами P, Q из $D(A)$ является отношением эквивалентности, так как соотношение $P = Q + \operatorname{div}(x)$ эквивалентно соотношению $Q = P + \operatorname{div}(x^{-1})$; если P и Q сравнимы по модулю S, то говорят, что они являются *эквивалентными дивизорами* кольца A. Кроме того, ясно, что отношение S согласовано с законом композиции моноида $D(A)$; следовательно, последний закон композиции определяет при переходе к фактормножеству структуру моноида на $D(A)/S$; этот моноид называется *моноидом классов дивизоров кольца* A.

Предложение 4. *Пусть* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — *два дивизориальных дробных идеала кольца* A. *Следующие свойства эквивалентны*:

а) $\operatorname{div}(\mathfrak{a})$ *и* $\operatorname{div}(\mathfrak{b})$ *являются эквивалентными дивизорами*;

б) *существует такой элемент* $x \in K^*$, *что* $\mathfrak{b} = x\mathfrak{a}$.

Действительно, если $\operatorname{div}(\mathfrak{b}) = \operatorname{div}(\mathfrak{a}) + \operatorname{div}(x)$ при некотором $x \in K^*$, то $\operatorname{div}(\mathfrak{b}) = \operatorname{div}(x\mathfrak{a})$ и, поскольку $\mathfrak{b}$ и $x\mathfrak{a}$ — дивизориальные идеалы, имеет место равенство $\mathfrak{b} = x\mathfrak{a}$, что и доказывает предложение.

Пусть $\mathfrak{a}$ — *обратимый* дробный идеал (гл. II, § 5, n° 6); тогда $\mathfrak{a} = A : (A : \mathfrak{a})$ (loc. cit, предложение 10); следовательно, $\mathfrak{a}$ является *дивизориальным* идеалом (n° 1, предложение 1). Группа $J(A)$ обратимых дробных идеалов отождествляется, следовательно, с некоторой подгруппой моноида $D(A)$ и канонический образ группы $J(A)$ в $D(A)/S$ отождествляется с группой классов *проективных* A-модулей ранга 1 (гл. II, § 5, n° 7, следствие 2 предложения 12 и замечание 1).

Теорема 1. *Пусть A — целостное кольцо. Для того чтобы моноид $D(A)$ дивизоров кольца A был группой, необходимо и достаточно, чтобы A было вполне целозамкнуто.*

Предположим, что $D(A)$ является группой. Пусть $x \in K$; допустим, что $A[x]$ содержится в некотором A-подмодуле конечного типа поля K. Тогда, как мы видели (n° 1), $\mathfrak{a} = A[x]$ является элементом из $I(A)$. Имеет место включение $x\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$; следовательно, $\operatorname{div}(x) + \operatorname{div}(\mathfrak{a}) \geqslant \operatorname{div}(\mathfrak{a})$. Так как $D(A)$ — упорядоченная группа, то мы заключаем, что $\operatorname{div}(x) \geqslant 0$, откуда $x \in A$. Таким образом, кольцо A вполне целозамкнуто (гл. V, § 1, n° 4, определение 5).

Обратно, предположим, что кольцо A вполне целозамкнуто. Пусть $\mathfrak{a}$ — произвольный дивизориальный идеал. Мы сейчас покажем, что $\operatorname{div}\mathfrak{a} + \operatorname{div}(A : \mathfrak{a}) = 0$; тем самым и будет доказано, что $D(A)$ является группой. Поскольку $\mathfrak{a}(A : \mathfrak{a}) \subset A$, достаточно (n° 1) показать, что любой дробный главный идеал Ax^{-1}, содержащий $\mathfrak{a}(A : \mathfrak{a})$, содержит также и A. Но для $y \in K^*$ соотношение $Ay \supset \mathfrak{a}$ означает, что $y^{-1} \in A : \mathfrak{a}$, откуда $y^{-1}\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}(A : \mathfrak{a}) \subset Ax^{-1}$; следовательно, $x\mathfrak{a} \subset Ay$. Поскольку $\mathfrak{a}$ является дивизориальным идеалом, отсюда вытекает включение $x\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$, откуда $x^n\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$ при любом $n \in \mathbf{N}$. Существуют такие элементы x_0, x_1 из K^*, что $Ax_0 \subset \mathfrak{a} \subset Ax_1$; следовательно, $x^n x_0 \in Ax_1$, так что $x^n \in Ax_1x_0^{-1}$. Поскольку A вполне целозамкнуто, то $x \in A$, т. е. $Ax^{-1} \supset A$; доказательство закончено.

Следует отметить, что если A вполне целозамкнуто (и даже нётерово), то дивизориальный идеал кольца A не обязательно обратим; другими словами, в общем случае $J(A) \neq D(A)$ (упражнение 2 и § 3, n° 2, предложение 1).

Следствие. *Пусть A — вполне целозамкнутое кольцо и $\mathfrak{a}$ — дивизориальный дробный идеал кольца A. Тогда для любого дробного идеала $\mathfrak{b} \neq 0$ кольца A имеет место равенство* $\operatorname{div}(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = \operatorname{div}(\mathfrak{a}) - \operatorname{div}(\mathfrak{b})$.

В силу формулы (1) из n° 1 и принимая во внимание предложение 2 и тот факт, что дробные идеалы $y^{-1}\mathfrak{a}$ дивизориальны,

имеем

$$\operatorname{div}(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}) = \operatorname{div}\left(\bigcap_{\substack{y\in\mathfrak{b}\\ y\neq 0}} y^{-1}\mathfrak{a}\right) = \sup_{\substack{y\in\mathfrak{b}\\ y\neq 0}} \operatorname{div}(y^{-1}\mathfrak{a}).$$

Но так как $D(A)$ является упорядоченной группой, то (*Алгебра*, гл. VI, § 1, п° 8)

$$\sup_{y\in\mathfrak{b},\, y\neq 0} \operatorname{div}(y^{-1}\mathfrak{a}) = \sup_{y\in\mathfrak{b},\, y\neq 0} (\operatorname{div}\mathfrak{a} - \operatorname{div}(y)) =$$
$$= \operatorname{div}\mathfrak{a} - \inf_{y\in\mathfrak{b},\, y\neq 0} \operatorname{div}(y) = \operatorname{div}\mathfrak{a} - \operatorname{div}\mathfrak{b}.$$

3. *Кольца Крулля*

Определение 3. *Кольцо A называется кольцом Крулля, если оно целостное и если существует семейство $(v_\iota)_{\iota\in I}$ — нормирований поля частных K кольца A, обладающее следующими свойствами:*

(AK_I) *нормирования v_ι дискретны;*

(AK_{II}) *пересечение колец нормирований v_ι равно A;*

(AK_{III}) *для любого $x\in K^*$ множество таких индексов $\iota\in I$, что $v_\iota(x)\neq 0$, конечно.*

Очевидно, условие (AK_{III}) достаточно проверять для элементов x из $A-(0)$.

Примеры. 1) Любое кольцо дискретного нормирования является кольцом Крулля.

2) Более общó, всякое кольцо *главных идеалов* A является кольцом Крулля. Действительно, пусть $(p_\iota)_{\iota\in I}$ — система представителей экстремальных элементов кольца A, и пусть v_ι — нормирование поля частных кольца A, определенное элементом p_ι (гл. VI, § 3, п° 3, пример 4). Немедленно устанавливается, что семейство $(v_\iota)_{\iota\in I}$ удовлетворяет условиям (AK_I), (AK_{II}) и (AK_{III}).

3) Пусть F — некоторое поле и $(R_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ — *конечное* семейство подколец поля F, являющихся кольцами Крулля. Тогда их *пересечение* $S=\bigcap_{j=1}^{n} R_j$ является кольцом Крулля. Действительно, для $1\leqslant j\leqslant n$ обозначим через $(v_{j\iota})_{\iota\in I_j}$ семейство нормирований поля частных кольца R_j, удовлетворяющее условиям (AK_I), (AK_{II}), (AK_{III}) (где A заменено на R_j). Обозначим через $w_{j\iota}$ ограничение $v_{j\iota}$ на поле частных кольца S. Тогда семейство $(w_{j\iota})_{1\leqslant j\leqslant n,\,\iota\in I_j}$ удовлетворяет, очевидно, усло-

вию (AK_{II}) (где A заменено на S), а также условию (AK_{III}), так как множество индексов j конечно. Нормирования $w_{j\iota}$ являются или дискретными, или несобственными. Рассматривая лишь те из полученных нормирований, которые являются дискретными, мы получаем, очевидно, семейство, удовлетворяющее условиям (AK_I), (AK_{II}) и (AK_{III}) (где A заменено на S). Следовательно, S — кольцо Крулля.

4) В частности, если A — кольцо Крулля и K' — подполе в поле частных K кольца A, то $K' \cap A$ является кольцом Крулля.

Теорема 2. *Пусть A — целостное кольцо. Для того чтобы A было кольцом Крулля, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

а) *кольцо A вполне целозамкнуто;*

б) *любое непустое семейство дивизориальных целых идеалов кольца A обладает максимальным элементом (относительно включения $\subset$).*

Кроме того, если $P(A)$ — множество экстремальных элементов из $D(A)$, то $P(A)$ является базисом $\mathbf{Z}$-модуля $D(A)$ и положительные элементы из $D(A)$ представляют собой линейные комбинации элементов из $P(A)$ с коэффициентами $\geqslant 0$.

Пусть A — кольцо Крулля. Оно вполне целозамкнуто (гл. VI, § 4, n° 5, следствие предложения 9). Пусть $(v_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство нормирований поля частных K кольца A, удовлетворяющее условиям (AK_I), (AK_{II}) и (AK_{III}). Можно считать, что нормирования v_ι нормированы (гл. VI, § 3, n° 6, определение 3). Для любого $\mathfrak{a} \in I(A)$ положим

$$v_\iota(\mathfrak{a}) = \sup_{\mathfrak{a} \subset Ax} (v_\iota(x)); \tag{3}$$

справедливо включение $v_\iota(\mathfrak{a}) \in \mathbf{Z}$, так как если a — ненулевой элемент из $\mathfrak{a}$, то соотношение $Ax \supset Aa$ влечет за собой $v_\iota(x) \leqslant v_\iota(a)$ (в силу AK_{II}), а это показывает, что семейство элементов $v_\iota(x)$ ($\mathfrak{a} \subset Ax$) ограничено. Установим следующие свойства:

1) *Пусть $\mathfrak{a}$ — дивизориальный дробный идеал; для того чтобы $y \in \mathfrak{a}$, необходимо и достаточно, чтобы $v_\iota(y) \geqslant v_\iota(\mathfrak{a})$ для любого $\iota \in I$.*

Действительно, поскольку $\mathfrak{a}$ дивизориален, соотношение $y \in \mathfrak{a}$ эквивалентно следующему: „из $\mathfrak{a} \subset Ax$ следует, что $y \in Ax$“. Однако, в силу свойства (AK_{II}), соотношение $y \in Ax$ эквивалентно утверждению: „$v_\iota(y) \geqslant v_\iota(x)$ для любого $\iota \in I$“. Отсюда вытекает 1).

2) *Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — два дивизориальных дробных идеала кольца A; для включения $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ необходимо и достаточно, чтобы $v_\iota(\mathfrak{a}) \geqslant v_\iota(\mathfrak{b})$ для любого $\iota \in I$.*

Это немедленно следует из свойства 1).

3) *Если* $x \in K^*$, *то* $v_\iota(Ax) = v_\iota(x)$.

Действительно, если $Ay \supset Ax$, то $v_\iota(y) \leqslant v_\iota(x)$, в силу (AK_{II}), и максимальное значение величины $v_i(y)$ достигается при $y = x$.

4) *Для любого* $\mathfrak{a} \in I(A)$ *те индексы* $\iota \in I$, *при которых* $v_\iota(\mathfrak{a}) \neq 0$, *образуют конечное множество.*

В самом деле, существуют такие x, y в поле K^*, что $Ax \subset \mathfrak{a} \subset Ay$. В силу свойств 2) и 3), имеют место соотношения $v_\iota(x) \geqslant v_\iota(\mathfrak{a}) \geqslant v_\iota(y)$ при любом $\iota \in I$. Теперь достаточно применить (AK_{III}).

Мы доказали, таким образом, следующую лемму:

Лемма 1. *Если* A — *кольцо Крулля и* $(v_\iota)_{\iota \in I}$ — *семейство нормированных нормирований поля* K, *удовлетворяющее условиям* (AK_I), (AK_{II}) *и* (AK_{III}), *то отображение* $\mathfrak{a} \to (v_\iota(\mathfrak{a}))_{\iota \in I}$ *является убывающим инъективным отображением множества дивизориальных целых идеалов кольца* A (*упорядоченного отношением* $\subset$) *в множество положительных элементов упорядоченной группы, являющейся прямой суммой* $\mathbf{Z}^{(I)}$.

Но всякое непустое множество положительных элементов, группы $\mathbf{Z}^{(I)}$ обладает минимальным элементом (*Алгебра*, гл. VI § 1, n° 13, теорема 2). Следовательно, A обладает сформулированным выше свойством б).

Обратно, пусть A — целостное кольцо, удовлетворяющее сформулированным выше свойствам а) и б). Так как A вполне целозамкнуто, множество $D(A)$ является упорядоченной группой (n° 2, теорема 1). Это решеточно-упорядоченная группа (n° 1, предложение 2). В силу условия б), сформулированного выше, любое непустое семейство положительных элементов из $D(A)$ обладает минимальным элементом. Пусть $P(A)$ — множество экстремальных элементов из $D(A)$. Тогда (*Алгебра*, гл. VI, § 1, n° 13, теорема 2) $P(A)$ служит базисом $\mathbf{Z}$-модуля $D(A)$ и положительные элементы из $D(A)$ — это линейные комбинации с целыми положительными коэффициентами элементов из $P(A)$.

Таким образом, для $x \in K^*$ определены целые рациональные числа $v_P(x)$, где $P \in P(A)$:

$$\operatorname{div}(x) = \sum_{P \in P(A)} v_P(x) \cdot P. \qquad (4)$$

Положим также $v_P(0) = +\infty$. Из соотношений

$$\operatorname{div}(xy) = \operatorname{div}(x) + \operatorname{div}(y)$$

и

$$\operatorname{div}(x+y) \geqslant \inf(\operatorname{div}(x), \operatorname{div}(y)),$$

выполняющихся для x, y и $x+y$ из K^*, следует, что отображения v_P являются *дискретными нормированиями* на поле K. Для того чтобы $x \in A$, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{div}(x) \geqslant 0$, т. е. чтобы $v_P(x) \geqslant 0$ для любого $P \in P(A)$. Таким образом, нормирования v_P удовлетворяют условиям $(\mathrm{AK_I})$ и $(\mathrm{AK_{II}})$, а также, очевидно, и условию $(\mathrm{AK_{III}})$.

Следствие. *Для того чтобы нётерово кольцо было кольцом Крулля, необходимо и достаточно, чтобы оно было целозамкнутым.*

Действительно, целозамкнутое нётерово кольцо вполне целозамкнуто (гл. V, § 1, n° 4).

Существуют кольца Крулля, не являющиеся нётеровыми, например кольцо многочленов $K[X_n]_{n \in \mathbf{N}}$ над полем K от бесконечного множества переменных (ср. упражнение 8).

4. Существенные нормирования кольца Крулля

Пусть A — кольцо Крулля и K — его поле частных. *Существенными нормированиями* поля K (или кольца A) называются нормирования v_P, определенные формулой (4) из n° 3 (для $x \in K^*$).

В процессе доказательства теоремы 2 было замечено, что нормирования v_P удовлетворяют условиям $(\mathrm{AK_I})$, $(\mathrm{AK_{II}})$ и $(\mathrm{AK_{III}})$ определения 3. Кроме того, эти дискретные нормирования v_P *нормированы*: действительно, для любого экстремального дивизора $P \in P(A)$ справедливо неравенство $P < 2P$; следовательно, если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — дивизориальные идеалы, соответствующие P и $2P$, то $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$; для $x \in \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ имеем $\operatorname{div}(x) \geqslant P$ и $\operatorname{div}(x) \not\geqslant 2P$, откуда $v_P(x) = 1$; тем самым наше утверждение доказано.

Предложение 5. *Пусть A — кольцо Крулля, K — его поле частных и $(v_P)_{P \in P(A)}$ — семейство его существенных нормирований. Пусть $(n_P)_{P \in P(A)}$ — семейство целых рациональных чисел, в котором отлично от нуля лишь конечное число элементов. Тогда множество таких $x \in K$, что $v_P(x) \geqslant n_P$ для любого $P \in P(A)$, является дивизориальным идеалом $\mathfrak{a}$ кольца A, для которого* $\operatorname{div} \mathfrak{a} = \sum_{P \in P(A)} n_P P$.

Пусть $\mathfrak{a}$ — дивизориальный идеал, для которого $\operatorname{div} \mathfrak{a} = \sum n_P P$, и пусть $x \in K^*$. Для того чтобы $x \in \mathfrak{a}$, необходимо и достаточно, чтобы $Ax \subset \mathfrak{a}$, т. е. чтобы $\operatorname{div}(x) \geqslant \operatorname{div}(\mathfrak{a})$ и, следовательно, в силу (4), чтобы $v_P(x) \geqslant n_P$ для любого $P \in P(A)$.

Предложение 6. *Пусть A — кольцо Крулля, K — его поле частных и $(v_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство нормирований поля K, обладающее свойствами из определения 3. Обозначим через A_ι кольцо нормирования v_ι. Пусть S — мультипликативная система кольца A, не содержащая нуля, и J — множество таких индексов $\iota\in I$, что v_ι равно нулю на S. Тогда $S^{-1}A=\bigcap_{\iota\in J}A_\iota$; в частности, $S^{-1}A$ является кольцом Крулля.*

Положим $B=\bigcap_{\iota\in J}A_\iota$. Тогда $S^{-1}\subset B$ и $A\subset B$. Обратно, пусть $x\in B$. Обозначим через J' конечное множество тех индексов ι, для которых $v_\iota(x)<0$. Если $\iota\in J'$ то $x\notin A_\iota$; следовательно, $\iota\notin J$; поэтому существует такой элемент $s_\iota\in S$, что $v_\iota(s_\iota)>0$. Пусть $n(\iota)$ — такое целое число >0, что $v_\iota(s_\iota^{n(\iota)}x)\geqslant 0$; положим $s=\prod_{\iota\in J'}s_\iota^{n(\iota)}$. Тогда $v_\iota(sx)\geqslant 0$ для всякого $\iota\in I$; следовательно, $sx\in A$ и $x\in S^{-1}A$. Таким образом, $B=S^{-1}A$.

Следствие 1. *Пусть P — экстремальный дивизор кольца A и $\mathfrak{p}$ — соответствующий дивизориальный идеал. Тогда идеал $\mathfrak{p}$ прост, кольцом нормирования v_P служит кольцо частных $A_\mathfrak{p}$, а поле вычетов нормирования v_P отождествляется с полем частных кольца $A/\mathfrak{p}$.*

Пусть $S=A-\mathfrak{p}$. В силу предложения 5 нормирование v_P равно нулю на S и больше нуля на $\mathfrak{p}$. Следовательно, $\mathfrak{p}$ является пересечением кольца A и идеала нормирования v_P; поэтому идеал $\mathfrak{p}$ прост. С другой стороны, для любого экстремального дивизора $Q\neq P$ имеет место соотношение $Q\not\geqslant P$; следовательно, дивизориальный идеал $\mathfrak{q}$, соответствующий Q, не содержится в $\mathfrak{p}$; таким образом, $\mathfrak{q}\cap S\neq\varnothing$; значит, в силу предложения 5, нормирование v_Q не равно нулю на всем множестве S. А теперь данное следствие вытекает из предложения 6 и предложения 3 гл. II, § 3, n° 1.

Следствие 2. *Пусть A — кольцо Крулля, K — его поле частных и $(v_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство нормирований, обладающее свойствами из определения 3. Тогда всякое существенное нормирование кольца A эквивалентно одному из нормирований v_ι.*

Пусть P — какой-нибудь экстремальный дивизор кольца A и $\mathfrak{p}$ — соответствующий дивизориальный идеал. В силу следствия 1 предложения 5, леммы 1 и утверждения 1) из доказательства теоремы 2 в n° 3, существует такой индекс $\iota\in I$, что кольцо A_ι нормирования v_ι содержит кольцо $A_\mathfrak{p}$ нормирования v_P. Поскольку v_ι и v_P имеют высоту 1, они эквивалентны (гл. VI, § 4, n° 5, предложение 6).

Предложение 7. *Пусть A — кольцо Крулля, $(v_P)_{P\in P(A)}$ — семейство его существенных нормирований и $\mathfrak{a}\in I(A)$. Тогда коэффициент при P в $\operatorname{div}\mathfrak{a}$ равен $\inf\limits_{y\in\mathfrak{a}}(v_P(y))$. Если $\mathfrak{p}$ — простой дивизориальный идеал, соответствующий экстремальному дивизору P, то $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}}=\tilde{\mathfrak{a}}A_{\mathfrak{p}}$.*

Поскольку $\mathfrak{a}=\sum\limits_{x\in\mathfrak{a}}Ax$, из предложения 2б) (n° 1) вытекает, что $\operatorname{div}\mathfrak{a}=\inf\limits_{x\in\mathfrak{a}}(\operatorname{div}(Ax))$, откуда и следует наше первое утверждение. Второе же отсюда выводится немедленно, так как $\operatorname{div}\tilde{\mathfrak{a}}=\operatorname{div}\mathfrak{a}$ и $A_{\mathfrak{p}}$ является кольцом дискретного нормирования v_P.

Предложение 8. *Пусть A — целозамкнутое нётерово кольцо.*

а) *Пусть P — некоторый экстремальный дивизор кольца A и $\mathfrak{p}$ — соответствующий дивизориальный простой идеал; для $n\in\mathbf{N}$ положим $\mathfrak{p}^{(n)}=\mathfrak{p}^nA_{\mathfrak{p}}\cap A$. Тогда $\mathfrak{p}^{(n)}$ есть множество таких $x\in A$, что $v_P(x)\geqslant n$, и представляет собой $\mathfrak{p}$-примарный идеал.*

б) *Пусть $\mathfrak{a}$ — дивизориальный целый идеал, $n_1P_1+\ldots n_rP_r$ — дивизор идеала $\mathfrak{a}$ (где P_i — различные экстремальные дивизориальные идеалы) и $\mathfrak{p}_i$ — простой дивизориальный идеал, соответствующий P_i. Тогда $\mathfrak{a}=\bigcap\limits_{i=1}^{r}\mathfrak{p}_i^{(n_i)}$ есть единственное примарное разложение идеала $\mathfrak{a}$ и идеалы $\mathfrak{p}_i$ не являются вложенными.*

В силу следствия 1 предложения 6, соотношение $x\in\mathfrak{p}^nA_{\mathfrak{p}}=(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})^n$ эквивалентно неравенству $v_P(x)\geqslant n$. С другой стороны, поскольку $A_{\mathfrak{p}}$ — кольцо дискретного нормирования, $(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})^n$ является $(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})$-примарным идеалом (гл. IV, § 2, n° 1, пример 4); следовательно $\mathfrak{p}^{(n)}$ является $\mathfrak{p}$-примарным идеалом (гл. IV, § 2, n° 1, предложение 3); тем самым доказано утверждение а). Предложение 5 показывает, что $\mathfrak{a}=\bigcap\limits_{i=1}^{r}\mathfrak{p}_i^{(n_i)}$. Так как $\mathfrak{p}_i\not\subset\mathfrak{p}_j$ при $i\neq j$, то это примарное разложение редуцировано; действительно, если бы $\mathfrak{p}_i^{(n_i)}\supset\bigcap\limits_{j\neq i}\mathfrak{p}_i^{(n_j)}\supset\prod\limits_{j\neq i}\mathfrak{p}_j^{n_j}$, то $\mathfrak{p}_i$ содержал бы один из $\mathfrak{p}_j$ при $j\neq i$ (гл. II, § 1, n° 1, предложение 1). Единственность разложения следует из предложения 5 гл. IV, § 2, n° 3.

5. Аппроксимация для существенных нормирований

Поскольку существенные нормирования кольца Крулля дискретны и нормированы, они попарно неэквивалентны, а потому независимы (гл. VI, § 7, n° 2). Следовательно, к ним

можно применить следствие 1 теоремы об аппроксимации (loc. cit., теорема 1): если заданы числа $n_i \in \mathbf{Z}$ и конечное число попарно различных существенных нормирований v_i, то существует такой элемент $x \in K$, что $v_i(x) = n_i$ для любого i. Однако в этом случае имеет место и более точный результат.

Предложение 9. *Пусть $v_1, \ldots, v_r$ — попарно различные существенные нормирования кольца Крулля A и $n_1, \ldots, n_r$ — некоторые целые рациональные числа. Тогда существует такой элемент x поля частных K кольца A, что $v_i(x) = n_i$ для $1 \leqslant i \leqslant r$ и $v(x) \geqslant 0$ для любого существенного нормирования v кольца A, отличного от $v_1, \ldots, v_r$.*

Действительно, пусть $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ — дивизориальные идеалы кольца A, соответствующие нормированиям $v_1, \ldots, v_r$. Существует такой элемент $y \in K$, что $v_i(y) = n_i$ при $1 \leqslant i \leqslant r$ (гл. VI, § 7, n° 2, следствие 1 теоремы 1). Существенные нормирования $w_1, \ldots, w_s$ кольца A, отличные от v_i, для которых целое число $w_j(y) = -m_j$ отрицательно, образуют конечное множество; пусть $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$ — соответствующие дивизориальные идеалы. Между идеалами $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r, \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$ не существует никакого соотношения включения, так как они соответствуют экстремальным дивизорам и притом являются простыми (следствие 1 предложения 6). Следовательно, целый идеал $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1^{m_1} \ldots \mathfrak{q}_s^{m_s}$ не содержится ни в одном из идеалов $\mathfrak{p}_i$ (гл. II, § 1, n° 1, предложение 1) и потому не содержится в их объединении (loc. cit., предложение 2). Значит, существует такой элемент $z \in \mathfrak{a}$, что $z \notin \mathfrak{p}_j$ для $1 \leqslant i \leqslant r$; тогда $v_1(z) = \ldots = v_r(z) = 0$ и $w_j(z) \geqslant m_j$ при $1 \leqslant j \leqslant s$. Следовательно, элемент $x = yz$ обладает требуемыми свойствами.

Следствие 1. *Пусть A — кольцо Крулля, K — его поле частных, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ — три дивизориальных дробных идеала кольца A, причем $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$. Тогда существует такой элемент $x \in K$, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap x\mathfrak{c}$.*

Действительно, пусть $(v_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство существенных нормирований кольца A, и пусть (m_i) (соответственно (n_i), (p_i)) — семейство целых рациональных чисел (среди которых лишь конечное множество отлично от нуля), такое, что $\mathfrak{a}$ (соответственно $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$) является множеством элементов $x \in K$, для которых $v_\iota(x) \geqslant m_\iota$ (соответственно n_ι, p_ι) при любом $\iota \in I$ (предложение 5, n° 4). Множество J тех индексов $\iota \in I$, для которых $m_\iota > n_\iota$, конечно. Так как $p_\iota = m_\iota = 0$ для всех, кроме конечного числа, индексов, то предложение 5 показывает, что сущест-

вует такой элемент $x \in K^*$, что $v_\iota(x^{-1}) + m_\iota = p_\iota$ для $\iota \in J$ и $v_\iota(x^{-1}) + m_\iota \geqslant p_\iota$ для $\iota \in I - J$. Следовательно, имеем $m_\iota = \sup(n_\iota, v_\iota(x) + p_\iota)$ для любого $\iota \in I$, откуда и следует равенство $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap x\mathfrak{c}$.

Следствие 2. *Пусть A — кольцо Крулля. Для того чтобы некоторый дробный идеал $\mathfrak{a}$ кольца A был дивизориальным, необходимо и достаточно, чтобы он представлял собой пересечение двух дробных главных идеалов.*

Достаточность этого условия очевидна (n° 1, определение 2). Необходимость же выводится из следствия 1: надо взять $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ главными и такими, что $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$.

6. Простые идеалы высоты 1 в кольце Крулля

Определение 4. *Пусть A — целостное кольцо. Говорят, что простой идеал $\mathfrak{p}$ в A имеет высоту* 1, *если он минимален среди ненулевых простых идеалов кольца A.*

Мы будем говорить также, что идеал (0) в A имеет *высоту* 0; следовательно, простой идеал *высоты* $\leqslant 1$ равен по определению идеалу (0) или идеалу высоты 1.

В дальнейшем мы определим в общем случае высоту простого идеала.

Теорема 3. *Пусть A — кольцо Крулля и $\mathfrak{p}$ — какой-нибудь целый идеал в A. Для того чтобы $\mathfrak{p}$ был дивизориальным идеалом, соответствующим экстремальному дивизору, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{p}$ был простым идеалом высоты* 1.

Если $\mathfrak{p}$ — дивизориальный идеал, соответствующий экстремальному дивизору, то известно (n° 4, следствие 1 предложения 6), что $\mathfrak{p}$ прост и что $A_\mathfrak{p}$ — кольцо дискретного нормирования. Поскольку $A_\mathfrak{p}$ не имеет простых идеалов, за исключением (0) и $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, идеалы (0) и $\mathfrak{p}$ являются единственными простыми идеалами в A, содержащимися в $\mathfrak{p}$ (гл. II, § 3, n° 1, лемма 3); следовательно, $\mathfrak{p}$ имеет высоту 1. Обратно, докажем сначала, что любой простой идеал $\mathfrak{p} \neq (0)$ кольца A содержит простой дивизориальный идеал $\mathfrak{q}$, соответствующий некоторому экстремальному дивизору. Действительно, поскольку $A_\mathfrak{p} \neq K$, кольцо $A_\mathfrak{p}$ представляет собой пересечение непустого семейства (A_ι) колец существенных нормирований (n° 4, предложение 6); каждое кольцо A_ι имеет вид $A_{\mathfrak{q}_\iota}$ (n° 4, следствие 1 предложения 6) и из $A_\mathfrak{p} \subset A_{\mathfrak{q}_\iota}$ следует, что $\mathfrak{q}_\iota \subset \mathfrak{p}$. Тем самым если $\mathfrak{p}$ имеет высоту 1, то $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$; тем самым доказано, что $\mathfrak{p}$ является дивизориальным идеалом, соответствующим экстремальному дивизору.

Следствие 1. *В кольце Крулля любой ненулевой простой идеал* $\mathfrak{m}$ *содержит простой идеал высоты* 1. *Если* $\mathfrak{m}$ *не имеет высоту* 1, *то* $\operatorname{div}\mathfrak{m}=0$ *и* $A:\mathfrak{m}=A$.

Первое утверждение было установлено в процессе доказательства теоремы 3. Если $\mathfrak{m}$ не имеет высоту 1, и если $\mathfrak{p}$ — простой идеал высоты 1, содержащийся в $\mathfrak{m}$, то $\mathfrak{p}\subset\tilde{\mathfrak{m}}$ и $\mathfrak{p}\neq\tilde{\mathfrak{m}}$; поскольку $\operatorname{div}\mathfrak{p}$ — экстремальный дивизор, мы обязательно получаем, что $\operatorname{div}\mathfrak{m}=\operatorname{div}\tilde{\mathfrak{m}}=0$. Следовательно, $\operatorname{div}(A:\mathfrak{m})=0$ и, так как $A:\mathfrak{m}$ — дивизориальный идеал (n° 1, предложение 1), $A:\mathfrak{m}=A$.

Следствие 2. *Пусть* A — *кольцо Крулля,* K — *его поле частных,* v — *некоторое нормирование на* K, *положительное на* A, *и* $\mathfrak{p}$ — *множество таких* $x\in A$, *что* $v(x)>0$. *Если простой идеал* $\mathfrak{p}$ *имеет высоту* 1, *то нормирование* v *эквивалентно некоторому существенному нормированию кольца* A.

Пусть B — кольцо нормирования v и $\mathfrak{m}$ — его идеал. Имеет место равенство $\mathfrak{m}\cap A=\mathfrak{p}$; следовательно, $A_{\mathfrak{p}}\subset B$. Однако $A_{\mathfrak{p}}$ является кольцом дискретного нормирования (теорема 3 и следствие 1 предложения 6). Поскольку $\mathfrak{p}\neq(0)$, справедливо неравенство $B\neq K$; следовательно, $B=A_{\mathfrak{p}}$ (гл. VI, § 4, n° 5, предложение 6).

Теорема 4. *Пусть* A — *целостное кольцо и* M — *множество его простых идеалов высоты* 1. *Для того чтобы* A *было кольцом Крулля, необходимо и достаточно, чтобы оно обладало следующими свойствами*:

(i) *для любого* $\mathfrak{p}\in M$ *кольцо* $A_{\mathfrak{p}}$ *является кольцом дискретного нормирования*;

(ii) *кольцо* A *представляет собой пересечение колец* $A_{\mathfrak{p}}$ *для* $\mathfrak{p}\in M$;

(iii) *для любого* $x\neq 0$ *из кольца* A *существует лишь конечное число таких* $\mathfrak{p}\in M$, *что* $x\in\mathfrak{p}$.

Кроме того, нормирования, соответствующие кольцам $A_{\mathfrak{p}}$ *при* $\mathfrak{p}\in M$, *являются существенными нормированиями кольца* A.

Очевидно, что эти условия достаточны. Их необходимость вытекает сразу же из теоремы 3 n° 4, следствия 1 из предложения 6 и того факта, что существенные нормирования кольца A удовлетворяют условиям определения 3 n° 3.

Предложение 10. *Пусть* A *целозамкнутое нётерово кольцо и* $\mathfrak{a}$ — *какой-нибудь целый идеал из* A. *Следующие условия эквивалентны*:

а) *идеал* $\mathfrak{a}$ *дивизориальный*;

б) *простые идеалы, ассоциированные с кольцом* $A/\mathfrak{a}$, *имеют высоту* 1.

Напомним, что если $\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$ — редуцированное примарное разложение идеала $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{p}_i$ — простой идеал, соответствующий идеалу $\mathfrak{q}_i$, то простые идеалы, ассоциированные с $A/\mathfrak{a}$, — это не что иное, как идеалы $\mathfrak{p}_i$ (гл. IV, § 2, n° 3, предложение 4). Тот факт, что из а) следует б), вытекает поэтому из предложения 8 n° 4. Обратно, если в предыдущих обозначениях $\mathfrak{p}_i$ имеет высоту 1, то $A_{\mathfrak{p}_i}$ является кольцом дискретного нормирования (теорема 4), но $\mathfrak{q}_i=\mathfrak{q}_iA_{\mathfrak{p}_i}\cap A$ (гл. IV, § 2, n° 1, предложение 3); обозначим через v_i существенное нормирование, соответствующее идеалу $\mathfrak{p}_i$; значит, существует такое целое число n_i, что $\mathfrak{q}_i$ представляет собой множество элементов $x\in A$, для которых $v_i(x)\geqslant n_i$. Тем самым доказано, что $\mathfrak{q}_i$ — дивизориальные идеалы (n° 4, предложение 5); поэтому $\mathfrak{a}$ тоже дивизориален.

7. *Приложение: новые характеризации колец дискретного нормирования*

Предложение 11. *Пусть* A — *локальное кольцо Крулля (в частности, целозамкнутое локальное нётерово кольцо) и* $\mathfrak{m}$ — *его максимальный идеал. Следующие условия эквивалентны:*

а) *кольцо* A *является кольцом дискретного нормирования;*

б) *идеал* $\mathfrak{m}$ *обратим;*

в) $A:\mathfrak{m}\neq A$;

г) *идеал* $\mathfrak{m}$ *дивизориальный;*

д) $\mathfrak{m}$ *является единственным ненулевым простым идеалом кольца* A.

Так как всякий ненулевой идеал кольца дискретного нормирования является главным (гл. VI, § 3, n° 6, предложение 9), то он обратим; следовательно, из а) следует б). Если $\mathfrak{m}$ обратим, обратным к нему будет $A:\mathfrak{m}$ (гл. II, § 5, n° 6, предложение 10); следовательно, $A:\mathfrak{m}\neq A$; таким обвазом, из б) следует в). Если $A:\mathfrak{m}\neq A$, то $A:(A:\mathfrak{m})\neq A$, но $\mathfrak{m}\subset A:(A:\mathfrak{m})$. Следовательно, $\mathfrak{m}=A:(A:\mathfrak{m})$, поскольку идеал $\mathfrak{m}$ максимален, так что идеал $\mathfrak{m}$ дивизориальный (n° 1, предложение 1 в)); таким образом, из в) следует г). Тот факт, что г) влечет за собой д), следует из теоремы 3 n° 6. Наконец, если $\mathfrak{m}$ — единственный простой идеал в A, отличный от нуля, то он имеет высоту 1; значит, $A_{\mathfrak{m}}$ является кольцом дискретного нормирования (n° 6, теорема 4). Так как кольцо A локально, $A_{\mathfrak{m}}=A$; импликация д) $\Rightarrow$ а) доказана.

8. Целое замыкание кольца Крулля в конечном расширении его поля частных

Предложение 12. *Пусть A — кольцо Крулля, K — его поле частных, K' — расширение конечной степени поля K и A' — целое замыкание кольца A в K'. Тогда A' является кольцом Крулля. Существенные нормирования кольца A' — это нормированные дискретные нормирования поля K', которые эквивалентны продолжениям существеных нормирований кольца A.*

Пусть $(v_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство продолжений на K' существенных нормирований кольца A. Так как степень $n=[K':K]$ конечна, нормирования v_ι являются дискретными нормированиями поля K' (гл. VI, § 8, n° 1, следствие 3 предложения 1). Пусть B_ι — кольцо нормирования v_ι; тогда $A'\subset \bigcap_{\iota\in I} B_\iota$ (гл. VI, § 1, n° 3, теорема 3). Обратно, всякий элемент x из $\bigcap_{\iota\in I} B_\iota$ является целым над любым из колец существенных нормирований кольца A (гл. VI, § 1, n° 3, следствие 3 теоремы 3). Значит, коэффициенты минимального многочлена x над полем K принадлежат A (гл. V, § 1, n° 3, следствие предложения 11), так что $x\in A'$. Мы получили, что $A'=\bigcap_{\iota\in I} B_\iota$. Пусть теперь x — произвольный ненулевой элемент из A'. Он удовлетворяет некоторому уравнению вида $x^s+a_{s-1}x^{s-1}+\ldots+a_0=0$, где $a_i\in A$ и $a_0\neq 0$; если $v_\iota(x)>0$, то $v_\iota(a_0)>0$. Но существенные нормирования v кольца A, для которых $v(a_0)>0$, образуют конечное множество, и нормирования поля K', продолжающие какое-либо заданное нормирование поля K, также составляют конечное множество (гл. VI, § 8, n° 3, теорема 1). Следовательно, $v_\iota(x)=0$ для всех, кроме конечного числа, индексов $\iota\in I$. Таким образом, мы доказали, что A' — кольцо Крулля (n° 3, определение 3).

Остается доказать, что нормирования v_ι эквивалентны существенным нормированиям кольца A' (n° 4, следствие 2 предложения 6), т. е. (n° 6, следствие 2 теоремы 3) что простой идеал $\mathfrak{p}_i$, образованный такими элементами $x\in A'$, что $v_i(x)>0$, имеет высоту 1. Если бы это было не так, то существовал бы такой простой идеал $\mathfrak{q}$ кольца A', отличный от (0) и от $\mathfrak{p}_\iota$, что $(0)\subset\mathfrak{q}\subset\mathfrak{p}_\iota$. Но в таком случае мы должны были бы иметь, что $(0)\subset\mathfrak{q}\cap A\subset\mathfrak{p}_\iota\cap A$, и идеал $\mathfrak{q}\cap A$ не совпадал бы ни с (0), ни с $\mathfrak{p}_\iota\cap A$ (гл. V, § 2, n° 1, следствие 1 предложения 1). Значит, простой идеал $\mathfrak{p}_\iota\cap A$ не имел бы высоту 1, а это противоречит тому факту, что он соответствует некоторому существенному нормированию кольца A.

Следствие. *Пусть* $\mathfrak{p}$ (соответственно $\mathfrak{p}'$) — *простой идеал высоты* 1 *в кольце* A (соответственно A') *и* v (соответственно v') —

существенное нормирование кольца A (соответственно A'), *которое этому идеалу соответствует. Для того чтобы* $\mathfrak{p}'$ *лежал над* $\mathfrak{p}$, *необходимо и достаточно, чтобы ограничение нормирования* v' *на* K *было эквивалентно* v.

Нормирование v' эквивалентно продолжению некоторого существенного нормирования w кольца A (предложение 12). Пусть $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}' \cap A$; это простой идеал высоты 1 кольца A. Для того чтобы ограничение нормирования v' на K было эквивалентно v, необходимо и достаточно, чтобы $w = v$, т. е. чтобы $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$.

9. Кольца многочленов над кольцом Крулля

Предложение 13. *Пусть* A — *кольцо Крулля,* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — *переменные. Кольцо* $A[X_1, \ldots, X_n]$ *является кольцом Крулля.*

Поскольку легко провести индукцию по n, достаточно доказать, что если X — некоторая переменная, то $A[X]$ — кольцо Крулля. Пусть K — поле частных кольца A. Поле частных кольца $A[X]$ совпадает с полем $K(X)$. Пусть I — множество унитарных многочленов кольца $K[X]$, неприводимых над K; для каждого $f \in I$ пусть v_f — нормирование поля $K(X)$, определенное многочленом f (гл. VI, § 3, n° 3, пример 4). С другой стороны, для любого существенного нормирования w кольца A пусть $\bar{w}$ обозначает продолжение w на $K(X)$, определенное равенством $\bar{w}\left(\sum_j a_j X^j\right) = \inf_j (w(a_j))$ для $\sum_j a_j X^j \in K[X]$ (гл. VI, § 10, n° 1, лемма 1). Ясно, что v_f и $\bar{w}$ дискретны, нормированы и что для каждого $u \in K[X]$ имеет место равенство $v_f(u) = 0$ (соответственно $\bar{w}(u) = 0$) для всех, кроме конечного числа, нормирований v_f (соответственно $\bar{w}$).

Для доказательства предложения поэтому достаточно установить, что $A[X]$ является пересечением колец нормирований v_f и $\bar{w}$. Но пересечение колец нормирований v_f равно $K[X]$. С другой стороны, для $\sum_j a_j X^j \in K[X]$ соотношение $\bar{w}\left(\sum_j a_j X^j\right) \geqslant 0$ эквивалентно тому, что „$w(a_j) \geqslant 0$ для любого j“; следовательно, утверждение „$\bar{w}\left(\sum_j a_j X^j\right) \geqslant 0$ для всякого нормирования $\bar{w}$“ эквивалентно тому, что „$w(a_j) \geqslant 0$ для любого j и любого существенного нормирования w кольца A“. Этим и доказано наше утверждение.

Замечание. Нормирования v_f и $\bar{w}$, введенные в доказательстве предложения 13, являются *существенными нормированиями* кольца $A[X]$. Достаточно доказать, что если V — множество нормирований v_f (f — неприводимый многочлен) и $\bar{w}$

(w — существенное нормирование для A), то для любого $v' \in V$ существует такой элемент $g \in K(X)$, *не принадлежащий* $A[X]$ что $v''(g) \geqslant 0$ для всех нормирований $v'' \in V$, отличных от v'; тем самым будет доказано, что $V - \{v'\}$ не удовлетворяет условию (AK_{II}), и потому утверждение будет вытекать из следствия 2 предложения 6 n° 4. Предположим сначала, что v' имеет вид $\bar{w}$: тогда можно взять в качестве g такой элемент $b \in K$, что $w(b) < 0$, $w'(b) \geqslant 0$ для всех существенных нормирований w' кольца A, отличающихся от w, так как в этом случае $v_f(b) = 0$ для любого неприводимого унитарного многочлена f из $K[X]$; существование элемента b, удовлетворяющего этим условиям, вытекает из предложения 9 n° 5. Предположим далее, что v' имеет вид v_f для некоторого неприводимого унитарного многочлена $f \in K[X]$ степени m; тогда можно взять $g = a/f$ при $a \in A$. Действительно, тогда $v_h(g) \geqslant 0$ для любого неприводимого унитарного многочлена $h \neq f$ из $K[X]$; остается выбрать $a \in A$ так, чтобы для любого существенного нормирования w кольца A значение $w(a)$ было не меньше нижней границы элементов $w(c_i)$, где c_i — коэффициенты многочлена f ($1 \leqslant i \leqslant m$); но существование такого элемента $a \in A$ вытекает из (AK_{III}) и предложения 9 n° 5.

Можно теперь утверждать (n° 6, теорема 4), что *простыми идеалами высоты* 1 *кольца* $A[X]$ *являются*:

1) *простые идеалы вида* $\mathfrak{p}A[X]$, *где* $\mathfrak{p}$ — *простой идеал высоты* 1 *в* A;

2) *простые идеалы вида* $\mathfrak{m} \cap A[X]$, *где* $\mathfrak{m}$ — *какой-либо простой идеал* (*обязательно главный*) *кольца* $K[X]$.

Идеалы второго типа характеризуются тем, что их пересечение с A *равно* 0.

10. Классы дивизоров в кольцах Крулля

Пусть A — кольцо Крулля. Напомним, что группа $D(A)$ дивизоров A является свободной коммутативной группой, порожденной множеством $P(A)$ своих экстремальных элементов (n° 3, теорема 2) и что $P(A)$ *отождествляется* с множеством простых идеалов высоты 1 кольца A (n° 6). Для $\mathfrak{p} \in P(A)$ мы будем обозначать через $v_{\mathfrak{p}}$ *нормированное* существенное нормирование, соответствующее идеалу $\mathfrak{p}$ (n° 4); напомним, что кольцом нормирования $v_{\mathfrak{p}}$ является кольцо $A_{\mathfrak{p}}$ (n° 4, следствие 1 предложения 6). Будем обозначать через $F(A)$ подгруппу группы $D(A)$, образованную главными дивизорами, и через $C(A)$ — группу $D(A)/F(A)$, т. е. *группу классов дивизоров* кольца A (n° 2).

Предложение 14. *Пусть A — кольцо Крулля и B — кольцо Крулля, содержащее A. Предположим, что выполнено следующее условие:*

(PDE) *для любого простого идеала $\mathfrak{P}$ высоты 1 кольца B простой идеал $\mathfrak{P} \cap A$ либо равен 0, либо имеет высоту 1.*

Для любого $\mathfrak{p} \in P(A)$ те идеалы $\mathfrak{P} \in P(B)$, для которых $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$, образуют конечное множество; положим

$$i(\mathfrak{p}) = \sum_{\mathfrak{P} \in P(B),\ \mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}} e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})\,\mathfrak{P},$$

где $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ обозначает индекс ветвления нормирования $v_{\mathfrak{P}}$ относительно нормирования $v_{\mathfrak{p}}$ (гл. VI, § 8, n° 11). Тогда i определяет по линейности возрастающий гомоморфизм группы $D(A)$ в группу $D(B)$, который обладает следующими свойствами:

а) *для любого ненулевого элемента x поля частных кольца A справедливо равенство*

$$i(\mathrm{div}_A(x)) = \mathrm{div}_B(x);$$

б) *каковы бы ни были D, D' из $D(A)$, имеет место равенство*

$$i(\sup(D, D')) = \sup(i(D),\ i(D')).$$

Пусть, в самом деле, $\mathfrak{p} \in P(A)$. Рассмотрим какой-нибудь ненулевой элемент a из $\mathfrak{p}$; идеалы $\mathfrak{P} \in P(B)$, содержащие a, образуют конечное множество (n° 6, теорема 4).

Докажем теперь утверждение а). В силу аддитивности можно предполагать, что $x \in A^* = A - \{0\}$. По определению $\mathrm{div}_B(x) = \sum_{\mathfrak{P} \in P(B)} v_{\mathfrak{P}}(x)\,\mathfrak{P}$. Для любого $\mathfrak{P} \in P(B)$, удовлетворяющего условию $v_{\mathfrak{P}}(x) > 0$, идеал $\mathfrak{P} \cap A$ отличен от нуля (так как $x \in \mathfrak{P}$) и, следовательно, имеет высоту 1 в силу условия (PDE). Полагая $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$, мы получаем из определения индекса ветвления, что $v_{\mathfrak{P}}(x) = e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})\, v_{\mathfrak{p}}(x)$ (поскольку $v_{\mathfrak{p}}$ и $v_{\mathfrak{P}}$ нормированы). Так как $\mathrm{div}_A(x) = \sum_{\mathfrak{p} \in P(A)} v_{\mathfrak{p}}(x)\,\mathfrak{p}$ и $i(\mathfrak{q}) = 0$ для всякого $\mathfrak{q} \in P(A)$, не имеющего вида $\mathfrak{Q} \cap A$, $\mathfrak{Q} \in P(B)$, то из предыдущего следует утверждение а).

Для доказательства утверждения б) положим

$$D = \sum_{\mathfrak{p} \in P(A)} n(\mathfrak{p}) \cdot \mathfrak{p} \quad \text{и} \quad D' = \sum_{\mathfrak{p} \in P(A)} n'(\mathfrak{p}) \cdot \mathfrak{p};$$

коэффициент при $\mathfrak{p}$ в выражении для $\sup(D, D')$ равен $\sup(n(\mathfrak{p}), n'(\mathfrak{p}))$. Пусть $\mathfrak{P}$ — произвольный элемент из $P(B)$. Если $\mathfrak{P} \cap A = (0)$, то коэффициенты при $\mathfrak{P}$ в выражениях для $i(D)$ и $i(D')$, а следовательно, и в $\sup(i(D), i(D'))$, равны нулю; далее, коэффициент при $\mathfrak{P}$ в выражении $i(\sup(D, D'))$ также равен нулю. Если же идеал $\mathfrak{P} \cap A \neq 0$, то он представляет собой некоторый простой идеал $\mathfrak{p}$ высоты 1 (в силу условия

(PDE)); полагая $e = e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$, мы видим, что коэффициенты при $\mathfrak{P}$ в выражениях $i(D)$, $i(D')$ и $i(\sup(D, D'))$ равны соответсвенно $en(\mathfrak{p})$, $en'(\mathfrak{p})$ и $e \cdot \sup(n(\mathfrak{p}), n'(\mathfrak{p}))$; соответствующий коэффициент в выражении $\sup(i(D), i(D'))$ равен $\sup(e \cdot n(\mathfrak{p}), e \cdot n'(\mathfrak{p})) = e \cdot \sup(n(\mathfrak{p}), n'(\mathfrak{p}))$. Этим доказано утверждение б).

В условиях предложения 14 из утверждения а) следует, что i определяет при переходе к факторгруппам *гомоморфизм* $\bar{i}$, называемый *каноническим*, из группы $C(A)$ в группу $C(B)$, который мы будем, допуская некоторую неаккуратность, обозначать иногда той же буквой i.

Условие (PDE) выполняется в следующих двух случаях:

1) Кольцо B является *целым* над A; в этом случае, *для того чтобы простой идеал* $\mathfrak{P}$ *кольца* B *имел высоту* 1, *необходимо и достаточно, чтобы идеал* $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$ *имел высоту* 1. Действительно, (0) является единственным простым идеалом в B, лежащим над идеалом (0) кольца A (гл. V, § 2, n° 1, следствие 1 предложения 1). Если $\mathfrak{P}$ имеет высоту 1, то $\mathfrak{p} \neq 0$; если бы идеал $\mathfrak{p}$ не имел высоту 1, то существовал бы простой идеал $\mathfrak{p}'$ кольца A, отличный от 0 и от $\mathfrak{p}$ и такой, что $0 \subset \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$; но тогда, поскольку кольцо B целостное и A целозамкнуто, существовал бы простой идеал $\mathfrak{P}'$ кольца B, такой, что $\mathfrak{P}' \cap A = \mathfrak{p}'$ и $\mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$ (гл. V, § 2, n° 4, теорема 3), что противоречит условию. Обратно, если $\mathfrak{p}$ — идеал высоты 1, то не может существовать простой идеал $\mathfrak{P}'$ кольца B, отличный от 0 и от $\mathfrak{P}$ и такой, что $0 \subset \mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$, так как иначе $0 \subset \mathfrak{P}' \cap A \subset \mathfrak{p}$ и $\mathfrak{P}' \cap A$ отличен от 0 и от $\mathfrak{p}$ в силу следствия 1 предложения 1 гл. V, § 2, n° 1.

2) Кольцо B является *плоским* A-модулем. Точнее, имеет место

Предложение 15. *Пусть* A *и* B — *такие кольца Крулля, что* B *содержит* A *и является плоским* A-*модулем. Тогда*

а) *выполняется условие* (PDE) *из предложения* 14;

б) *для любого дивизориального идеала* $\mathfrak{a}$ *кольца* A *идеал* $B\mathfrak{a}$ *является дивизориальным идеалом кольца* B, *соответствующим дивизору* $i(\mathrm{div}_A(\mathfrak{a}))$.

Для доказательства пункта а) предположим, что существует простой идеал $\mathfrak{P}$ высоты 1 в кольце B, для которого идеал $\mathfrak{P} \cap A$ отличен от нуля и не имеет высоту 1. Выберем произвольный элемент $x \neq 0$ из $\mathfrak{P} \cap A$. Идеалы $\mathfrak{p}_i$ высоты 1 кольца A, содержащие x, образуют конечное множество, и ни один из них не содержит $\mathfrak{P} \cap H$. Значит, существует такой элемент y из $\mathfrak{P} \cap A$, что $y \notin \mathfrak{p}_i$ ни для какого i (гл. II, § 2, n° 1, предложение 2). Таким образом, дивизоры $\mathrm{div}_A(x)$ и $\mathrm{div}_A y$ являются взаимно простыми элементами упорядоченной группы $D(A)$,

так что $\sup(\mathrm{div}_A(x), \mathrm{div}_A(y)) = \mathrm{div}_A(x) + \mathrm{div}_A(y) = \mathrm{div}_A(xy)$. Поскольку идеалы $Ax \cap Ay$ и Axy дивизориальные, отсюда следует, что $Ax \cap Ay = Axy$. Так как B — плоский A-модуль, то $Bx \cap By = Bxy$ (гл. 1, § 2, n° 6, предложение 6). Отсюда следует, что $\sup(v_{\mathfrak{P}}(x), v_{\mathfrak{P}}(y)) = v_{\mathfrak{P}}(xy) = v_{\mathfrak{P}}(x) + v_{\mathfrak{P}}(y)$, а это противоречит неравенствам $v_{\mathfrak{P}}(x) > 0$ и $v_{\mathfrak{P}}(y) > 0$ (которые справедливы, поскольку x и y лежат в $\mathfrak{P}$). Таким образом, а) доказано от противного.

Докажем б). Если $\mathfrak{a}$ — дивизориальный идеал кольца A, то он представляет собой пересечение двух дробных главных идеалов (n° 5, следствие 2 предложения 9); пусть $\mathfrak{a} = d^{-1}(Aa \cap Ab)$, где a, b, d принадлежат A^*. Поскольку B является плоским над A, то $B\mathfrak{a} = d^{-1}(Ba \cap Bb)$ (гл. 1, § 2, n° 6, предложение 6); тем самым доказано, что $B\mathfrak{a}$ — дивизориальный идеал и что $\mathrm{div}_B(B\mathfrak{a}) = \sup(\mathrm{div}_B(a), \mathrm{div}_B(b)) - \mathrm{div}_B(d)$. Используя предложение 14, а) и б), мы видим, что

$$\mathrm{div}_B(B\mathfrak{a}) = \sup(i(\mathrm{div}_A(a)), i(\mathrm{div}_A(b))) - i(\mathrm{div}_A(d)) =$$
$$= i(\sup(\mathrm{div}_A(a), \mathrm{div}_A(b))) - i(\mathrm{div}_A(d)) = i(\mathrm{div}_A(Aa \cap Ab)) -$$
$$- i(\mathrm{div}_A(d)) = i\big(\mathrm{div}_A\big(d^{-1}(Aa \cap Ab)\big)\big) = i(\mathrm{div}_A(\mathfrak{a})).$$

Следствие. *Пусть A — локальное кольцо Крулля и B — кольцо дискретного нормирования, причем B доминирует над A; предположим, что B — плоский A-модуль. Тогда A является либо полем, либо кольцом дискретного нормирования.*

Действительно, пусть $\mathfrak{M}$ — максимальный идеал в B. В силу условия (PDE), идеал $\mathfrak{M} \cap A$ равен нулю или имеет высоту 1. Так как, по предположению, это максимальный идеал кольца A, наше утверждение вытекает из предложения 11 n° 7.

Замечание. В первом из двух предшествующих случаев отображение i: $D(A) \to D(B)$ *инъективно*: поскольку элементы из $P(B)$ образуют базис группы $D(B)$ и любые два различных идеала из $P(A)$ не могут быть следами на A одного идеала из $P(B)$, достаточно показать, что $i(\mathfrak{p}) = 0$ для любого $\mathfrak{p} \in P(A)$; но это следует из теоремы 1 гл. V, § 2, n° 1. Аналогичным образом можно убедиться в том, что когда B является *строго плоским* A-модулем, отображение i инъективно (гл. II, § 2, n° 5, следствие 4 из предложения 11).

Теперь мы займемся изучением канонического гомоморфизма $\bar{i}$ группы $C(A)$ в группу $C(B)$ для некоторых пар колец Крулля A, B.

Предложение 16. *Пусть A — кольцо Зарисского, пополнение $\hat{A}$ которого является кольцом Крулля. Тогда A является кольцом Крулля и канонический гомоморфизм $\bar{i}$ группы $C(A)$ в $C(\hat{A})$*

(*который определен, ибо* $\hat{A}$ *— плоский* A*-модуль*; ср. гл. III, § 3, n° 4, теорема 3) *инъективен*.

Так как $\hat{A}$ целостное и $A \subset \hat{A}$, то кольцо A целостное. Пусть L — поле частных кольца $\hat{A}$ и $K \subset L$ — поле частных кольца A. Поскольку $A = \hat{A} \cap K$ (гл. III, § 3, n° 5, следствие 4 предложения 9), кольцо A является кольцом Крулля (n° 3, пример 4). Инъективность отображения $\bar{i}$: $C(A) \to C(\hat{A})$ следует из предложения 15б) и того факта, что если $\mathfrak{b}\hat{A}$ — главный идеал, то и $\mathfrak{b}$ — главный идеал (гл. III, § 3, n° 5, следствие 3 предложения 9).

Пусть теперь A — кольцо Крулля и S — *мультипликативная* система кольца A, не содержащая 0. Группа $D(A)$ (соответственно $D(S^{-1}A)$) является свободной коммутативной группой, базисом которой служит множество элементов $\operatorname{div}(\mathfrak{p})$ (соответственно $\operatorname{div}(S^{-1}\mathfrak{p})$), где $\mathfrak{p}$ пробегает множество простых идеалов высоты 1 кольца A (соответственно множество простых идеалов высоты 1 из A, для которых $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$) (n° 4, предложение 6), и если $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$, то $i(\operatorname{div}(\mathfrak{p})) = \operatorname{div}(S^{-1}\mathfrak{p})$. Таким образом, $D(S^{-1}A)$ отождествляется с *прямым слагаемым* группы $D(A)$ (порожденным такими элементами $\operatorname{div}(\mathfrak{p})$, что $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$), дополнение к которому является свободной коммутативной подгруппой группы $D(A)$, имеющей в качестве базиса множество тех $\operatorname{div}(\mathfrak{p})$, для которых $\mathfrak{p} \cap S \neq \varnothing$; обозначим это дополнение через G. Поскольку отображение i: $D(A) \to D(S^{-1}A)$ сюръективно, отображение $\bar{i}$: $C(A) \to C(S^{-1}A)$ также является сюръективным; кроме того, имеем

$$G/(G \cap F(A)) = (G + F(A))/F(A) = \operatorname{Ker}(\bar{i}). \tag{5}$$

В самом деле, если некоторый элемент из $D(S^{-1}A)$ равен $\operatorname{div}_{S^{-1}A}(x/s)$, где $x \in A$ и $s \in S$, то он является образом относительно i главного дивизора $\operatorname{div}_A(x)$ (предложение 14).

Предположим теперь, что система S порождена таким семейством элементов $(p_\iota)_{\iota \in I}$ кольца A, что главные идеалы Ap_ι *просты*. Тогда, если $\mathfrak{p}$ — простой идеал высоты 1 в кольце A, для которого $\mathfrak{p} \cap S \neq \varnothing$, то он содержит некоторое произведение степеней элементов p_ι и, следовательно, один из элементов p_ι, скажем элемент p_α. Поскольку Ap_α — ненулевой простой идеал и $\mathfrak{p}$ имеет высоту 1, из сказанного вытекает равенство $\mathfrak{p} = Ap_\alpha$. Следовательно, в предыдущих обозначениях $G \subset F(A)$, а формула (5) показывает, что ядро отображения $\bar{i}$ равно нулю. Таким образом, установлен следующий результат:

Предложение 17. *Пусть A — кольцо Крулля и S — мультипликативная система в A, не содержащая нуля. Тогда канонический гомоморфизм $\bar{i}$ группы $C(A)$ в $C(S^{-1}A)$ сюръективен. Если, кроме того, S порождается семейством таких элементов p_ι, что главные идеалы Ap_ι просты, то гомоморфизм $\bar{i}$ биективен.*

В качестве другого приложения формулы (5) рассмотрим следующую ситуацию. Пусть R — кольцо Крулля: возьмем в качестве A кольцо многочленов $A=R[X]$ (n° 9, предложение 13), а в качестве S — множество $R-(0)$ постоянных ненулевых многочленов из A. Простыми идеалами $\mathfrak{p}$ высоты 1 в кольце A, для которых $\mathfrak{p}\cap S\neq\varnothing$, являются идеалы вида $\mathfrak{p}_0A$, где $\mathfrak{p}_0$ — простой идеал высоты 1 из R (n° 9, замечание). Следовательно, в обозначениях, которые были введены выше, G отождествляется с $D(R)$ посредством отождествления $\mathrm{div}_A(\mathfrak{p}_0A)$ и $\mathrm{div}_R(\mathfrak{p}_0)$. С другой стороны, $G\cap F(A)$ отождествляется с $F(R)$: в самом деле, если идеал $\mathfrak{a}_0$ из R порождает главный идеал $\mathfrak{a}_0A=f(X)A$ в $A=R[X]$, то $f(0)\in\mathfrak{a}_0A$, так как $\mathfrak{a}_0A$ является градуированным идеалом кольца A (градуированного с помощью обычной степени многочлена). Значит, $f(0)\in\mathfrak{a}_0$; кроме того, для $a\in\mathfrak{a}_0$ имеет место равенство $a=f(X)g(X)$ при $g(X)\in A$, откуда, сравнивая члены степени 0, получаем: $a=f(0)g(0)$. Отсюда немедленно следует, что $\mathfrak{a}_0$ — главный идеал в R, порожденный элементом $f(0)$. Наконец, обозначая через K поле частных кольца R, мы можем отождествить $S^{-1}A$ с кольцом многочленов $K[X]$, которое является кольцом главных идеалов; следовательно, $C(S^{-1}A)=(0)$. Таким образом, в силу формулы (5), $C(A)=\mathrm{Ker}(\bar{i})$ отождествляется с $C(R)$, и мы доказали следующий результат:

Предложение 18. *Пусть R — кольцо Крулля и A — кольцо многочленов $R[X]$. Канонический гомоморфизм группы $C(R)$ в $C(R[X])$ биективен.*

Упражнения

1) Пусть K — поле и A — подкольцо кольца формальных рядов $K[[T]]$, образованное рядами, в которых коэффициент при T равен 0; тогда A есть целостное нётерово локальное кольцо, не являющееся целозамкнутым.

а) Показать, что любой главный идеал кольца A, отличный от нуля и от A, порождается единственным элементом вида $T^n+\lambda T^{n+1}$, где $\lambda\in K$, $n\geqslant 2$. Кроме того, этот идеал содержит все степени T^m при $m\geqslant n+2$. Вывести отсюда, что неглавные идеалы в A — это идеалы вида AT^n+AT^{n+1} при $n\geqslant 2$.

б) Показать, что любой дробный идеал кольца A дивизориален (доказать, что любой неглавный идеал является пересечением двух главных). Описать структуру моноида $D(A)$.

Единственными простыми идеалами кольца A являются максимальный идеал $\mathfrak{m} = AT^2 + AT^3$ и (0).

2) а) В факториальном [1]) кольце $K[X, Y]$ многочленов от двух переменных над полем K построить пример двух таких главных идеалов $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, что идеал $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ не является дивизориальным.

б) Пусть K — квадратичное расширение поля $\mathbf{Q}(X)$ рациональных функций от одной перемеиной над $\mathbf{Q}$, полученное присоединением к $\mathbf{Q}(X)$ корня y многочлена $Y^2 - 2X \in \mathbf{Q}(X)[Y]$. Пусть A — подкольцо в K, порожденное кольцом $\mathbf{Z}$, элементами X и y. Кольцо A является целозамкнутым нётеровым кольцом. Показать, что $\mathfrak{p} = AX + Ay$ — простой идеал высоты 1, но $\mathfrak{p}^2$ не является дивизориальным идеалом (показать, что $X^{-1}\mathfrak{p}^2$ есть простой идеал, строго содержащий идеал $\mathfrak{p}$). Кроме того, $\mathfrak{p} \cdot (A\mathfrak{p}) \neq A$.

в) Пусть A — целозамкнутое нётерово локальное кольцо, максимальный идеал $\mathfrak{m}$ которого не является простым идеалом высоты $\leqslant 1$. Пусть $\mathfrak{p}$ — какой-нибудь простой идеал в A высоты 1; для любого целого $i > 0$ пусть $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{p} + \mathfrak{m}^i$, показать, что $\operatorname{div}\left(\bigcap_i \mathfrak{a}_i\right)$ отлнчается от $\sup_i (\operatorname{div}(\mathfrak{a}_i))$.

3) Пусть A — целостное нётерово кольцо и $\mathfrak{p}$ — некоторый простой идеал высоты 1. Показать, что $A : \mathfrak{p} \neq A$ (в поле частных кольца A). (Если $c \neq 0$ — некоторый элемент из $\mathfrak{p}$, то заметить, что $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(A/Ac)$ и вывести отсюда, что $Ac : \mathfrak{p} \neq Ac$ в силу упражнения 30 гл. IV, § 2. Верен ли этот результат для целостного кольца, не являющегося нётеровым (рассмотреть кольцо недискретного нормирования высоты 1)?

4) Пусть A — вполне целозамкнутое целостное кольцо и $\mathfrak{m}$ — некоторый максимальный идеал в A. Показать, что идеал $\mathfrak{m}$ или обратнм, или не является дивизориальным и $A : \mathfrak{m} = A$. (Заметить, что если $\mathfrak{m}$ не обратим, то обязательно $\mathfrak{m} \cdot (A : \mathfrak{m})^k = \mathfrak{m}$ для любого целого $k > 0$.)

6) [2]) Пусть A — целостное кольцо.

а) Для того чтобы дивизориальный идеал $\mathfrak{a}$ кольца A был таким, что элемент $\operatorname{div}(\mathfrak{a})$ обратим в $D(A)$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{a} : \mathfrak{a} = A$ (ср. *Алгебра*, гл. VI, § 1, упражнение 30). В частности, для того чтобы $\mathfrak{a} : \mathfrak{a} = A$ выполнялось для любого дивизориального идеала $\mathfrak{a}$ кольца A, необходимо и достаточно, чтобы A было вполне целозамкнуто.

б) Для того чтобы $\mathfrak{a} : \mathfrak{a} = A$ для любого идеала $\mathfrak{a} \neq 0$ конечного типа в A, необходимо и достаточно, чтобы кольцо A было целозамкнуто.

7) Пусть K — поле, $(v_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство дискретных нормирований поля K, удовлетворяющее условиям $(\mathrm{AK_I})$ и $(\mathrm{AK_{III}})$ n° 3 и такое, что для всякого целого положительного числа r, всякого семейства целых рациональных чисел $(n_h)_{1 \leqslant h \leqslant r}$ и любого семейства $(\iota_h)_{1 \leqslant h \leqslant r}$ различных элементов из I существует такой элемент $x \in K$, что $v_{\iota_h}(x) = n_h$ для $1 \leqslant h \leqslant r$ и $v_\iota(x) \geqslant 0$ для ι, отличного от ι_h. Показать, что пересечение колец нормирований v_ι является кольцом Крулля A, для которого K является полем частных, и что $(v_\iota)_{\iota \in I}$ представляет собой семейство существенных нормирований кольца A. (Показать сначала, что K является полем частных кольца A, и следовательно, A — кольцо Крулля; показать, далее, что для любого $\iota \in I$ простой идеал из A, образованный такими x, что $v_\iota(x) > 0$, обязательно имеет высоту 1, проводя для этого рассуждения от противного и используя следствие 2 предложения 6 n° 4.)

8) Пусть A — кольцо Крулля. Показать, что для любого множества I кольцо многочленов $A[X_\iota]_{\iota \in I}$ является кольцом Крулля. (Заметить, что если B — кольцо Крулля, то нормирования, индуцнрованные на B сущест-

[1]) Это понятие вводится в § 3. — *Прим. ред.*

[2]) Упражнение 5 исключено при переводе в связи с неточностью формулировки. — *Прим. ред.*

венными нормированиями кольца $B[X_1, \ldots, X_n]$, являются существенными нормированиями кольца B.)

¶ 9) а) Пусть B — кольцо дискретного нормирования. $A = B[[X]]$ — кольцо формальных рядов от одной переменной над B и $C = A_x$ — кольцо частных $S^{-1}A$, где S — мультипликативное множество элементов X^h $(h \geqslant 0)$. Пусть v — нормированное нормирование на кольце B; для любого элемента $f = \sum_{n \geqslant h} b_n X^n \neq 0$ кольца C, где $b_h \neq 0$ в B (h положительно или отрицательно), положим $s(f) = v(b_h)$. Показать, что s является *евклидовой статмой* на C (*Алгебра*, гл. VII, § 1, упражнение 7), для которой $s(fg) = s(f) + s(g)$ для ненулевых f, g из C. (Если $s(f) = p \geqslant s(g) = q$ и если h — наименьшая из степеней ненулевых членов в f, то показать, что существует такой элемент $u \in C$, что $f - ug = X^{h+1}f_1$, где $f_1 \in A$ и, рассуждая от противного, получить отсюда существования процесса „евклидова деления" в C.) Если $s(f) = 0$, то элемент f обратим в C.

) Показать, что кольцо A не является дедекиндовым.

б) Вывести из а), что если B — кольцо Крулля, то $A = B[[X]]$ также является кольцом Крулля. (Если K — поле частных кольца B, то заметить, что A представляет собой пересечение кольца $K[[X]]$ и некоторого семейства (C_ι) колец главных идеалов, имеющих то же поле частных, что и A, и что любой элемент из A обратим почти во всех кольцах C_ι.)

10) Пусть A — кольцо Крулля, K — его поле частных, L — некоторое поле, содержащее K, и (B_α) — возрастающее фильтрующееся семейство колец Крулля, содержащих A и содержащихся в L и таких, что поле частных L_α кольца B_α является алгебраическим расширением конечной степени поля K, а B_α представляет собой целое замыкание кольца A в поле L_α. Для любого существенного нормирования v кольца A и любого α пусть $e_\alpha(v)$ обозначает сумму индексов ветвления нормирований кольца B_α, продолжающих нормирование v. Показать, что, для того чтобы объединение колец B_α было кольцом Крулля, необходимо и достаточно, чтобы для любого существенного нормирования v кольца A множество чисел $e_\alpha(v)$ было ограничено.

¶ 11) Говорят, что дивизор d в целостном кольце A является дивизором *конечного типа*, если он имеет вид $\operatorname{div}(\mathfrak{a})$, где $\mathfrak{a}$ — некоторый дробный идеал конечного типа (не обязательно дивизорнальный; ср. б)).

а) Показать, что если A — кольцо Крулля, то любой дивизор из $D(A)$ имеет вид $\operatorname{div}(\mathfrak{a})$, где $\mathfrak{a} = Ax + Ay$, а x, y — ненулевые элементы поля частных кольца A (воспользоваться следствием 2 предложения 9 n° 5).

б) Показать, что существуют кольца Крулля, в которых имеется простой идеал высоты 1 (и, следовательно, дивизориальный), не являющийся идеалом конечного типа [1]).

---

[1]) Как показали Икин и Хейнзер (Eakin P. M. Jr., Heinzer W. J., Some open questions on minimal primes of a Krull domain, Canad. J. Math., 20 (1968), № 5, 1261—1264), метод построения такого кольца, предложенный в оригинале настоящей книги, приводит на самом деле к нётерову кольцу. Те же авторы предложили следующий пример кольца Крулля B, отвечающий на поставленный вопрос (Eakin P. M. Jr., Heinzer W. J., Non finiteness in finite dimensionol Krull domains, *J. Algebra*, 14 (1970), № 3, 333—340). Пусть R — некоторое целозамкнутое нётерово кольцо, $\mathfrak{p}$ — некоторый простой идеал высоты 1 в R, v — соответствующее ему нормированное дискретное нормирование. Пусть B — подкольцо в $R[X, X^{-1}]$, состоящее из всех таких элементов $\sum_{i=-h}^{q} c_i X^i$, что $v(c_i) \geqslant i$ для всех $i > 0$. Тогда B — кольцо Крулля.

Пусть v' — продолжение нормирования v на B, задаваемое формулой

12) а) Пусть A — целозамкнутое кольцо, $f(X)=\sum_i a_i X^i$ и $g(X)=\sum_j b_j X^j$ — два многочлена из $A[X]$; показать, что если $c\in A$ — такой элемент, что все коэффициенты из $f(X)g(X)$ принадлежат идеалу Ac, то все произведения $a_i b_j$ принадлежат Ac (свести к случаю, когда A является кольцом нормирования).

б) Если A — кольцо, определенное в упражнении 1, то привести пример двух многочленов f, g степени 1 из $A[X]$ и элемента $c\in A$, для которых утверждение из а) не имеет места (положить $c=T^4+T^5$).

в) В предположениях пункта а) пусть $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ — идеалы в A, порожденные соответственно коэффициентами многочленов f, g и fg; показать, что $\operatorname{div}(\mathfrak{c})=\operatorname{div}(\mathfrak{a})+\operatorname{div}(\mathfrak{b})$. Привести пример, когда $\tilde{\mathfrak{c}}\neq\tilde{\mathfrak{a}}\cdot\tilde{\mathfrak{b}}$. Показать, что если идеал $\mathfrak{c}$ — главный, то $\mathfrak{c}=\mathfrak{ab}$ и идеалы $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ обратимы; если, кроме того, A — локальное кольцо, то $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — главные идеалы.

13) Пусть A — целостное кольцо и $(p_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство таких ненулевых элементов, что главные идеалы Ap_ι просты; пусть S — мультипликативная система, порожденная элементами p_ι.

а) Показать, что $A=S^{-1}\cap\left(\bigcap_\iota A_{Ap_\iota}\right)$.

б) Предположим, что всякое непустое семейство *главных идеалов* кольца A обладает максимальным элементом. Показать, что каждое из колец A_{Ap_ι} является кольцом дискретного нормирования (ср. гл. VI, § 3, n° 5, предложение 9). Вывести отсюда, что если кольцо $S^{-1}A$ целозамкнуто (соответственно вполне целозамкнуто), то и A целозамкнуто (соответственно вполне целозамкнуто). Если $S^{-1}A$ — кольцо Крулля, то показать, что A — кольцо Крулля.

14) Пусть A — кольцо Крулля и S — *насыщенная* мультипликативная система в A, не содержащая нуля (гл. II. § 2, упражнение 1). Показать, что если канонический гомоморфизм $\bar{\imath}: C(A)\to C(S^{-1}A)$ (n° 10, предложение 17) биективен, то S порождается семейством (p_ι) таких элементов, что каждый идеал Ap_ι является простым (заметить, что любой дивизориальный простой идеал, пересекающий S, является главным).

¶ 15) а) Пусть A — целостное кольцо и a, b — два таких ненулевых элемента из A, что $Aa\cap Ab=Aab$. Показать, что в кольце многочленов $A[X]$ главный идеал, порожденный элементом $aX+b$, является простым (дока-

---

$v'\left(\sum c_i X^i\right)=\inf\{v(c_i)\}$; v' есть существенное нормирование для кольца B, и пусть $\mathfrak{q}$ — соответствующий ему простой идеал высоты 1 в B. Доказывается эквивалентность следующих свойств:

1) существует такое целое положительное число m, что $\mathfrak{p}^{(s)}=\sum_{\substack{n_1+\ldots+n_t=s\\ 1\leqslant n_i\leqslant 1}}\mathfrak{p}^{(n_1)}\ldots\mathfrak{p}^{(n_t)}$ для всех $s>m$; 2) кольцо B нётерово; 3) простой идеал $\mathfrak{q}$ обладает примарным идеалом конечного типа. Как показал Рис (Rees D., On a problem of Zariski, *Ill. J. Math.* 2 (1958), 145—149), если R — однородное координатное кольцо неособой кубической кривой над полем комплексных чисел, то в R имеется простой идеал высоты 1, не удовлетворяющий условию 1). Тем самым соответствующий простой идеал $\mathfrak{q}$ высоты 1 в кольце Крулля B не только сам не является конечно порожденным, но и не имеет примарных идеалов конечного типа. — *Прим. ред.*

зать, используя индукцию по степени f, что любой многочлен $f(X) \in A[X]$, для которого $f(-b/a) = 0$, делится на $aX + b$.

б) Пусть A — кольцо Крулля и a, b — два таких элемента из A, что Aa и $Aa + Ab$ являются различными простыми идеалами. Показать, что $A[X]/(aX + b)$ есть кольцо Крулля и что группа $C(A[X]/(aX + b))$ изоморфна $C(A)$. Заметить, используя а), что кольцо $A[X]/(aX + b)$ изоморфно кольцу $A[b/a] = B$; показать, что Ba является простым идеалом в B. Обратить внимание на то, что $A[a^{-1}] = B[a^{-1}]$ является кольцом Крулля и воспользоваться упражнением 12).

в) Пусть A — целозамкнутое нётерово кольцо и a, b — два элемента из радикала $\mathfrak{r}$ кольца A. Предположим, что идеал $Aa + Ab$ является *недивизориальным* простым идеалом; показать, что Aa и Ab представляют собой простые идеалы. (Сначала доказать, что $Aa \cap Ab = Aab$, рассматривая идеалы из $\mathrm{Ass}(A/Aa)$. Показать, далее, что из соотношений $xy \in Ab$ и $y \notin Aa + Ab$ вытекает, что $x \in Ab + Aa^h$ для всякого h, используя индукцию по h; вывести отсюда, что тогда $x \in Ab$. Наконец, получить из предыдущего, что если $xy \in Ab$, $x \notin Ab$, $y \notin Ab$, то обязательно $x \in Ab + Aa^h$ и $y \in Ab + Aa^h$ для любого h, рассуждая индукцией по h; получить отсюда противоречие.)

16) Пусть $A = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} A_n$ — градуированное кольцо Крулля. Обозначим через $D_g(A)$ (соответственно $F_g(A)$) группу, порожденную дивизорами *градуированных* целых дивизориальных идеалов (соответственно дивизорами $\mathrm{div}(a)$, где a — *однородный* элемент из A); положим $C_g = D_g(A)/F_g(A)$. Пусть S — мультипликативное множество ненулевых однородных элементов из A.

а) Показать, что любой простой идеал высоты 1 в A, пересекающий S, является градуированным (воспользоваться предложением 5 гл. III, § 1, n° 4).

б) Пусть $B = S^{-1}A$; это градуированное кольцо (гл. II, § 2, n° 9); положим $B = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} B_n$. Показать, что B_0 является полем и что если $A \neq A_0$, то кольцо B изоморфно кольцу $B_0[X, X^{-1}]$ рациональных дробей вида $P(X)/X^k$, где $P(X) \in B_0[X]$.

в) Показать, что $C_g(A)$ и $C(A)$ канонически изоморфны (воспользоваться пунктами а), б) и формулой (5) n° 10).

17) Пусть $A = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} A_n$ — градуированное кольцо Крулля, и $p \in A_1$ — такой элемент, что идеал Ap прост и $\neq 0$.

а) Показать, что если B есть кольцо $A_{(p)}$, определенное в упражнении 1а) гл. III, § 1, то B — кольцо Крулля и группы $C(A)$ и $C(B)$ канонически изоморфны. (Показать сначала, что $C(B)$ изоморфно $C(B[p, p^{-1}])$, и заметить, что $B[p, p^{-1}] = A[p^{-1}]$.)

б) В предположениях упражнения 15б) показать, что группы $C(A)$ и $C(A[X, Y]/(aX + bY))$ изоморфны.

¶ 18) Пусть $A = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} A_n$ — кольцо Крулля, градуированное по положительным степеням и такое, что A_0 — поле, пусть $\mathfrak{m} = \bigoplus_{n \geqslant 1} A_n$ — максимальный идеал в A. Пусть S — мультипликативное множество ненулевых однородных элементов кольца A, так что $S^{-1}A$ — кольцо главных идеалов (упражнение 16б)).

а) Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал высоты 1 в A, пересекающийся с $A - \mathfrak{m}$, тогда $\mathfrak{p}$ не является градуированным (за исключением случая $\mathfrak{p} = A$), при этом идеал $S^{-1}\mathfrak{p}$ из $S^{-1}A$ — главный и порождается элементом вида $x = 1 + x_1 + \ldots + x_n$, где $x_i \in (S^{-1}A)_i$. Записывая тот факт, что элемент из $\mathfrak{p}$ вида $1 + a_1 + \ldots + a_q$ ($a_i \in A_i$) делится на x в кольце $S^{-1}A$, и используя предложение 11 гл. V, § 1, n° 3, показать, что $x \in \mathfrak{p}$; наконец, записывая

тот факт, что любой элемент из $\mathfrak{p}$ делится на x в кольце $S^{-1}A$, показать, что $\mathfrak{p} = Ax$.

б) Вывести из а), что группы $C(A)$ и $C(A_m)$ канонически изоморфны (воспользоваться предложением 17 n° 10).

19) Пусть A — локальное кольцо Крулля и $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал. Если $A' = (A[X])_{mA[X]}$, то показать, что группы $C(A)$ и $C(A')$ канонически изоморфны. (Применить критерий предложения 17 n° 10, используя упражнение 12в).)

¶) 20) Целостное кольцо A называется *кольцом Безу*, если любой идеал *конечного типа* в A является главным. Любое нётерово кольцо Безу является кольцом главных идеалов. Любое кольцо нормирования является кольцом Безу (и, следовательно, кольцо Безу не обязано быть ни нётеровым, ни вполне целозамкнутым).

а) Показать, что любое кольцо Безу целозамкнуто (ср. упражнение 6). Если целостное кольцо является объединением возрастающего фильтрующего семейства подколец Безу, то оно само — кольцо Безу. Если A — кольцо Безу, то таково же и $S^{-1}A$ для любой мультипликативной системы S в A, не содержащей 0.

б) Пусть v_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — независимые нормирования поля K и A_i — кольцо нормирования v_i. Показать, что пересечение A колец A_i является кольцом Безу. (Если некоторый идеал $\mathfrak{a}$ кольца A имеет конечный тип, то множество значений $v_i(x)$ для $x \in \mathfrak{a}$ обладает наименьшим элементом α_i в группе значений нормирования v_i; для каждого i пусть $x_i \in \mathfrak{a}$ — такой элемент, что $v_i(x_i) = \alpha_i$. Используя теорему об аппроксимации (гл. VI, § 7, n° 2, теорема 1), показать, что существуют такие элементы $a_i \in A$, что $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in \mathfrak{a}$ удовлетворяет условиям $v_i(x) = \alpha_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$.) Если нормирования v_i дискретны, то A — кольцо главных идеалов.

в) Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики $\neq 2$, и пусть A — подкольцо алгебраического замыкания поля $K(X)$, порожденное полем K и двумя последовательностями элементов (x_n), $(1/x_n)$ $(1 \leqslant n < +\infty)$, где $x_1 = X$ и $x_{n-1} = x_n^2$. Показать, что A — кольцо Безу (применить а)). Если $\mathfrak{p}$ — ненулевой простой идеал кольца A, то показать, что $\mathfrak{p}$ порождается некоторой последовательностью элементов вида $x_n - a_n$, где $a_n \in K$, $a_n \neq 0$ и $a_n^2 = a_{n-1}$ (для каждого n рассмотреть пересечение $\mathfrak{p} \cap K[x_n, 1/x_n]$). Показать, что $\mathfrak{p}$ не является идеалом конечного типа.

21) Пусть A — целостное кольцо, K — его поле частных и U — подгруппа в K^*, образованная обратимыми элементами кольца A; группу $K^*/U = G$ можно рассматривать как упорядоченную с помощью отношения, определяемого при переходе к факторгруппе отношением $x^{-1}y \in A$ в K^* (*Алгебра*, гл. VI, § 21, n° 5). Целостное кольцо A называется *псевдобезу-кольцом* (соответственно *псевдоглавным*), если группа K^*/U является решеточно-упорядоченной (соответственно вполне решеточно-упорядоченной). Любое кольцо Безу *(соответственно факториальное кольцо)* является псевдобезу-кольцом *(соответственно псевдоглавным)*. Всякое псевдоглавное кольцо является псевдобезу-кольцом. Кольцо нормирования, группа порядков которого есть $\mathbf{R}$, является псевдоглавным кольцом, но не кольцом главных идеалов. Любое псевдобезу-кольцо (соответственно псевдоглавное кольцо) целозамкнуто (соответственно вполне целозамкнуто) (воспользоваться упражнением 6). *Любое нётерово псевдобезу-кольцо факториально. *Привести пример нётерова целозамкнутого кольца (следовательно, кольца Крулля), не являющегося псевдобезу-кольцом (ср. упражнение 2). Если кольцо A — псевдобезу-

кольцо, то таково же и $S^{-1}A$ для любой мультипликативной системы S в A, не содержащей нуля (воспользоваться упражнением 1, гл. II, § 2).

¶ 22) а) Пусть Γ — аддитивная решеточно-упорядоченная группа и A — групповая алгебра группы Γ над некоторым полем k; кольцо A — целостное (*Algèbre*, chap. II, 3e éd., § 11, n° 4, proposition 8) [1]). Любой $x \neq 0$ из A записывается единственным образом в виде $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\nu_i}$, где ν_i — попарно различные элементы группы Γ, e^{ν_i} — соответствующие элементы канонического базиса алгебры A над полем k и α_i — ненулевые элементы из k. Положим $\varphi(x) = \inf(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ в группе Γ; показать, что $\varphi(x+y) \geqslant \inf(\varphi(x), \varphi(y))$, если x, y и $x+y$ отличны от нуля в A, и $\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$, если $xy \neq 0$ в A. (Для доказательства второго утверждения надо сначала установить следующую лемму: если задано конечное семейство (ξ_j) элементов из Γ, то для равенства $\inf_j(\xi_j) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\eta > 0$ из Γ существовали индекс j и элемент $\zeta \in \Gamma$, такие, что $0 < \zeta \leqslant \eta$ и $\inf(\xi_j, \zeta) = 0$. После этого применить лемму к случаю $\varphi(x) = \varphi(y) = 0$.)

б) Вывести из а), что если K — поле частных кольца A, то φ продолжается до такого гомоморфизма, обозначаемого снова через φ, группы K^* в группу Γ, что $\varphi(x+y) \geqslant \inf(\varphi(x), \varphi(y))$, если x, y и $x+y \neq 0$ в K. Получить отсюда, что если B — множество тех $x \in K$, для которых $x = 0$ или $\varphi(x) \geqslant 0$, то B — кольцо, поле частных которого равно K, причем если U — группа обратимых элементов из B, то группа K^*/U изоморфна группе Γ (в частности, B является псевдобезу-кольцом). Получить отсюда примеры псевдобезу-кольца, не являющегося вполне целозамкнутым, вполне целозамкнутого псевдобезу-кольца, но не являющегося псевдоглавным (ср. *Алгебра*, гл. VI, § 1, упражнение 31), *а также псевдоглавного кольца, не являющегося факториальным. *

*в) Получить из б) пример целостного кольца, являющегося объединением возрастающего фильтрующегося семейства факториальных подколец, которое вполне целозамкнуто, но не псевдобезу-кольцо. (Пусть θ — некоторое иррациональное число из $(0, 1)$, и пусть для любого j через q_j обозначено такое наибольшее целое число, что $q_j/2^j < \theta$. Для каждого j определить на произведении групп $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ структуру решеточно-упорядоченной группы, взяв в качестве множества $(G_j)_+$ положительных элементов этой группы множество всех таких пар (ξ, η), что $\xi \geqslant 0$ и $0 \leqslant \eta \leqslant (q_j 2^{-j})\xi$.) *

23) а) Пусть A — псевдобезу-кольцо (упражнение 21) и K — его поле частных; для любого многочлена $f \in A[X]$ *содержанием* многочлена f называется наибольший общий делитель коэффициентов многочлена f (определенный с точностью до обратимого элемента из A). Пусть f, g — два многочлена из $A[X]$. Показать, что, для того чтобы f делил g в кольце $A[X]$, необходимо и достаточно, чтобы f делил g в $K[X]$ и чтобы содержание многочлена f делило содержание многочлена g (воспользоваться упражнением 12) (ср. упражнение 30 в)).

б) Вывести из а), что если A — псевдобезу-кольцо (соответственно псевдоглавное кольцо), то таково же и $A[X]$. Кроме того, если (a_i) — конечное (соответственно произвольное) семейство ненулевых элементов из A и d — наибольший общий делитель этого семейства в A, то d является наибольшим общим делителем этого семейства также и в $A[X]$.

в) Вывести из б), что если A — псевдобезу-кольцо (соответственно псевдоглавное кольцо), то $A[X_\lambda]_{\lambda \in L}$ является псевдобезу-(соответственно псевдоглавным) кольцом для любого семейства $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ переменных.

[1]) См. также [Л], стр. 130. — *Прим. перев.*

24) Пусть K — алгебраически замкнутое поле и $A = K[X, Y]$ — кольцо многочленов от двух переменных над K, являющееся кольцом Крулля *(и даже факториальным кольцом). * Для любой пары $(\alpha, \beta) \in K^2$ пусть $w_{\alpha,\beta}$ — такое дискретное нормирование на A, что для всякого многочлена $f \neq 0$ элемент $w_{\alpha,\beta}(f)$ равен наименьшей из степеней ненулевых одночленов, входящих в $f(X+\alpha, Y+\beta)$. Показать, что A является пересечением колец нормированный $w_{\alpha,\beta}$, ни одно из которых не является существенным нормированием кольца A.

25) Целозамкнутое кольцо A называется *кольцом конечного характера*, если существует семейство $(v_\iota)_{\iota \in I}$ нормирований поля частных K кольца A, обладающее свойствами (AK_{II}) и (AK_{III}).

а) Показать, что если A — целозамкнутое кольцо конечного характера, то для всякого элемента $x \neq 0$ из A существует лишь конечное число экстремальных элементов упорядоченной группы главных дивизоров, не превосходящих $\operatorname{div}(x)$. (Пусть $J \subset I$ — конечное множество индексов, для которых $v_\iota(x) > 0$. Если m — число элементов множества J, то показать, что не может быть $m+1$ элементов y_j $(1 \leqslant j \leqslant m+1)$, делящих x и таких, что элементы $\operatorname{div}(y_j)$ экстремальны; для этого следует заметить, что при каждом j элемент $\operatorname{div}(y_j)$ взаимно прост с $\sum_{k \neq j} \operatorname{div}(y_k)$.)

*б) Показать, что кольцо целых функций от одной комплексной переменной (гл. V, § 1, упражнение 12) псевдоглавное, но не является кольцом конечного характера (воспользоваться пунктом а)). *

¶ 26) Пусть A — целостное кольцо и K — его поле частных. Говорят, что нормирование v поля K *существенно* для A, если кольцо этого нормирования является локализацией $A_\mathfrak{p}$ кольца A по некоторому простому идеалу $\mathfrak{p}$, равному пересечению кольца A и идеала нормирования v.

а) Пусть v — существенное для кольца A нормирование высоты 1, и пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A, образованный такими $x \in A$, что $v(x) > 0$. Показать, что $\mathfrak{p}$ имеет высоту 1. Если $x \in K$ не принадлежит кольцу $A_\mathfrak{p}$, то $A \cap x^{-1}A \subset \mathfrak{p}$. Если w — нормирование поля K, кольцо B которого содержит A и идеал $\mathfrak{q}$ которого удовлетворяет включению $\mathfrak{q} \cap A \subset \mathfrak{p}$, то показать, что w эквивалентно v.

б) Целозамкнутое кольцо A называется *кольцом конечного характера и вещественного типа*, если существует семейство $(v_\iota)_{\iota \in I}$ нормирований поля K *высоты* 1, удовлетворяющее условиям (AK_{II}) и (AK_{III}). Показать, что при этих условиях, если $z \in K$ не принадлежит A и если $\mathfrak{p}$ — такой простой идеал в A, что $A \cap z^{-1}A \subset \mathfrak{p}$, то существует индекс $\iota \in I$, для которого $v_\iota(z) < 0$; показать также, что простой идеал $\mathfrak{q}_\iota$, состоящий из элементов $x \in A$, для которых $v_\iota(x) > 0$, содержится в $\mathfrak{p}$. (Рассуждать от противного, рассматривая конечное число таких нормирований v_{ι_k}, что $v_{\iota_k}(z) < 0$; доказать существование такого элемента $a \in A$, что $a \notin \mathfrak{p}$ и $v_{\iota_k}(a) > 0$ для каждого k; получить отсюда, что $a^n z \notin A$ для любого целого числа $n > 0$, и показать, что отсюда следует противоречие.) Вывести из предыдущего, что любое существенное для кольца A нормирование высоты 1 эквивалентно одному из нормирований v_ι (воспользоваться а)). Любое конечное пересечение подколец поля K, имеющих конечный характер и вещественный тип, снова является кольцом конечного характера и вещественного типа.

в) Предположим, что выполнены условия пункта б) и что, кроме того, *все* нормирования v_ι существенны. Показать, что для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ высоты 1 в кольце A кольцо частных $A_\mathfrak{p}$ является кольцом одного из нормирований v_ι (воспользоваться б), взяв $z^{-1} \in \mathfrak{p}$). Для любого $x \in A$ главный идеал Ax допускает тогда единственное редуцированное примарное

разложение (гл. IV, § 2, упражнение 20), причем простые идеалы, соответствующие этому разложению, — это простые идеалы высоты 1, содержащие x.

г) Будем считать, что выполнены предположения пункта б). Пусть S — мультипликативная система кольца A, не содержащая нуля, и $J \subset I$ — множество тех $\iota \in I$, для которых $v_\iota(x) = 0$ на S. Показать, что семейство $(v_\iota)_{\iota \in I-J}$ нормирований для кольца $S^{-1}A$ удовлетворяет условиям (AK_{II}) и (AK_{III}); это семейство образовано существенными для кольца $S^{-1}A$ нормированиями, если семейство $(v_\iota)_{\iota \in I}$ образовано нормированиями, существенными для кольца A.

д) Обобщить предложение 9 n° 5 на случай, когда выполнены предположения пункта в).

е) Предположим, что выполнены предположения пункта б). Пусть K' — расширение конечной степени поля K и A' — целое замыкание кольца A в поле K'. Показать, что нормирования (попарно неэквивалентные) поля K', продолжающие нормирование v_ι, удовлетворяют условиям (AK_{II}) и (AK_{III}) для A' и, следовательно, A' является кольцом конечного характера и вещественного типа; если все v_ι существенны для кольца A, то их продолжения на A' обладают этим же свойством (рассуждать так же, как в n° 8, предложение 12, и использовать, кроме того, гл. VI, § 8, n° 3, замечание).

ж) Если A — кольцо конечного характера и вещественного типа, то таково же и кольцо $A[X]$; если выполнены условия пункта в), то определить нормирования, существенные для $A[X]$ (рассуждать так же, как в n° 9). Дать аналогичное обобщение упражнения 8.

27) В упражнении 22 возьмем в качестве группы Γ прямую сумму некоторого семейства $(\Gamma_\iota)_{\iota \in I}$, где Γ_ι — подгруппы аддитивной группы $\mathbf{R}$. Показать, что кольцо B, определенное в упражнении 22 б), является кольцом конечного характера и вещественного типа и что оно есть пересечение колец существенных нормирований для B; кроме того, любой простой идеал $\neq 0$ из B максимален.

¶ 28) Целозамкнутое кольцо A называется *кольцом конечного характера и рационального типа*, если существует семейство нормирований $(v_\iota)_{\iota \in I}$ его поля частных K, удовлетворяющее условиям (AK_{II}) и (AK_{III}), такое, что группы порядков нормирований v_ι являются *подгруппами аддитивной группы* $\mathbf{Q}$. Показать, что семейство существенных нормирований высоты 1 для кольца A удовлетворяет условиям (AK_{II}) и (AK_{III}). Для любого $\iota \in I$ пусть $\mathfrak{p}_\iota$ обозначает простой идеал кольца A, образованный элементами x, для которых $v_\iota(x) > 0$, и пусть V_ι — кольцо нормирования v_ι. Показать, что если существуют два таких индекса α, β, что $\mathfrak{p}_\beta \subset \mathfrak{p}_\alpha$, A является пересечением колец V_ι с индексами $\iota \neq \alpha$. Для этого, допустив противное, показать, что существовали бы элемент $x \in K^*$, элемент $y \in \mathfrak{p}_\beta$ и два положительных целых числа r, s, для которых $v_\beta(x^r y^s) > 0$, $v_\alpha(x^r y^s) = 0$ и $v_\iota(x^r y^s) \geqslant 0$ для всякого $\iota \in I$ в противоречие с условием).

29) Пусть A — целозамкнутое кольцо и K — его поле частных.

а) Пусть L — алгебраическое расширение поля K и B — целое замыкание кольца A в поле L. Показать, что для всякого дробного идеала $\mathfrak{a}$ кольца A, если положить $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}B$, имеет место равенство $\widetilde{\mathfrak{b}} \cap K = \widetilde{\mathfrak{a}}$. (Свести к случаю, когда $A \subset \widetilde{\mathfrak{a}}$, другими словами, к случаю $A : \mathfrak{a} \subset A$, и доказать, что $B : \mathfrak{b} \subset B$; для этого, если $x \in B : \mathfrak{b}$ и c_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — коэффициенты его минимального многочлена над полем K, заметить, что для любого $y \in \mathfrak{a}$ элементы $c_i y^i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ принадлежат кольцу A, и вывести отсюда, что c_i принадлежит A.)

б) Пусть C — кольцо многочленов $A[X_\lambda]_{\lambda \in L}$ от произвольного семейства переменных. Показать, что для всякого дробного идеала $\mathfrak{a}$ кольца A, если положить $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}C$, выполняется соотношение $\widetilde{\mathfrak{c}} \cap K = \widetilde{\mathfrak{a}}$ (тот же метод).

¶ 30) Целостное кольцо A называется *регулярно целозамкнутым*, если в моноиде $D(A)$ любой дивизор конечного типа (упражнение 11) является *регулярным* элементом. Любое вполне целозамкнутое кольцо является регулярно целозамкнутым; любое псевдобезу-кольцо (упражнение 21) является регулярно целозамкнутым.

а) Если A — регулярно целозамкнутое кольцо и если d, d', d'' — три дивизора конечного типа, то из соотношения $d+d''\leqslant d'+d''$ следует, что $d\leqslant d'$.

б) Вывести из а), что, для того чтобы целостное кольцо A было регулярно целозамкнутым, необходимо и достаточно, чтобы для любого дробного идеала $\mathfrak{a}$ кольца A, удовлетворяющего условию, что $\operatorname{div}(\mathfrak{a})$ — дивизор конечного типа, выполнялось соотношение $\mathfrak{a}:\mathfrak{a}=A$, в частности, кольцо A целозамкнуто (упражнение 6б)). (Использовать тот факт, что $A:(\mathfrak{bc})=(A:\mathfrak{b}):\mathfrak{c}$ для любых двух дробных идеалов $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ кольца A, положив при этом $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}=A:\mathfrak{a}$.) Кроме того, элемент $\operatorname{div}(\mathfrak{a})$ в этом случае обратим в $D(A)$.

в) Пусть A — регулярно целозамкнутое кольцо и K — его поле частных. Моноид $D_f(A)$ дивизоров конечного типа кольца A порождает в $D(A)$ решеточно-упорядоченную группу $G_f(A)$. Для любого $p\in K[X]$ обозначим через $d(p)$ дивизор дробного идеала кольца A, порожденного коэффициентами многочлена p; для любой рациональной дроби $r=p/q$ из $K(X)$, где p, q лежат в $K(X)$ и $q\neq 0$, дивизор $d(p)-d(q)$ однозначно определен в $G_f(A)$ (не зависит от представления r как частного двух многочленов); мы будем его обозначать через $d(r)$ (ср. упражнение 12в)). Если положить теперь $\gamma(r)=((r),\ d(r))$, где (r) — дробный главный идеал в $K[X]$, порожденный элементом r, то γ будет изоморфизмом упорядоченной группы $\mathscr{P}^*(A[X])$ (обозначение из § 3, n° 2) на подгруппу произведения упорядоченных моноидов

$$\mathscr{P}^*(K[X])\times G_f(A)\subset\mathscr{P}^*(K[X])\times D(A).$$

Вывести отсюда, что $A[X]$ является регулярно целозамкнутым кольцом и что моноид $D_f(A[X])$ изоморфен моноиду $\mathscr{P}^*(K[X])\times D_f(A)$ (воспользоваться а) и б) и упражнением 29б)).

г) Пусть B — целозамкнутое кольцо, K — его поле частных и A — подкольцо кольца многочленов $K[X, Y]$, образованное многочленами, свободные члены которых принадлежат B. Показать, что если $B\neq K$, то кольцо A целозамкнуто, но не является регулярно целозамкнутым (показать, что дивизор $\inf(\operatorname{div}(X), \operatorname{div}(Y))$ соответствует дивизориальному идеалу $\mathfrak{a}$, для которого $\mathfrak{a}:\mathfrak{a}\neq A$).

¶ 31) а) Пусть A — регулярно целозамкнутое кольцо (упражнение 30) и K — его поле частных. Для любого многочлена $P\in K[X]$ обозначим через $c(P)$ дивизор $\operatorname{div}(\mathfrak{a})$, где $\mathfrak{a}$ — дробный идеал в K, порожденный коэффициентами многочлена P. Обозначим через B подкольцо поля $K(X)$, образованное такими рациональными дробями P/Q, что $c(P)\geqslant c(Q)$ (надо показать, что это условие зависит только от элемента P/Q, воспользовавшись для этого упражнением 30а) и упражнением 12в)). Имеет место равенство $B\cap K=A$.

б) Показать, что B является кольцом Безу (упражнение 20) (заметить, что если P, Q — два многочлена из $A[X]$, то $P+X^mQ$ делит P и Q в B, когда m достаточно велико).

в) Показать, что если A — кольцо Крулля, то B — кольцо главных идеалов (рассмотреть возрастающую последовательность главных идеалов в B). Привести пример, когда A вполне целозамкнуто, но B не является кольцом главных идеалов (ср. упражнение 22).

г) Вывести из в) пример нётерова целостного кольца B, в поле частных которого существует такое поле K, что $B\cap K$ не является нётеровым кольцом.

32) Пусть A — целостное кольцо, $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — конечное семейство элементов из A, $\mathfrak{a}$ — идеал $\sum_i Aa_i$ и R — подмодуль в A^n, порожденный элементом $(a_1, \ldots, a_n)$. Показать, что, для того чтобы подмодуль кручения A-модуля $M = A^n/R$ был прямым слагаемым модуля M, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{a}(A:\mathfrak{a}) + (A:(A:\mathfrak{a})) = A$.

§ 2. Дедекиндовы кольца

1. *Определение дедекиндовых колец*

Пусть A — целостное кольцо. Ясно, что следующие условия эквивалентны:

а) ненулевые простые идеалы из A попарно не сравнимы по отношению включения;

б) ненулевые простые идеалы кольца A максимальны;

в) ненулевые простые идеалы кольца A имеют высоту 1.

Определение 1. *Дедекиндовым кольцом называется кольцо Крулля, все ненулевые простые идеалы которого максимальны.*

Примеры дедекиндовых колец. 1) Любое кольцо главных идеалов дедекиндово.

2) Пусть K — расширение конечной степени поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$ и A — целое замыкание кольца $\mathbf{Z}$ в K. Кольцо A является кольцом Крулля (§ 1, n° 8, предложение 12). Пусть $\mathfrak{p}$ — ненулевой простой идеал в A. Тогда $\mathfrak{p} \cap \mathbf{Z}$ — ненулевой (гл. V, § 2, n° 1, следствие предложения 1) и, следовательно, максимальный идеал в $\mathbf{Z}$; значит, $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал в A (loc. cit., предложение 1), поэтому A — дедекиндово кольцо. В общем случае A не является кольцом главных идеалов (*Алгебра*, гл. VII, § 1, упражнение 12).

3) *Пусть V — аффинное алгебраическое многообразие и A — кольцо регулярных функций на V. Предположим, что A не является полем (т. е. что V не сводится к единственной точке). Для того чтобы A было дедекиндовым кольцом, необходимо и достаточно, чтобы V было неприводимой кривой без особых точек. Действительно, утверждение „кольцо A целостное“ равносильно тому, что V неприводимо, а утверждение „любой ненулевой простой идеал в A является максимальным“ равносильно тому, что V является кривой; наконец, поскольку кольцо A нётерово, утверждение, что оно является кольцом Крулля, эквивалентно утверждению, что оно целозамкнуто, т. е. тому, что V представляет собой нормальную кривую, т. е. кривую без особых точек.

4) Кольцо частных $S^{-1}A$ дедекиндова кольца A является дедекиндовым, если $0 \notin S$. Действительно, $S^{-1}A$ является коль-

цом Крулля (§ 1, n° 4, предложение 6) и любой ненулевой простой идеал из $S^{-1}A$ максимален в силу предложения 11 гл. II, § 2, n° 5.

2. *Характеризации дедекиндовых колец*

Теорема 1. *Пусть A — целостное кольцо и K — его поле частных. Следующие условия эквивалентны:*

а) *кольцо A дедекиндово;*

б) *кольцо A является кольцом Крулля и любое не являющееся несобственным нормирование поля K, положительное на A, эквивалентно некоторому существенному нормированию кольца A;*

в) *кольцо A является кольцом Крулля, и любой дробный идеал $\mathfrak{J} \neq (0)$ кольца A дивизориален;*

г) *любой дробный идеал $\mathfrak{J} \neq (0)$ кольца A обратим;*

д) *кольцо A нётерово целозамкнуто и любой ненулевой простой идеал кольца A максимален;*

е) *кольцо A нётерово и для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольцо частных $A_{\mathfrak{m}}$ является полем или кольцом дискретного нормирования;*

ж) *кольцо A нётерово и для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A кольцо частных $A_{\mathfrak{m}}$ является кольцом главных идеалов.*

Докажем сначала эквивалентность условий а) и б). Следствие 2 теоремы 3, § 1, n° 6, сразу же показывает, что из а) вытекает б). Обратно, из б) следует а), так как для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A существует кольцо нормирования поля K, которое доминирует над кольцом частных $A_{\mathfrak{p}}$ (гл. VI, § 1, n° 2, следствие теоремы 2).

Оставшаяся часть доказательства проводится по следующей логической схеме:

$$\text{а)} \Rightarrow \text{в)} \Rightarrow \text{г)} \Rightarrow \text{д)} \Rightarrow \text{е)} \Rightarrow \text{ж)} \Rightarrow \text{а)}.$$

Если A — дедекиндово кольцо и если $\mathfrak{b}$ — ненулевой дробный идеал, то $\mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}} = \tilde{\mathfrak{b}}A_{\mathfrak{p}}$ для любого максимального идеала $\mathfrak{p}$ (§ 1, n° 4, предложение 7); следовательно, $\mathfrak{b} = \tilde{\mathfrak{b}}$ (гл. II, § 3, n° 3, следствие 3 теоремы 1); таким образом, из а) следует в).

Покажем, что из в) следует г). Если имеет место в), то отображение $\mathfrak{a} \to \operatorname{div}(\mathfrak{a})$ является биективным отображением группы $I(A)$ на $D(A)$ (ср. § 1, n° 1); так как это отображение является гомоморфизмом (§ 1, n° 2) и $D(A)$ — группа, то любой элемент из $I(A)$ обратим.

Покажем, что из г) следует д). Если выполнено г), то любой целый идеал кольца A, отличный от нуля, имеет конечный тип (гл. II, § 5, n° 6, теорема 4); следовательно, A — нётерово

кольцо. Поскольку $I(A)$ является группой, то $D(A)$ — также группа и, значит, кольцо A вполне целозамкнуто (§ 1, n° 2, тоорема 1). Наконец, если $\mathfrak{p}$ — произвольный ненулевой простой идеал из A и если $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал из A, содержащий $\mathfrak{p}$, то кольцо $A_{\mathfrak{m}}$ есть кольцо главных идеалов (гл. II, § 5, n° 6, теорема 4). Поскольку $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}$ — ненулевой простой идеал, то должно иметь место равенство $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ (так как кольцо главных идеалов дедекиндово), откуда $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ (гл. II, § 2, n° 5, предложение 11) и идеал $\mathfrak{p}$ максимальный [1]).

Покажем, что из д) следует е). Действительно, если $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца A и выполнено д), то $A_{\mathfrak{m}}$ является целозамкнутым нётеровым кольцом и его максимальный идеал $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ или равен (0), или является единственным ненулевым простым идеалом кольца $A_{\mathfrak{m}}$; следовательно, $A_{\mathfrak{m}}$ есть поле или кольцо дискретного нормирования в силу предложения 11, § 1, n° 7.

Тот факт, что из е) следует ж), очевиден.

Наконец, покажем, что из ж) следует а). Поскольку A является пересечением колец $A_{\mathfrak{m}}$, где $\mathfrak{m}$ пробегает множество максимальных идеалов (гл. II, § 3, n° 3, следствие 4 теоремы 1), из ж) следует, что A целозамкнуто и нётерово; значит, A — кольцо Крулля (§ 1, n° 3, следствие теоремы 2). С другой стороны, так же как при доказательстве импликации г) $\Rightarrow$ д), проверяется, что любой ненулевой простой идеал кольца A максимален.

Предложение 1. *Полулокальное дедекиндово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Пусть A — полулокальное дедекиндово кольцо, K — его поле частных, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ — его максимальные идеалы и $v_1, \ldots, v_n$ — соответствующие существенные нормирования; ими исчерпываются все существенные нормирования кольца A. Пусть $\mathfrak{a}$ — ненулевой целый идеал кольца A. Так как он дивизориальный, существуют (§ 1, n° 4, предложение 5) такие целые числа $q_1, \ldots, q_n$, что $\mathfrak{a}$ совпадает с множеством элементов $x \in K$, для которых $v_i(x) \geqslant q_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n$. Пусть x_0 — такой элемент из K, что $v_i(x_0) = q_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ (гл. VI, § 7, n° 2, следствие 1 теоремы 1). Тогда $\mathfrak{a}$ есть множество таких $x \in K$, что $v_i(xx_0^{-1}) \geqslant 0$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Таким образом, $\mathfrak{a} = Ax_0$.

---

[1]) Заключительный этап рассуждения можно провести также следующим образом: поскольку уже установлено, что кольцо A нётерово и целозамкнуто, оно есть кольцо Крулля; всякий идеал в A обратим и тем самым дивизориален; поэтому, в силу следствия 1 теоремы 3 § 1, n° 6, любой ненулевой простой идеал в A имеет высоту 1 и, следовательно, все ненулевые простые идеалы в A максимальны. — *Прим. ред.*

Если A — дедекиндово кольцо, то, как было показано в процессе доказательства теоремы 1, группа $D(A)$ дивизоров кольца A отождествляется с *группой* $I(A)$ *дробных идеалов* $\mathfrak{a} \neq (0)$ (поскольку A — нётерово, любой дробный идеал, отличный от нуля, имеет конечный тип). Группа $C(A)$ *классов дивизоров* кольца A (§ 1, n° 2) отождествляется тогда с группой *классов идеалов* $\neq 0$ кольца A (определенной в гл. II, § 5, n° 7).

3. Разложение идеалов в произведение простых идеалов

Пусть A — дедекиндово кольцо, $I(A)$ — упорядоченная мультипликативная группа ненулевых дробных идеалов кольца A и $D(A)$ — группа дивизоров кольца A. Изоморфизм $\mathfrak{a} \to \operatorname{div} \mathfrak{a}$ группы $I(A)$ на группу $D(A)$ сопоставляет ненулевым простым идеалам из A экстремальные дивизоры (§ 1, n° 6, теорема 3); следовательно, мультипликативная группа $I(A)$ допускает в качестве базиса множество ненулевых простых идеалов кольца A (§ 1, n° 3, теорема 2). Другими словами, *любой ненулевой дробный идеал* $\mathfrak{a}$ *кольца* A *допускает, и притом единственное, разложение следующего вида*:

$$\mathfrak{a} = \prod \mathfrak{p}^{n(\mathfrak{p})}, \tag{1}$$

где произведение распространяется на все ненулевые простые идеалы кольца A, а показатели $n(\mathfrak{p})$, за исключением некоторого конечного числа, равны нулю. При этом идеал $\mathfrak{a}$ является целым тогда и только тогда, когда все $n(\mathfrak{p})$ положительны. Соотношение (1) называется *разложением* $\mathfrak{a}$ *на простые множители*. В частности, если $\mathfrak{a}$ — главный идеал Ax, то для любого $\mathfrak{p}$ имеем $n(\mathfrak{p}) = v_{\mathfrak{p}}(x)$, где $v_{\mathfrak{p}}$ обозначает существенное нормирование, соответствующее $\mathfrak{p}$; это следует из формулы (4) в § 1, n° 3. Пусть

$$\mathfrak{a} = \prod \mathfrak{p}^{m(\mathfrak{p})}, \qquad \mathfrak{b} = \prod \mathfrak{p}^{n(\mathfrak{p})}$$

— два ненулевых дробных идеала из A. Тогда имеет место равенство

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \prod \mathfrak{p}^{m(\mathfrak{p})+n(\mathfrak{p})}. \tag{2}$$

Кроме того,

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} = \prod \mathfrak{p}^{m(\mathfrak{p})-n(\mathfrak{p})}, \tag{3}$$

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \prod \mathfrak{p}^{\inf(m(\mathfrak{p}),\, n(\mathfrak{p}))}, \tag{4}$$

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \prod \mathfrak{p}^{\sup(m(\mathfrak{p}),\, n(\mathfrak{p}))}. \tag{5}$$

Действительно, соотношение (2) очевидно. Соотношение (3) следует из (2). Так как равенство $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$ равносильно формуле

$$\operatorname{div}(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = \operatorname{div} \mathfrak{a} - \operatorname{div} \mathfrak{b}$$

(§ 1, n° 2, следствие теоремы 1); формулы (4) и (5) следуют из предложения 2 § 1, n° 1.

Эти результаты особенно часто применяются в случае целого замыкания кольца $\mathbf{Z}$ в расширении конечной степени поля $\mathbf{Q}$. Когда A является кольцом главных идеалов, полученные выше результаты сводятся к аналогичным результатам из *Алгебры*, гл. VII, § 1, n° 3.

4. Теорема об аппроксимации в дедекиндовых кольцах

В дедекиндовых кольцах имеет место „теорема об аппроксимации", которая дает одновременно усовершенствование теоремы 1 гл. VI, § 7, n° 2, и предложения 9 § 1, n° 5.

Предложение 2. *Пусть A — дедекиндово кольцо, K — его поле частных и P — множество ненулевых простых идеалов кольца A. Для $\mathfrak{p} \in P$ обозначим через $v_{\mathfrak{p}}$ соответствующее существенное нормирование кольца A. Пусть $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_q$ — попарно различные элементы множества P, $n_1, \ldots, n_q$ — целые рациональные числа и $x_1, \ldots, x_q$ — элементы поля K. Тогда существует такой элемент $x \in K$, что $v_{\mathfrak{p}_i}(x - x_i) \geqslant n_i$ для $1 \leqslant i \leqslant q$ и $v_{\mathfrak{p}}(x) \geqslant 0$ для любого $\mathfrak{p} \in P$, отличного от $\mathfrak{p}_i$.*

Заменяя, если это необходимо, числа n_i на бо́льшие, мы можем предполагать, что все n_i положительны. Рассмотрим сначала случай, когда x_i лежат в A; нам, очевидно, нужно найти элемент $x \in A$, удовлетворяющий сравнениям

$$x \equiv x_i \pmod{\mathfrak{p}_i^{n_i}},$$

а существование такого x следует из предложения 5 гл. II, § 1, n° 2.

Перейдем к общему случаю. Можно записать $x_i = s^{-1}y_i$, где s, y_i лежат в A. Положив $x = s^{-1}y$, мы приходим к вопросу об отыскании такого $y \in A$, чтобы, с одной стороны, было выполнено условие $v_{\mathfrak{p}_i}(y - y_i) \geqslant n_i + v_{\mathfrak{p}_i}(s)$ и, с другой стороны, условие $v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}) \geqslant v_{\mathfrak{p}}(s)$ для любого $\mathfrak{p} \in P$, отличного от $\mathfrak{p}_i$. Поскольку $v_{\mathfrak{p}}(s) = 0$ для всех, кроме конечного числа, индексов $\mathfrak{p}$, мы пришли к предыдущему случаю; предложение доказано.

Предложение 2 можно интерпретировать как теорему о *плотности*. Точнее говоря, для любого $\mathfrak{p} \in P$ пусть $\hat{K}_{\mathfrak{p}}$ (соответственно $\hat{A}_{\mathfrak{p}}$) обозначает пополнение поля K (соответственно кольца A) относительно нормирования $v_{\mathfrak{p}}$; рассмотрим произведение $\prod_{\mathfrak{p} \in P} K_{\mathfrak{p}}$. Элемент $\mathbf{x} = (x_{\mathfrak{p}})$ этого произведения называют *ограниченным аделем* кольца A, если $x_{\mathfrak{p}} \in \hat{A}_{\mathfrak{p}}$ для всех, за исключением конечного числа, $\mathfrak{p} \in P$. Ясно, что множество A

ограниченных аделей является *подкольцом* кольца $\prod_{\mathfrak{p}\in P}\hat{K}_{\mathfrak{p}}$, которое содержит произведение $A_0=\prod_{\mathfrak{p}\in P}\hat{A}_{\mathfrak{p}}$. Рассмотрим на A_0 топологию произведения, относительно которой кольцо A_0 *полно*. На A существует, и притом единственная, топология $\mathscr{T}$, согласованная со структурой аддитивной группы, в которой окрестности нуля в A_0 образуют фундаментальную систему $\mathscr{S}$ окрестностей нуля. Топология $\mathscr{T}$ согласована и со структурой *кольца* на A. Действительно, ясно, что аксиома (AV_{II}) из *Общей топологии*, 1969, гл. III, § 6, n° 3, выполняется, так как топология, индуцированная топологией $\mathscr{T}$ на A_0, согласована со структурой кольца на A_0. С другой стороны, для любого $\mathbf{x}\in A$ существует такое конечное подмножество J в P, что если положить $J'=P-J$, $K_J=\prod_{\mathfrak{p}\in J}\hat{K}_{\mathfrak{p}}$, $A_{J'}=\prod_{\mathfrak{p}\in J'}\hat{A}_{\mathfrak{p}}$, то $\mathbf{x}\in K_J\times A_{J'}$, так как $\hat{A}_{\mathfrak{p}}$ открыто в $\hat{K}_{\mathfrak{p}}$ при любом $\mathfrak{p}$, то $\mathscr{S}$ является фундаментальной системой окрестностей нуля в топологии произведения $K_J\times A_{J'}$; эта последняя согласована со структурой кольца на указанном произведении, в силу чего выполняется также и аксиома (AV_I) (из *Общей топологии*, гл. III, 1969, loc. cit). Таким образом, наше утверждение доказано. Очевидно, что A_0 является *открытым* подкольцом в A, так что A также представляет собой *полное* кольцо (*Общая топология*, 1969, гл. III, § 3, n° 3, предложение 4).

Для любого $x\in K$ пусть $\Delta(x)$ обозначает элемент $(x_{\mathfrak{p}})\in\prod_{\mathfrak{p}\in P}\hat{K}_{\mathfrak{p}}$, такой, что $x_{\mathfrak{p}}=x$ для всякого $\mathfrak{p}\in P$; поскольку $x_{\mathfrak{p}}\in\hat{A}_{\mathfrak{p}}$ для всех, кроме конечного числа, значений $\mathfrak{p}$, справедливо включение $\Delta(x)\in A$; следовательно, определен гомоморфизм $\Delta\colon K\to A$, который *инъективен*, если $P\neq\varnothing$ (т. е. если A не поле). Элементы множества $\Delta(K)$ называются *главными ограниченными аделями*: ясно, что $\Delta(A)\subset A_0$.

Предложение 3. *Кольцо* A_0 (*соответственно* A) *отождествляется с пополнением кольца A* (*соответственно поля K*) *относительно топологии кольца, фундаментальная система окрестностей нуля которой образована всеми целыми ненулевыми идеалами кольца A.*

Немедленно проверяется, что эта топология, рассматриваемая на A (или на K), отделима. Согласно n° 3, утверждение об A_0 вытекает из предложения 17, гл. III, § 2, n° 13. Это показывает, следовательно, что $\Delta(A)$ плотно в A_0; чтобы показать, что $\Delta(K)$ плотно в A, надо заметить, что для всякого аделя $\mathbf{x}=(x_{\mathfrak{p}})\in A$ существует только конечное число таких $\mathfrak{p}\in P$, что $v_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}})<0$. В силу предложения 9 § 1, n° 5, 9, су-

ществует, следовательно, такой элемент $s \in K$, что $sx_\mathfrak{p} \in \hat{A}_\mathfrak{p}$ при любом $\mathfrak{p} \in P$; другими словами, $\Delta(s)\mathbf{x} \in \mathbf{A}_0$, и так как умножение на элемент $\Delta(s)$ является гомеоморфизмом кольца A на себя, тот факт, что $\Delta(K)$ плотно в A, вытекает из того, что $\Delta(A)$ плотно в $\mathbf{A}_0$.

Естественно, можно доказать, что $\Delta(K)$ плотно в A, используя также предложение 2.

Рассмотрим теперь мультипликативную группу $\mathbf{SL}(n, \mathrm{A})$, образованную матрицами $U \in \mathbf{M}_n(\mathrm{A})$, для которых $\det(U) = 1$; если наделить $\mathbf{M}_n(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^{n^2}$ топологией произведения, то она индуцирует на $\mathbf{SL}(n, \mathrm{A})$ топологию, *согласованную со структурой группы на* $\mathbf{SL}(n, \mathrm{A})$. Действительно, достаточно установить, что отображение $U \to U^{-1}$ непрерывно на $\mathbf{SL}(n, \mathrm{A})$; но так как матрица U унимодулярна, то известно (*Алгебра*, гл. III, § 6, n° 5, формула (17)), что элементами из U^{-1} служат *миноры* матрицы U, т. е. некоторые многочлены от элементов матрицы U, а это и доказывает наше утверждение. Если отождествить K с подкольцом в A с помощью отображения Δ, то группа $\mathbf{SL}(n, K)$ превратится в подгруппу в $\mathbf{SL}(n, \mathrm{A})$.

Предложение 4. *Группа* $\mathbf{SL}(n, K)$ *плотна в группе* $\mathbf{SL}(n, \mathrm{A})$.

Пусть G — замыкание группы $\mathbf{SL}(n, K)$ в группе $\mathbf{SL}(n, \mathrm{A})$. Так как K плотно в A (предложение 3), то G содержит все матрицы вида $I + \mathbf{a}E_{ij}$ для $i \neq j$ и $\mathbf{a} \in \mathrm{A}$. Для любого $\mathfrak{p} \in P$ и любого $\lambda \in \hat{K}_\mathfrak{p}$ обозначим через $\lambda(\mathfrak{p})$ ограниченный адель $\mathbf{x} = (x_\mathfrak{q})_{\mathfrak{q} \in P}$, в котором $x_\mathfrak{p} = \lambda$ и $x_\mathfrak{q} = 0$ для $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$; мы уже видим, что G содержит матрицы $I + \lambda(\mathfrak{p})E_{ij}$ при $i \neq j$. Но известно, что матрицы вида $I + \lambda E_{ij}$, где $\lambda \in \hat{K}_\mathfrak{p}$, порождают группу $\mathbf{SL}(n, \hat{K}_\mathfrak{p})$ (*Algébre*, chap. III, 3e éd). Для каждой матрицы $U \in \mathbf{SL}(n, \mathrm{A})$ обозначим через $U_\mathfrak{p}$ ее канонический образ в группе $\mathbf{SL}(n, \hat{K}_\mathfrak{p})$. Мы видим, следовательно, что G для любого $\mathfrak{p} \in P$ содержит все матрицы $U \in \mathbf{SL}(n, \mathrm{A})$, для которых $U_\mathfrak{q} = I$ при любом $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$. Так как G является группой, то в ней содержатся также и все такие матрицы $U \in \mathbf{SL}(n, \mathrm{A})$, что $U_\mathfrak{p} = I$ для всех, кроме *конечного* числа, идеалов $\mathfrak{p} \in P$; но определение топологии на A показывает, что множество этих матриц плотно в $\mathbf{SL}(n, \mathrm{A})$.

5. Теорема Крулля — Акидзуки

Лемма 1. *Пусть* A *— целостное нётерово кольцо, в котором всякий простой идеал, отличный от нуля, максимален; пусть* M *— некоторый* A*-модуль кручения конечного типа. Тогда длина* $\mathrm{long}_A(M)$ *модуля* M *конечна.*

Действительно, поскольку M — модуль кручения, любой простой идеал, ассоциированный с M, отличен от нуля, а потому максимален. Лемма вытекает теперь из предложения 7 гл. IV, § 2, n° 5.

Лемма 2. *Пусть A — кольцо, T — некоторый A-модуль, (T_ι) — возрастающее фильтрующееся семейство подмодулей модуля T, объединение которого равно T. Тогда* $\operatorname{long}_A(T) = \sup_\iota(\operatorname{long}_A(T_\iota))$.

Имеет место неравенство $\operatorname{long}_A(T_\iota) \leqslant \operatorname{long}_A(T)$ для любого ι. Лемма очевидна, если никакое целое число не мажорирует величины $\operatorname{long}_A(T_\iota)$, ибо тогда обе части рассматриваемого равенства бесконечны. Если же такое число существует, то пусть ι_0 обозначает индекс, при котором $\operatorname{long}_A(T_\iota)$ принимает наибольшее значение; тогда $T_{\iota_0} = T$, поскольку семейство (T_ι) фильтрующееся. Отсюда следует наше утверждение в рассматриваемом случае.

Замечание. В доказательстве не предполагается, что A коммутативно.

Лемма 3. *Пусть A — целостное нётерово кольцо, в котором любой ненулевой простой идеал максимален; пусть M — некоторый A-модуль без кручения конечного ранга r и a — некоторый элемент из A, отличный от нуля. Тогда A/Aa является A-модулем конечной длины и имеет место неравенство*

$$\operatorname{long}_A(M/aM) \leqslant r \cdot \operatorname{long}_A(A/Aa). \tag{6}$$

Лемма 1 показывает, что длина $\operatorname{long}_A(A/Aa)$ конечна. Докажем сначала неравенство (6) в случае, когда M имеет *конечный тип*. Поскольку модуль M не имеет кручения и его ранг равен r, то существует подмодуль L в M, который изоморфен A^r и для которого $Q = M/L$ является A-модулем кручения конечного типа; следовательно, этот модуль имеет конечную длину (лемма 1). Для любого целого $n \geqslant 1$ ядро канонического сюръективного отображения $M/a^nM \to Q/a^nQ$ равно $(L + a^nM)/a^nM$ и изоморфно $L/(a^nM \cap L)$. Поскольку $a^nL \subset a^nM \cap L$, имеет место соотношение

$$\operatorname{long}_A(M/a^nM) \leqslant \operatorname{long}_A(L/a^nL) + \operatorname{long}_A(Q/a^nQ) \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{long}_A(L/a^nL) + \operatorname{long}_A(Q). \tag{7}$$

Но так как M без кручения, умножение на Q определяет изоморфизм модуля M/aM на aM/a^2M; аналогичным образом можно провести рассуждения и для L; отсюда индукцией по n устанавливаются следующие формулы:

$$\begin{aligned} \operatorname{long}_A(M/a^nM) &= n \cdot \operatorname{long}_A(M/aM), \\ \operatorname{long}_A(L/a^nL) &= n \cdot \operatorname{long}_A(L/aL). \end{aligned} \tag{8}$$

Принимая во внимание соотношение (7), получаем

$$\operatorname{long}_A(M/aM) \leqslant \operatorname{long}_A(L/aL) + n^{-1}\operatorname{long}_A(Q) \qquad (9)$$

для всякого $n>0$; поскольку L изоморфно A^r, имеет место равенство $\operatorname{long}_A(L/aL) = r\operatorname{long}_A(A/Aa)$, откуда следует (6), если устремить n к бесконечности в соотношении (9).

Перейдем теперь к общему случаю. Пусть (M_ι) — семейство подмодулей конечного типа модуля M. Модуль $T = M/aM$ является объединением подмодулей $T_\iota = (M_\iota + aM)/aM = M_\iota/(M_\iota \cap aM)$. Но модуль T_ι изоморфен некоторому фактормодулю модуля M_ι/aM_ι, следовательно, ввиду только что доказанного,

$$\operatorname{long}_A(T_\iota) \leqslant r \cdot \operatorname{long}_A(A/Aa).$$

Отсюда

$$\operatorname{long}_A(T) \leqslant r \cdot \operatorname{long}_A(A/Aa)$$

в силу леммы 2.

Предложение 5 (Крулль — Акидзуки). *Пусть A — нётерово целостное кольцо, в котором всякий ненулевой простой идеал максимален, K — его поле частных, L — некоторое расширение конечной степени поля K и B — подкольцо поля L, содержащее A. Тогда кольцо B нётерово и любой ненулевой простой идеал в B максимален. Кроме того, для любого идеала $\mathfrak{b} \neq (0)$ кольца B кольцо $B/\mathfrak{b}$ является A-модулем конечного типа,*

Пусть $\mathfrak{b}$ — произвольный ненулевой идеал в B. Мы покажем, что $B/\mathfrak{b}$ является A-модулем конечной длины (и a fortiori B-модулем конечной длины) и что $\mathfrak{b}$ является B-модулем конечного типа.

Ненулевой элемент y из $\mathfrak{b}$ удовлетворяет уравнению вида

$$a_r y^r + a_{r-1}y^{r-1} + \ldots + a_0 = 0 \qquad (a_i \in A,\ a_0 \neq 0).$$

Это уравнение показывает, что $a_0 \in By \subset \mathfrak{b}$. Применяя лемму 3 к случаю $M = B$, мы видим, что B/a_0B является A-модулем конечной длины; аналогично обстоит дело и с модулем $B/\mathfrak{b}$, который является фактормодулем первого. Кроме того, B-модуль $\mathfrak{b}$ содержит в качестве подмодуля модуль a_0B, имеющий конечный тип; поскольку $\mathfrak{b}/a_0B$ — модуль конечной длины (как подмодуль в B/a_0B) и, следовательно, конечного типа, то $\mathfrak{b}$ также является B-модулем конечного типа.

Это показывает прежде всего, что B нётерово. С другой стороны, если $\mathfrak{p}$ — ненулевой простой идеал в B, то кольцо $B/\mathfrak{p}$ целостное и имеет конечную длину; следовательно, $B/\mathfrak{p}$ — поле (*Алгебра*, гл. VIII, § 6, n° 4, предложение 9), так что идеал $\mathfrak{p}$ максимален.

Следствие 1. *Для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A множество простых идеалов кольца B, лежащих над $\mathfrak{p}$, конечно.*

Предположим сначала, что $\mathfrak{p} = (0)$; тогда единственным простым идеалом $\mathfrak{q}$ кольца B, удовлетворяющим равенству $\mathfrak{q} \cap A = (0)$, является идеал (0). Если бы это было не так, то, полагая $S = A - \{0\}$, мы получили бы, что $S^{-1}\mathfrak{q}$ — ненулевой простой идеал кольца $S^{-1}B$ (гл. II, § 2, n° 5, предложение 11), но $S^{-1}B$ представляет собой поле частных кольца B, так как оно является подкольцом поля L, содержащим K (*Алгебра*, гл. V, § 3, n° 2, предложение 3); это приводит к противоречию. Если теперь $\mathfrak{p} \neq (0)$, то из предложения 5 следует, что $B/\mathfrak{p}B$ является векторным пространством конечной размерности над полем $A/\mathfrak{p}$; следовательно, $B/\mathfrak{p}$ — *артиново* кольцо и обладает лишь конечным числом простых идеалов (гл. IV, § 2, n° 5, предложение 3); этим показано, что существует лишь конечное число простых идеалов в B, содержаших $\mathfrak{p}$.

Следствие 2. *Целое замыкание кольца A в поле L является дедекиндовым кольцом.*

Действительно, это целое замыкание представляет собой целозамкнутое нётерово кольцо, ненулевые простые идеалы которого максимальны; следовательно, достаточно применить теорему 1 n° 2.

В частности, имеет место

Следствие 3. *Целое замыкание дедекиндова кольца в расширении конечной степени его поля частных является дедекиндовым кольцом.*

Предложение 6. *Пусть A — дедекиндово кольцо, K — его поле частных, L — расширение конечной степени поля K и B — целое замыкание кольца A в L. Пусть $\mathfrak{p}$ — ненулевой простой идеал кольца A, v — существенное нормирование поля K, соответствующее этому идеалу, и*

$$B\mathfrak{p} = \prod_i \mathfrak{p}_i e^{(i)}$$

— разложение идеала $B(\mathfrak{p})$ в произведение простых. Тогда:

а) *простые идеалы кольца B, лежащие над $\mathfrak{p}$, — это те $\mathfrak{p}_i$, для которых $e(i) > 0$;*

б) *нормирования v_i поля L, соответствующие идеалам $\mathfrak{p}_i$, исчерпываются, с точностью до эквивалентности, нормированиями поля L, продолжающими v;*

в) $[B/\mathfrak{p}_i : A/\mathfrak{p}] = f(v_i/v)$;

г) $e_i = e(v_i/v)$ (ср. гл. VI, § 8, n° 1, определения 1 и 2).

а) Утверждение, что простой идеал $\mathfrak{q}$ кольца B лежит над $\mathfrak{p}$, равносильно тому, что $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}$, т. е. что $\mathfrak{q} \supset B\mathfrak{p}$, а это эквивалентно тому, что $\mathfrak{q}$ содержит один из идеалов $\mathfrak{p}_i$, для которых $e(i) > 0$ (гл. II, § 2, n° 1, предложение 1).

б) Как показывает а), это утверждение вытекает из следствия предложения 12 § 1, n° 8.

в) Поле вычетов нормирования v отождествляется с $A/\mathfrak{p}$, а поле вычетов нормирования v_i отождествляется с $B/\mathfrak{p}_i$ (§ 1, n° 4, следствие 1 предложения 6).

г) Пусть a (соответственно a_i) — униформизирующая нормирования v (соответственно v_i). Тогда

$$aB_{\mathfrak{p}_i} = aA_{\mathfrak{p}}B_{\mathfrak{p}_i} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}B_{\mathfrak{p}_i} = \mathfrak{p}B \cdot B_{\mathfrak{p}_i} = \left(\prod_j \mathfrak{p}_j^{e(j)}\right) B_{\mathfrak{p}_i} =$$

$$= \prod_j \left(\mathfrak{p}_j B_{\mathfrak{p}_i}\right)^{e(j)} = \left(\mathfrak{q}_i B_{\mathfrak{p}_i}\right)^{e(i)} = a_i^{e(i)} B_{\mathfrak{p}_i},$$

ибо $\mathfrak{p}_j B_{\mathfrak{p}_i} = B_{\mathfrak{p}_i}$ для $j \neq i$; отсюда следует г), так как $e(v_i/v) = v_i(a)$.

Упражнения

1) а) Показать, что если $\mathfrak{a}$ — ненулевой идеал в дедекиндовом кольце A, то $A/\mathfrak{a}$ является квазиглавным кольцом (*Алгебра*, гл. VII, § 1, упражнение 5) (заметить, что кольцо $A/\mathfrak{a}$ полулокально, и рассуждать так же, как в предложении 1 из n° 1). Получить отсюда заново тот факт, что любой дробный идеал кольца A порождается самое большое двумя элементами (ср. упражнение 11а) из § 1).

б) Пусть в кольце многочленов $A = k[X, Y]$ над полем k через $\mathfrak{m}$ обозначен идеал $AX + AY$. Показать, что для любого целого числа n минимальное число образующих идеала $\mathfrak{m}^n$ равно $n+1$.

2) а) Пусть $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — два целых идеала дедекиндова кольца A.

Показать, что существует целый идеал $\mathfrak{c}$, взаимно простой с $\mathfrak{b}$ и такой, что $\mathfrak{ac}$ — главный идеал (воспользоваться предложением 9 § 1, n° 5).

б) Пусть $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — два целых идеала кольца A; показать, что существует такой элемент $x \neq 0$ в поле частных кольца A, что $x\mathfrak{a}$ является целым идеалом кольца A, взаимно простым с $\mathfrak{b}$ (метод тот же). Получить отсюда, что модуль $\mathfrak{a}/\mathfrak{ab}$ изоморфен $A/\mathfrak{b}$.

3) Пусть A — дедекиндово кольцо, K — его поле частных, P — множество ненулевых простых идеалов кольца A, и пусть для любого $\mathfrak{p} \in P$ через $v_{\mathfrak{p}}$ обозначено соответствующее существенное нормирование поля K. Для любого A-подмодуля M поля K и любого $\mathfrak{p} \in P$ положим $v_{\mathfrak{p}}(M) = \inf_{x \in M} v_{\mathfrak{p}}(x)$ (нижняя грань берется в $\overline{\mathbf{R}}$); если $M \neq 0$, то $v_{\mathfrak{p}}(M) < +\infty$ для любого $\mathfrak{p} \in P$ и $v_{\mathfrak{p}}(M) \leqslant 0$ для почти всех $\mathfrak{p} \in P$. Если M, N — два A-подмодуля поля K, то показать, что соотношение $M \subset N$ эквивалентно неравенству $v_{\mathfrak{p}}(N) \leqslant v_{\mathfrak{p}}(M)$ для каждого $\mathfrak{p} \in P$ (воспользоваться предложением 9 § 1, n° 5). Обратно, для любого семейства $(\nu_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in P}$ элементов, равных или некоторому целому числу, или $-\infty$, и такому, что $\nu_{\mathfrak{p}} \leqslant 0$ для почти всех $\mathfrak{p} \in P$, существует единственный A-подмодуль M поля K, такой, что $v_{\mathfrak{p}}(M) = \nu_{\mathfrak{p}}$ для каждого $\mathfrak{p} \in P$.

4) Пусть A — дедекиндово кольцо и K — его поле частных. Если L — такое подполе в K, что A является целым над $A \cap L$, то $A \cap L$ — дедекиндово кольцо (показать, что $A \cap L$ является кольцом Крулля, а затем что каждый простой идеал в $A \cap L$ максимален, используя теорему 1 гл. V, § 2, n° 1).

5) а) Пусть k — поле, K — поле $k(X, Y)$ рациональных дробей от двух переменных над k и A — кольцо многочленов $K[Z]$ от одной переменной, являющееся кольцом главных идеалов. Пусть L — подполе $k(Z, X+YZ)$ в $k(X, Y, Z)$; показать, что $A \cap L$ не является дедекиндовым кольцом (доказать, что в этом кольце существуют немаксимальные простые идеалы, отличные от нуля).

б) Пусть A — дедекиндово кольцо, не являющееся кольцом главных идеалов, группа $C(A)$ классов *дивизоров* которого конечна *(кольцо целых чисел какого-либо конечного расширения поля $\mathbf{Q}$ обладает этим последним свойством). Пусть $(\mathfrak{a}_j)_{1 \leqslant j \leqslant r}$ — система представителей группы $I(A)$ ненулевых дробных идеалов по модулю подгруппы главных дробных идеалов, образованная целыми идеалами кольца A, и пусть $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ — простые идеалы, делящие по крайней мере один из идеалов $\mathfrak{a}_j$. Обозначим через S (соответственно через T) мультипликативное множество таких элементов $x \in A$, что $v_{\mathfrak{p}_i}(x) = 0$ для каждого i (соответственно образованное элементом 1 и такими $x \in A$, что $v_{\mathfrak{q}}(x) = 0$ для всех простых идеалов $\mathfrak{q}$, отличных от $\mathfrak{p}_i$, и $v_{\mathfrak{p}_i}(x) \geqslant 1$ для каждого i; из предположения следует, что T не сводится к 1). Показать, что $S^{-1}A$ и $T^{-1}A$ являются кольцами главных идеалов и что $A = (S^{-1}A) \cap (T^{-1}A)$.

6) Показать, что в дедекиндовом кольце понятия примарного идеала, неприводимого идеала, примального идеала (гл. IV, § 2, упражнение 33), квазипростого идеала (гл. IV, § 2, упражнение 34) и степени простого идеала совпадают.

7) Пусть A — целостное нётерово кольцо. Показать, что следующие свойства эквивалентны:

α) кольцо A дедекиндово;

β) ни для какого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A не существует никакого идеала $\mathfrak{a}$, отличного от $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}^2$ и такого, что $\mathfrak{m}^2 \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$;

γ) для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A множество примарных относительно $\mathfrak{m}$ идеалов совершенно упорядочено по включению;

δ) для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A всякий примарный относительно $\mathfrak{m}$ идеал является произведением простых идеалов.

(Доказать, что каждое из свойств γ) и δ) влечет за собой β); показать, далее, что из β) следует, что $A_{\mathfrak{m}}$ является полем или кольцом дискретного нормирования (ср. гл. VI, § 3, n° 5, предложение 9).)

Привести пример целостного локального кольца, удовлетворяющего условиям β), γ) и δ) и не являющегося кольцом нормирования (ср. гл. VI, § 3, упражнение 7).

¶ 8) Пусть A — целостное кольцо, в котором всякий ненулевой простой идеал обратим. Показать, что A — дедекиндово кольцо. (Доказать сначала, что любой простой идеал $\mathfrak{p}' \neq 0$ кольца A максимален, заметив для этого, что если $\mathfrak{p}$ — такой простой идеал, что $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$ и $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}'$, то $\mathfrak{p}' : \mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ (гл. II, § 1, упражнение 8б)), а с другой стороны, $\mathfrak{p}' : \mathfrak{p} = \mathfrak{p}'\mathfrak{p}^{-1}$; это приводит к противоречию. Вывести отсюда, что кольцо A нётерово (гл. II, § 1, упражнение 6б)) и, наконец, применив теорему 4 гл. II, § 5, n° 6, доказать, что $A_{\mathfrak{m}}$ является полем или кольцом дискретного нормирования для всякого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A.)

¶ 9) Пусть A — целостное кольцо.

а) Пусть $(\mathfrak{p}_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$, $(\mathfrak{p}'_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ — два конечных семейства *обратимых*

простых идеалов, для которых $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_m = \mathfrak{p}'_1\mathfrak{p}'_2 \dots \mathfrak{p}'_n$. Показать, что $m = n$ и что существует такая перестановка π множества $[1, n]$, что $\mathfrak{p}'_i = \mathfrak{p}_{\pi(i)}$ для всякого i, где $1 \leqslant i \leqslant n$.

б) Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A и a — некоторый элемент из $A - \mathfrak{p}$; если $\mathfrak{p} \subset Aa + \mathfrak{p}^2$, то показать, что $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(Aa + \mathfrak{p})$. Получить отсюда, что если $\mathfrak{p}$ — обратимый идеал, то $Aa + \mathfrak{p} = A$.

в) Показать, что если любой идеал кольца A является произведением (a priori не обязательно единственным) простых идеалов из A, то A — дедекиндово кольцо. (Показать сначала, что любой обратимый простой идеал $\mathfrak{p}$ максимален, рассматривая некоторый элемент $a \in A - \mathfrak{p}$, разложения идеалов $Aa + \mathfrak{p}$ и $Aa^2 + \mathfrak{p}$ в произведения простых идеалов и применяя пункт а) к кольцу $A/\mathfrak{p}$, чтобы доказать справедливость равенства $Aa^2 + \mathfrak{p} = (Aa + \mathfrak{p})^2$, далее воспользоваться пунктом б.) Затем доказать, что любой ненулевой простой идеал $\mathfrak{p} \neq 0$ обратим, разлагая в произведение простых идеалов главный идеал Ab, где $b \in \mathfrak{p}$, и замечая, что множители этого произведения обратимы; с помощью доказанного выше заключить, что идеал $\mathfrak{p}$ обязательно равен одному из этих множителей. Доказательство заканчивается с помощью упражнения 8.)

¶ 10) Пусть A — кольцо, в котором любой идеал является произведением простых.

а) Показать, что для всякого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A кольцо $A/\mathfrak{p}$ является дедекиндовым (упражнение 9).

б) Показать, что множество минимальных простых идеалов $\mathfrak{p}_i$ кольца A конечно (разложить (0) в произведение простых идеалов).

в) Предположим, что $A/\mathfrak{p}_i$ не является полем. Показать, что если $y \in \mathfrak{p}_i$, то для *каждого* $x \in A - \mathfrak{p}_i$ существует такой элемент $z \in \mathfrak{p}_i$, что $y = zx$. (Рассмотреть в A разложения идеалов Ax и $Ax + Ay$ в произведения простых идеалов, а также соответствующие разложения в кольце $A/\mathfrak{p}_i$.) Получить отсюда, что для всякого $y \in \mathfrak{p}_i$, отличного от нуля, имеет место равенство $Ay = \mathfrak{p}_i$ (рассмотреть $\mathfrak{p}_i/Ay$, разлагая Ay в произведение простых идеалов), показать, наконец, что $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i^2$ и, следовательно, что существует в $\mathfrak{p}_i$ такой идемпотент e_i, что $\mathfrak{p}_i = Ae_i$ (ср. гл. II, § 4, упражнение 15). Таким образом, A разлагается в прямое произведение кольца Ae_i и кольца $A(1 - e_i)$, изоморфного дедекиндову кольцу $A/\mathfrak{p}_i$.

г) Предположим теперь, что все идеалы $\mathfrak{p}_i$ максимальны, так что A разлагается в прямое произведение колец вида $A/\mathfrak{p}_i^{\nu_i}$ (гл. II, § 1, n° 2, предложение 5); следовательно, можно ограничиться случаем, когда A примарно и когда единственный простой идеал $\mathfrak{p}$ в A нильпотентен. Показать, что в этом случае кольцо A оказывается квазиглавным (*Алгебра*, гл. VII, § 1, упражнения 5 и 6).

д) Заключить из в) и г), что A есть произведение конечного числа дедекиндовых колец и одного квазиглавного кольца.

11) Пусть K — поле, $(v_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство дискретных нормирований на K, удовлетворяющее условиям (AK_I) и (AK_{III}) § 1, n° 3, и такое, что для произвольного целого числа r, любого семейства $(n_h)_{1 \leqslant h \leqslant r}$ целых чисел $\geqslant 0$, любого семейства $(\iota_h)_{1 \leqslant h \leqslant r}$ различных элементов множества I и любого семейства $(a_h)_{1 \leqslant h \leqslant r}$ элементов поля K существует элемент $x \in K$, для которого $v_{\iota_h}(x - a_h) \geqslant n_h$, если $1 \leqslant h \leqslant r$, и $v_\iota(x) = 0$, если индекс ι отличен от ι_h. Показать, что пересечение A колец нормирований v_ι является дедекиндовым кольцом, для которого K есть поле частных, и что $(v_\iota)_{\iota \in I}$

представляет собой семейство существенных нормирований кольца A. (Воспользоваться упражнением 7 § 1, доказать, далее, что два различных простых идеала высоты 1 взаимно просты и получить отсюда, что любой ненулевой простой идеал кольца A максимален.)

¶ 12) Пусть A — целостное кольцо и K — его поле частных. Показать, что следующие свойства эквивалентны:

α) Для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A локальное кольцо $A_{\mathfrak{p}}$ является кольцом нормирования.

β) Для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A локальное кольцо $A_{\mathfrak{m}}$ является кольцом нормирования.

γ) Любой ненулевой идеал конечного типа в A обратим (и, следовательно, ненулевые дробные идеалы конечного типа образуют *группу*).

δ) Любой A-модуль без кручения и конечного типа проективен.

ε) Для любого $x \in K$ дробный идеал $A + Ax$ обратим.

ζ) Для любого $x \neq 0$ из K существует такой элемент $y \in K$, что $y \equiv 0 \pmod 1$, $y \equiv 0 \pmod x$, $y \equiv 1 \pmod{(1-x)}$.

η) Если $(\mathfrak{a}_i)$ — конечное семейство идеалов из A, то, для того чтобы система сравнений $x_i \equiv c_i \pmod{\mathfrak{a}_i}$ имела решение, необходимо и достаточно, чтобы $c_i \equiv c_j \pmod{(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j)}$ для любой пары индексов i, j („китайская теорема").

θ) Если $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ — три идеала из A, то $\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$.

ι) Если $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ — три идеала в A, то $\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a} + \mathfrak{c})$.

κ) Кольцо A целозамкнуто и любой идеал конечного типа в A дивизориален.

λ) Кольцо A целозамкнуто и для любого $z \neq 0$ из K существуют такие x, y из A, что $z = x + yz^2$.

μ) Кольцо A целозамкнуто и если $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ — три ненулевых дробных идеала конечного типа, то из $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ac}$ следует, что $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$.

ν) Для любого A-модуля M конечного типа подмодуль кручения модуля M является в M прямым слагаемым.

σ) Любое кольцо B, для которого $A \subset B \subset K$, целозамкнуто.

В этом случае говорят, что A — *прюферово* кольцо (или *кольцо Прюфера*).

(Для доказательства эквивалентности пунктов α), β), γ) и δ) воспользоваться теоремой 1 гл. II, § 5, n° 2, и теоремой 4 n° 6. Для доказательства того, что из ε) следует γ), надо воспользоваться тождеством $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})(\mathfrak{c} + \mathfrak{a}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c})(\mathfrak{ab} + \mathfrak{bc} + \mathfrak{ca})$ между любыми тремя дробными идеалами в целостном кольце. Чтобы доказать, что из ζ) следует η), надо провести индукцию по числу идеалов $\mathfrak{a}_i$. Эквивалентность условий η), θ) и ι) уже была доказана в упражнении 25 *Алгебры*, гл. VI, § 1. Доказать, что из λ) следует ε), заметив, что из λ) вытекает соотношение

$$x(A + Az) \subset z(A + Az)$$

и используя упражнение 6б), § 1, а также то, что

$$(A + Az)(Ay + Ax/z) = A.$$

Доказать, что из μ) следует λ), заметив, что всегда

$$z(A + Az) \subset (A + Az^2)(A + Az).$$

Доказать, что из κ) следует λ), заметив, что любой дробный главный идеал At, содержащий A и Az^2, содержит и Az. Для доказательства того, что из ν) следует γ), рассмотреть для всякого целого идеала конечного типа $\mathfrak{a} \neq 0$ кольца A некоторый элемент $c \in \mathfrak{a}(A : \mathfrak{a})$, отличный от нуля, и применить упражнение 32, § 1, к идеалу $\mathfrak{b} = c\mathfrak{a}$. Чтобы доказать, что из σ) следует β), свести рассуждения к случаю, когда A — локальное кольцо, рассмотреть элемент $z \in K - A$ и показать, что $z^{-1} \in A$, заметив, что из предположения следует включение $z \in A[z^2]$.)

13) а) Пусть $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — два идеала конечного типа в прюферовом кольце A; показать, что если $\mathfrak{b} \not\subset \mathfrak{a}$, то существует такой идеал конечного типа $\mathfrak{c}$, что $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{c}$, $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{c}$ и $\mathfrak{b}\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}$ (рассмотреть идеал $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$).

б) Вывести из а), что если $\mathfrak{a}$ — идеал конечного типа в прюферовом кольце A, то в кольце $A/\mathfrak{a}$ любой элемент, не являющийся делителем нуля, обратим. В частности, простой идеал в A может иметь конечный тип только в том случае, когда он максимален.

в) Показать, что в прюферовом кольце A два простых идеала $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, ни один из которых не содержится в другом, взаимно просты (рассмотреть для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A идеал $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}} + \mathfrak{p}'A_{\mathfrak{m}}$).

г) Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал конечного типа в прюферовом кольце A. Для того чтобы идеал $\mathfrak{a}$ был примальным (гл. IV, § 2, упражнение 33), необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{a}$ содержался только в одном максимальном идеале кольца A (воспользоваться пунктом б)), в этом случае идеал $\mathfrak{a}$ неприводим и квазипрост (гл. IV, § 2, упражнение 34), так что для идеалов конечного типа в прюферовых кольцах эти три понятия совпадают. Для того чтобы идеал был примарным, необходимо и достаточно, чтобы он содержался только в одном простом (обязательно максимальном) идеале $\mathfrak{m}$ (ср. гл. VI, § 4, упражнение 1в)); для того чтобы $\mathfrak{a}$ был сильно примарным (гл. IV, § 2, упражнение 27), необходимо и достаточно, чтобы, кроме того, идеал $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ был главным.

14) Пусть A — прюферово кольцо. Показать, что, для того чтобы некоторый A-модуль M был плоским, необходимо и достаточно, чтобы он не имел кручения (воспользоваться упражнением 12δ)). Получить отсюда, что A — когерентное кольцо (гл. I, § 2, упражнение 12).

15) а) Если A — прюферово кольцо, то $A/\mathfrak{p}$ — прюферово для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ из A.

б) Если кольцо A прюферово, то таково же и $S^{-1}A$ для любой мультипликативной системы S в A, не содержащей 0.

в) Пусть K — поле и (A_λ) — непустое возрастающее фильтрующееся семейство подколец поля K. Показать, что если кольца A_λ прюферовы, то таково же и их объединение A (воспользоваться упражнением 12ζ)).

16) Пусть A — прюферово кольцо, K — его поле частных и L — алгебраическое расширение поля K (степень которого конечна или бесконечна). Показать, что целое замыкание A' кольца A в L является прюферовым кольцом. (Пусть $x \in L$ и $a_0X^n + a_1X^n + \ldots + a_n$ — многочлен из $A[X]$, корнем которого является x; если положить $a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n = (X - x)(b_0X^{n-1} + \ldots + b_{n-1})$, то показать, что b_i и b_ix принадлежат кольцу A', для чего воспользоваться упражнением 12а) § 1.) Если $\mathfrak{a} = \sum_{i=0}^{n} Aa_i$, $\mathfrak{b} = \sum_{j=0}^{n-1} Bb_j$, то показать, что идеал $\mathfrak{b} \cdot B\mathfrak{a}^{-1}$ служит обратным для $B + Bx$.)

¶ 17) Пусть A — целостное кольцо.

а) Для того чтобы A было кольцом Безу (§ 1, упражнение 20), необходимо и достаточно, чтобы оно было прюферовым и псевдобезу-кольцом (§ 1, упражнение 21).

б) Для того чтобы кольцо A было дедекиндовым, необходимо и достаточно, чтобы оно было кольцом Крулля и прюферовым (показать, что любой дивизориальный идеал кольца A имеет конечный тип, для чего воспользоваться упражнением 12ж)) и упражнением 11а) § 1; получить отсюда, что любой простой идеал $\neq 0$ в A максимален (упражнение 13б)), а затем что любой простой идеал в A имеет конечный тип и завершить рассуждение с помощью упражнения 6 гл. II, § 1).

в) Для того чтобы A было дедекиндовым кольцом, необходимо и достаточно, чтобы оно было прюферовым и сильно ласкеровым (гл. IV, § 2,

упражнение 28). (Заметить, что если A прюферово и сильно ласкерово, то для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ в A кольцо $A_{\mathfrak{m}}$ является кольцом дискретного нормирования (гл. VI, § 3, упражнение 8), затем — что для всякого ненулевого $x \in A$ имеется произведение конечного числа максимальных идеалов в A, содержащееся в идеале Ax, и завершить рассуждения, показав, что A является кольцом Крулля.)

18) Пусть A — кольцо, являющееся объединением возрастающего фильтрующегося семейства подколец A_α, которые представляют собой дедекиндовы кольца. Предположим, что для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ в A_α существует такой индекс $\beta \geqslant \alpha$, что в A_β имеется по крайней мере два различных простых идеала, лежащих над $\mathfrak{p}$.

а) Показать, что кольцо всех целых алгебраических чисел (целое замыкание кольца $\mathbf{Z}$ в поле $\mathbf{C}$) удовлетворяет предыдущим условиям (ср. гл. V, § 2, упражнение 6).

б) Пусть v — нормирование кольца A, не являющееся несобственным, и $z \in A$ — такой элемент, что $v(z) > 0$. Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в A, образованный такими x, что $v(x) \geqslant v(z)$. Показать, что $A : \mathfrak{a} = A$ и, следовательно, идеал $\mathfrak{a}$ не является обратимым, хотя для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ в A идеал $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{m}}$ является главным в кольце нормирования $A_{\mathfrak{m}}$ (ср. гл. II, § 5, n° 6, теорема 4).

в) Получить из а) и б) пример прюферова кольца, являющегося вполне целозамкнутым, но не являющегося кольцом Крулля (ср. упражнение 15в) и 17б), а также упражнение 14 гл. V, § 1).

¶ 19) Целостное кольцо A называется *псевдопрюферовым*, если множество дивизоров конечного типа в $D(A)$ (§ 1, упражнение 11) представляет собой *группу*. Псевдопрюферово кольцо регулярно целозамкнуто (§ 1, упражнение 29). Любое псевдобезу-кольцо (§ 1, упражнение 21) является псевдопрюферовым; прюферово кольцо псевдопрюферово; кольцо Крулля псевдопрюферово.

а) Показать на примерах, что обращения этих последних трех утверждений в общем случае неверны.

б) Пусть θ — некоторое иррациональное число > 0, Γ — группа $\mathbf{R}^2$, упорядоченная следующим образом: множеством положительных элементов объявляется множество таких пар (α, β), что $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \geqslant \theta\alpha$. Упорядоченная группа Γ является вполне решеточно-упорядоченной. Пусть B — псевдоглавное кольцо, полученное из Γ с помощью процедуры, описанной в упражнении 22 § 1, пусть A — подкольцо, равное пересечению B и групповой алгебры над k подгруппы $\mathbf{Q}^2$ группы $\mathbf{R}^2$. Показать, что A является вполне целозамкнутым, но не псевдопрюферовым (заметить, что если K есть поле частных кольца A и U — группа обратимых элементов из A, то упорядоченная группа K^*/U изоморфна группе $\Gamma \cap \mathbf{Q}^2$, упорядоченной отношением порядка, определенным порядком группы Γ).

в) Если кольцо A псевдопрюферово, то показать, что кольцо многочленов $A[X]$ является псевдопрюферовым (ср. § 1, упражнение 30в)).

г) Пусть A — псевдопрюферово кольцо и K — его поле частных. Показать, что целое замыкание B кольца A в произвольном алгебраическом расширении L поля K является псевдопрюферовым кольцом (метод тот же, что и в упражнении 16; воспользоваться упражнением 29а) § 1).

д) Получить из упражнения 30г) § 1 пример возрастающей последовательности (A_n) факториальных колец, имеющих общее поле частных, объединение которых не является регулярно целозамкнутым (и a fortiori псевдопрюферовым) кольцом (в указанном примере взять в качестве B кольцо дискретного нормирования).

20) Пусть A — дедекиндово кольцо, K — его поле частных, L — алгебраическое расширение поля K конечной степени и B — целое замыкание кольца A в поле L, являющееся дедекиндовым кольцом. Пусть $\mathfrak{f}$ — произвольный идеал

из B. Для того чтобы существовало такое кольцо C, что $A \subset C \subset B$ и $\mathfrak{f}$ являлось кондуктором из B в C (гл. V, § 1, n° 5), необходимо и достаточно, чтобы для любого простого идеала $\mathfrak{p}'$ кольца B, содержащего $\mathfrak{f}$ и такого, что поле $B/\mathfrak{p}'$ изоморфно $A/(\mathfrak{p}' \cap A)$ (простые идеалы со *степенью вычетов* 1), пересечения с кольцом A идеала $\mathfrak{f}$ и кондуктора $\mathfrak{f} : \mathfrak{p}'$ из $\mathfrak{p}'$ в $\mathfrak{f}$ были равны. (Заметить, что если существует такое кольцо C, то кондуктор из B в $C_0 = A + \mathfrak{f}$ тоже равен $\mathfrak{f}$; следовательно, существование кольца C эквивалентно тому факту, что $A + \mathfrak{f}$ не содержит никакого идеала из B, отличного от $\mathfrak{f}$ и содержащего $\mathfrak{f}$. Для доказательства эквивалентности этого последнего условия сформулированному, надо свести рассуждения к случаю, когда A является кольцом дискретного нормирования.)

¶ 21) а) Пусть A — целостное кольцо, f, g — два многочлена из $A[X]$ и $h = fg$. Обозначим через $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ идеалы кольца A, порожденные соответственно коэффициентами многочленов f, g, h. Показать, что если $\deg(g) = n$, то $\mathfrak{a}^{n+1}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^n\mathfrak{c}$. (Пусть $f(X) = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$, $g(X) = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$; для любой возрастающей последовательности $\sigma = (i_k)_{1 \leqslant k \leqslant n+1}$ целых чисел $\leqslant m$ и любого j пусть

$$u_{\sigma, j} = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{j+1}} b_j a_{i_{j+2}} \dots a_{i_{n+1}};$$

введем на множестве элементов $u_{\sigma, j}$ совершенный порядок, при котором $u_{\sigma, j} < u_{\tau, j'}$ для любых σ, τ и для любого j, если $j < j'$, $u_{\sigma, j} < u_{\tau, j}$ тогда и только тогда, когда $\sigma \leqslant \tau$ в лексикографическом порядке на $(0, m)^{n+1}$. Далее провести индукцию по этому совершенно упорядоченному множеству.)

б) Вывести из упражнения а), что если A — прюферово кольцо (упражнение 12), то $\mathfrak{c} = \mathfrak{ab}$.

в) Взяв в качестве A кольцо многочленов $\mathbf{Z}[Y]$, привести пример таких двух многочленов f, g простой степени из $A[X]$, что $\mathfrak{c} \neq \mathfrak{ab}$.

¶ 22) а) Пусть A — нётерово целостное кольцо, в котором всякий ненулевой простой идеал максимален, так что любой идеал $\mathfrak{a} \neq 0$ единственным образом записывается в виде произведения $\prod_i \mathfrak{q}_i$ примарных идеалов относительно различных простых идеалов $\mathfrak{p}_i$, содержащих $\mathfrak{a}$. Пусть $\mathfrak{a}$ — некоторый *обратимый* идеал в A, и пусть $\mathfrak{b}$ — произвольный ненулевой идеал в A. Показать, что существует такой идеал $\mathfrak{c}$, что $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} = A$ и идеал $\mathfrak{ac}$ — главный. (Заметить, что если $(\mathfrak{p}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — конечное семейство различных максимальных идеалов в A и если $\mathfrak{r}_i = \prod_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$, то $\mathfrak{a} = \sum_i \mathfrak{a}\mathfrak{r}_i$ и $\bigcap_i \mathfrak{a}\mathfrak{r}_i = \mathfrak{a}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_n$; используя предложение 6 гл. II, § 1, n° 2, вывести отсюда существование такого элемента $x \in \mathfrak{a}$, что $x\mathfrak{a}^{-1} + \mathfrak{b} \in A$.) Получить отсюда, что $\mathfrak{a}$ порождается двумя элементами (ср. упражнение 1).

б) Пусть K — поле, A — подкольцо кольца формальных рядов $K[[T]]$, образованное рядами $a_0 + T^n P(T)$, где $a_0 \in K$, $P(T) \in K[[T]]$ и n — заданное целое число. Показать, что A есть целостное нётерово локальное кольцо, имеющее единственный ненулевой простой идеал $\mathfrak{m} \neq 0$, но наименьшее число элементов в системе образующих идеала $\mathfrak{m}$ равно n.

§ 3. Факториальные кольца

1. Определение факториальных колец

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Факториальным кольцом называется кольцо Крулля, все дивизориальные идеалы которого являются главными.*

Другими словами, это кольца Крулля, у которых группа классов дивизоров (§ 1, п° 2) *сводится к* 0.

Примеры. 1) Всякое кольцо главных идеалов является факториальным (а также, напоминаем, дедекиндовым). Обратно, всякое факториальное дедекиндово кольцо является кольцом главных идеалов в силу теоремы 1в), § 2, п° 2.

2) В частности, если K — поле, то кольца $K[X]$ и $K[[X]]$ являются факториальными (обобщения этих фактов даются в теореме 2 и предложении 8 ниже).

3) *Локальное кольцо простой точки алгебраического многообразия факториально. Кольцо ростков аналитических функций в начале координат пространства $\mathbf{C}^n$ также факториально.*

2. *Характеризации факториальных колец*

Если задано кольцо A, то мы будем рассматривать следующее условие:

(М) *Любое непустое семейство целых главных идеалов кольца A обладает максимальным элементом.*

Теорема 1. *Пусть A — целостное кольцо. Следующие условия эквивалентны:*

а) *кольцо A факториально;*

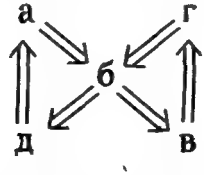
б) *упорядоченная группа ненулевых дробных главных идеалов кольца A является прямой суммой групп, изоморфных* $\mathbf{Z}$ *(упорядоченной с помощью произведения порядков);*

в) *выполнено условие* (М), *и пересечение любых двух главных идеалов кольца A является главным идеалом;*

г) *выполнено условие* (М), *и для любого экстремального элемента p кольца A идеал Ap прост;*

д) *A — кольцо Крулля и любой его простой идеал высоты* 1 *является главным.*

Мы будем обозначать через K поле частных кольца A и через $\mathscr{P}^*$ (или через $\mathscr{P}^*(A)$) — упорядоченную группу ненулевых дробных главных идеалов кольца A. Доказательство будет проведено по следующей логической схеме:



Покажем, что из а) следует б): в самом деле, если кольцо A факториально, то группа $\mathscr{P}^*$ изоморфна группе дивизоров кольца A, т. е. прямой сумме групп $\mathbf{Z}$ (§ 1, п° 3, теорема 2).

Заметим теперь, что условие „пересечение двух целых главных идеалов кольца A является главным идеалом" означает, что любая пара элементов кольца A обладает наименьшим общим кратным, т. е. группа $\mathscr{P}^*$ решеточно-упорядоченная (*Алгебра*, гл. VI, § 1, n° 9, предложение 8). Тот факт, что из б) следует в) (и даже что они эквивалентны), вытекает из теоремы 2 *Алгебры*, гл. VI, § 1, n° 13. То, что из в) вытекает г), следует из предложения 14 (ДЕЛ) *Алгебры*, гл. VI, § 1, n° 13.

Тот факт, что из г) следует б), вытекает из примененной к группе $\mathscr{P}^*$ теоремы 2 из *Алгебры*, гл. VI, § 1, n° 13.

Покажем, что из б) следует д). Если выполнено б), то имеет место изоморфизм между $\mathscr{P}^*$ и $\mathbf{Z}^{(I)}$; обозначим через $(v_\iota(x))_{\iota\in I}$ элемент группы $\mathbf{Z}^{(I)}$, соответствующий идеалу Ax ($x\in K^*$). Мы видим, что каждая из функций v_ι является дискретным нормированием поля K, что A является пересечением колец нормирований v_ι и что для всякого $x\in K^*$ имеет место равенство $v_\iota(x)=0$ для всех, кроме конечного числа, индексов ι; следовательно, A является кольцом Крулля. С другой стороны, пусть $\mathfrak{q}$ — произвольный простой идеал высоты 1 кольца A; он содержит некоторый ненулевой элемент a, который обязательно необратим; следовательно, в силу определения простого идеала, один из экстремальных элементов p кольца A также принадлежит этому идеалу; поскольку Ap — ненулевой простой идеал, имеет место равенство $\mathfrak{q}=Ap$, показывающее, что $\mathfrak{q}$ — главный идеал.

Наконец, покажем, что из д) следует а). Пусть $\mathfrak{a}$ — произвольный дивизориальный идеал кольца A. В A имеются такие простые идеалы $\mathfrak{p}_i$ высоты 1, что $\operatorname{div}(\mathfrak{a})=\sum_i n_i \operatorname{div}\mathfrak{p}_i$, где $n_i\in\mathbf{Z}$. Если выполнено д), то $\mathfrak{p}_i$ имеют вид Ap_i, откуда следует, что $\operatorname{div}(\mathfrak{a})=\operatorname{div}\left(\prod_i Ap_i^{n_i}\right)$; значит, $\mathfrak{a}=\prod_i Ap_i^{n_i}$, так как $\mathfrak{a}$ является дивизориальным идеалом.

Предложение 1. *Пусть A — кольцо Крулля. Если любой дивизориальный идеал кольца A обратим, то для всякого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A кольцо частных $A_\mathfrak{m}$ факториально. Обратное верно, если предположить дополнительно, что любой дивизориальный идеал кольца A имеет конечный тип* (в частности, если кольцо A *нётерово*).

Предположим, что любой дивизориальный идеал кольца A обратим; поскольку $A_\mathfrak{m}$ является кольцом Крулля (§ 1, n° 4, предложение 6), то любой дивизориальный идеал $\mathfrak{a}$ в $A_\mathfrak{m}$ представляет собой пересечение двух главных дробных идеалов (§ 1, n° 5, следствие 2 предложения 9); следовательно, $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}A_\mathfrak{m}$, где $\mathfrak{b}$ — дивизориальный идеал кольца A (гл. II, § 2, n° 4); по-

скольку, по предположению, $\mathfrak{b}$ обратим, из теоремы 4 гл. II, § 5, n° 6, вытекает, что идеал $\mathfrak{a}$ главный; следовательно, $A_{\mathfrak{m}}$ — факториальное кольцо (n° 1, определение 1). Обратно, если все кольца $A_{\mathfrak{m}}$ факториальны и если $\mathfrak{c}$ — дивизориальный идеал конечного типа кольца A, то $\mathfrak{c}A_{\mathfrak{m}}$ является дивизориальным идеалом кольца $A_{\mathfrak{m}}$ (это вытекает из следствия 2 предложения 9 § 1, n° 5, и из гл. II, § 2, n° 4); по условию идеал $\mathfrak{c}A_{\mathfrak{m}}$ — главный; следовательно, обратимость идеала $\mathfrak{c}$ вытекает из теоремы 4 гл. II, § 5, n° 6.

3. *Разложение на экстремальные элементы*

Пусть A — целостное кольцо, K — его поле частных и U — мультипликативная группа обратимых элементов в A. Напомним (*Алгебра*, гл. VI, § 1, n° 5), что имеет место канонический изоморфизм группы K^*/U на группу $\mathscr{P}^*$ дробных главных идеалов кольца A, отличных от нуля. Условие б) теоремы 1 можно переформулировать следующим образом:

Предложение 2. *Пусть A — целостное кольцо. Для того чтобы кольцо A было факториальным, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое подмножество P кольца A, что любой элемент $a \in A - \{0\}$ записывается единственным образом в виде $a = u \prod_{p \in P} p^{n(p)}$, где $u \in U$ и где $n(p)$ — целые положительные числа, все, за исключением конечного подмножества, равные нулю.*

Если множество P удовлетворяет этому условию, то ясно, что все его элементы *экстремальны* и что любой экстремальный элемент из A ассоциирован с одним и только одним элементом множества P. Напомним, что множество P называют *системой представителей экстремальных элементов* кольца A (*Алгебра*, гл. VI, § 1, n° 3, определение 2).

Мы предполагаем далее, что кольцо A факториально. Было показано (n° 2, теорема 1), что группа $\mathscr{P}^*$ решеточно-упорядоченная. Следовательно, можно применить результаты из *Алгебры*, гл. VI, § 1, n° 9 и 13. В частности, любой элемент из K^* записывается, и притом по существу единственным способом, в виде *несократимой дроби*. Два произвольных элемента a, b из K^* обладают наименьшим общим кратным и наибольшим общим делителем; если $a = u \prod_{p \in P} p^{n(p)}$ и $b = u' \prod_{p \in P} p^{m(p)}$ — разложения элементов a и b в произведение экстремальных элементов, то

$$\text{НОД}(a, b) = w \prod_{p \in P} p^{\inf(m(p),\, n(p))}, \tag{1}$$

$$\text{НОК}(a, b) = w' \prod_{p \in P} p^{\sup(m(p),\, n(p))}, \tag{2}$$

где w, w' лежат в U. Мы вновь получаем, в частности, результаты из *Алгебры*, гл. VII, § 1, n° 3.

Для любого $p \in P$ отображение $a \to n(p)$ является дискретным нормированием v_p поля K, кольцо которого равно, очевидно, A_{Ap}. Из теоремы 1 д) следует, что нормирования v_p — это не что иное, как существенные нормирования кольца A, и что идеалы Ap $(p \in P)$ — это не что иное, как простые идеалы из A высоты 1.

4. Кольца частных факториального кольца

Предложение 3. *Пусть A — кольцо Крулля и S — мультипликативная система в A, не содержащая нуля.*

(i) *Если кольцо A факториально, то и $S^{-1}A$ есть факториальное кольцо.*

(ii) *Если система S порождается семейством элементов p_ι, для которых главные идеалы Ap_ι являются простыми, и если $S^{-1}A$ — факториальное кольцо, то кольцо A факториально.*

Это немедленно следует из определения 1 n° 1 и из предложения 17 § 1, n° 10.

5. Кольца многочленов над факториальным кольцом

Пусть A — факториальное кольцо, K — его поле частных и f — произвольный ненулевой элемент из $K[X]$. Элемент c из K^* будет называться *содержанием* многочлена f, если он равен наибольшему общему делителю коэффициентов многочлена f. Пусть v — нормирование поля K, существенное для A, и $\bar{v}$ — его каноническое продолжение на $K[X]$ (определяемое равенством $\bar{v}\left(\sum_i a_i X^i\right) = \inf_i v(a_i)$; ср. гл. VI, § 10, n° 1, предложение 2); имеет место равенство $\bar{v}(f) = v(c)$.

Лемма 1 (Гаусс). *Пусть f, f' — ненулевые элементы кольца $K[X]$ и c, c' — содержания элементов f, f'. Тогда cc' есть содержание произведения ff'.*

Пусть d — содержание элемента ff'. Для любого нормирования v поля K, существенного для A, обозначим через $\bar{v}$ его каноническое продолжение на $K[X]$. Тогда $v(d) = \bar{v}(ff') = \bar{v}(f) + \bar{v}(f') = v(c) + v(c') = v(cc')$. Следовательно, $cc'd^{-1}$ — обратимый элемент кольца A.

Теорема 2. *Пусть A — факториальное кольцо, K — его поле частных, (p_ι) — система представителей экстремальных элемен-*

тов кольца A и (P_λ) — система представителей неприводимых многочленов из $K[X]$, в которой содержание каждого многочлена P_λ равно 1. Тогда

(i) *кольцо $A[X]$ факториально;*

(ii) *множество элементов p_ι и элементов P_λ является системой представителей экстремальных элементов кольца $A[X]$.*

Пусть f — ненулевой элемент кольца $A[X]$. В кольце $K[X]$ многочлен f можно единственным образом представить в виде

$$f = a \prod_\lambda P_\lambda^{n(\lambda)} \qquad (a \in K^*,\ n(\lambda) \geqslant 0).$$

Лемма 1 показывает, что a есть содержание элемента f. Следовательно, $a \in A$. Поскольку кольцо A факториально, можно разложить a единственным образом в произведение вида

$$a = u \prod_\iota p_\iota^{m(\iota)} \quad (u \text{ обратим в } A,\ m(\iota) \geqslant 0).$$

Отсюда следует существование и единственность разложения

$$f = u \prod_\iota p_\iota^{m(\iota)} \prod_\lambda P_\lambda^{n(\lambda)}.$$

Следует заметить, что в этом предложении доказано, что любой элемент кольца A допускает *то же* разложение на экстремальные элементы в кольце A, что и в кольце $A[X]$. Наибольший общий делитель семейства элементов кольца A будет, следовательно, в кольце A таким же, как и в кольце $A[X]$.

Можно также воспользоваться предложением 18 § 1, n° 10, для доказательства того, что кольцо $A[X]$ факториально тогда и только тогда, когда A — факториальное кольцо.

Следствие. *Если A — факториальное кольцо, то кольцо $A[X_1, \ldots, X_n]$ факториально.*

Доказательство проводится индукцией по n.

Это следствие распространяется и на случай бесконечного семейства переменных (ср. упражнение 2).

6. Факториальные кольца и кольца Зарисского

Предложение 4. *Пусть A — кольцо Зарисского и $\hat{A}$ — его пополнение. Если кольцо $\hat{A}$ факториально, то и само A факториально.*

Это следует из определения 1 n° 1 и предложения 16 § 1, n° 10.

Следствие. *Если пополнение нётерова локального кольца A факториально, то и само A факториально.*

7. Предварительные сведения об автоморфизмах колец формальных рядов

Лемма 2. *Пусть $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — формальный ряд, отличный от нуля, с коэффициентами в кольце E. Тогда существуют такие целые числа $u(i) \geqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, что*

$$f(T^{u(1)}, \ldots, T^{u(n-1)}, T) \neq 0.$$

Предположим, что уже определены целые числа $u(i) \geqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant k-1)$, для которых $f(X_n^{u(1)}, \ldots, X_n^{u(k-1)}, X_k, \ldots, X_n) \neq 0$. Мы определим теперь такое целое число $u(k) \geqslant 1$, что

$$f(X_n^{u(1)}, \ldots, X_n^{u(k-1)}, X_n^{u(k)}, X_{k+1}, \ldots, X_n) \neq 0.$$

Лемма будет доказана, таким образом, по индукции.

Заметим, что ряд $f(X_n^{u(1)}, \ldots, X_n^{u(k-1)}, X_k, \ldots, X_n)$ можно рассматривать как ряд от X_k и X_n с коэффициентами в $E[[X_{k+1}, \ldots, X_{n-1}]]$. Мы видим тем самым, что лемму достаточно доказать для $n = 2$. Следовательно, пусть

$$f = \sum_{i,j} e_{ij} X^i Y^j \in E[[X, Y]]$$

при $f \neq 0$. Пусть $G \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ — непустое множество таких пар (i, j), что $e_{ij} \neq 0$. Наделим $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ лексикографическим порядком. Пусть (e, d) — наименьший элемент из G. Выберем какое-либо целое число $p > d$. В разложении $f(T^p, T) = \sum_{(i,\ j) \in G} e_{ij} T^{ip+j}$ отыщем те слагаемые, степень которых равна $cp + d$. Если $ip + j = cp + d$, то неравенство $i \geqslant c + 1$ не может иметь места, так как из него следовало бы, что

$$ip + j \geqslant (c+1)p + j \geqslant (c+1)p > cp + d;$$

не может также выполняться и неравенство $i < c$, так как (c, d) является наименьшим элементом в G; следовательно, $i = c$, откуда $j = d$. Следовательно, слагаемое степени $cp + d$ в $f(T^p, T)$ равно $e_{cd} T^{cp+d}$. Так как $e_{cd} \neq 0$, то $f(T^p, T) \neq 0$. Отсюда следует лемма.

Пусть в кольце $E[[X_1, \ldots, X_n]]$ через $\mathfrak{a}$ обозначен идеал формальных рядов без свободного члена. Если $w_1, \ldots, w_n$ — какие-либо элементы из $\mathfrak{a}$, то напомним, что отображение $f(X_1, \ldots, X_n) \to f(w_1, \ldots, w_n)$ является единственным эндомор-

физмом s кольца $E[[X_1, \ldots, X_n]]$, для которого $s(X_i) = w_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ (гл. III, § 4, n°5, предложение 6).

Пусть $w_1 = X_1 + X_n^{u(1)}, \ldots, w_{n-1} = X_{n-1} + X_n^{u(n-1)}$, $w_n = X_n$, где $u(i)$ — целые числа $\geqslant 1$. Пусть s' — эндоморфизм кольца $E[[X_1, \ldots, X_n]]$, который переводит X_1 в $X_1 - X_n^{u(1)}, \ldots, X_{n-1}$ в $X_{n-1} - X_n^{u(n-1)}$ и X_n в X_n. Тогда $s'(s(X_i)) = X_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$; следовательно, $s' \circ s$ является тождественным автоморфизмом; аналогичное утверждение верно и для $s \circ s'$. Значит, s — *автоморфизм*.

Лемма 3. *Пусть f — ненулевой элемент кольца $E[[X_1, \ldots, X_n]]$. Существуют такие целые числа $u(i) \geqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, что автоморфизм s кольца E, определенный равенствами $s(X_i) = X_i + X_n^{u(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ и $s(X_n) = X_n$, переводит f в такой элемент g, что $g(0, \ldots, 0, X_n) \neq 0$.*

Действительно, $g(0, \ldots, 0, X_n) = f(X_n^{u(1)}, \ldots, X_n^{u(n-1)}, X_n)$. Лемма 3 является, таким образом, следствием леммы 2.

8. *Подготовительная теорема*

В этом разделе через A обозначается *локальное* кольцо, через $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал и через $k = A/\mathfrak{m}$ — его поле вычетов. Предположим, что A *отделимо и полно* относительно $\mathfrak{m}$-адической топологии. Пусть $B = A[[X]]$; это локальное кольцо, максимальный идеал $\mathfrak{N}$ которого порождается идеалом $\mathfrak{m}$ и элементом X; относительно $\mathfrak{N}$-адической топологии кольцо B отделимо и полно (гл. III, § 2, n°6, предложение 6).

Для любого формального ряда

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \in B$$

положим

$$\bar{f} = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{a}_i X^i \in k[[X]],$$

где $\bar{a}_i$ обозначает канонический образ коэффициента a_i в поле k. Ряд $\bar{f}$ будет называться *редуцированным* рядом ряда f; если $\bar{f} \neq 0$, то порядок ряда $\bar{f}$ (т. е. наименьшее целое число s, для которого $a_s \notin \mathfrak{m}$) будет называться *редуцированным порядком* ряда f.

Предложение 5. *Пусть $f \in B$ — ряд, редуцированный ряд которого отличен от нуля. Обозначим через s его редуцированный порядок и через M обозначим A-подмодуль в B, базисом которого является $\{1, X, \ldots, X^{s-1}\}$. Тогда B представляет собой*

прямую сумму модуля M и модуля fB, и f не является делителем нуля в B.

а) Покажем, что $fB \cap M = \{0\}$. Предположим, что выполняется соотношение

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i\right) f = r_0 + r_1 X + \ldots + r_{s-1} X^{s-1} \qquad (b_i \in A,\ r_j \in A). \quad (3)$$

Покажем, что все элементы b_i (а потому и r_j) равны нулю; тем самым будет показано, в частности, что f не является делителем нуля в B. Так как кольцо A отделимо, достаточно показать, что $b_i \in \mathfrak{m}^n$ для всякого $i \geqslant 0$ и всякого $n \geqslant 0$. Это очевидно для $n = 0$. Мы проведем двойную индукцию: предположим, что $b_i \in \mathfrak{m}^{n-1}$ для любого i и $b_i \in \mathfrak{m}^n$ для $i < k$, и докажем, что отсюда следует включение $b_k \in \mathfrak{m}^n$. Для этого положим $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i X^i$ и сравним коэффициенты при X^{s+k} в (3); тогда

$$(b_0 a_{s+k} + \ldots + b_{k-1} a_{s+1}) + b_k a_s + (b_{k+1} a_{s-1} + \ldots + b_{k+s} a_0) = 0. \quad (4)$$

Члены, заключенные в первые скобки, принадлежат $\mathfrak{m}^n$, так как $b_i \in \mathfrak{m}^n$ для $i < k$; то же самое можно сказать и о членах во вторых скобках, поскольку $b_i \in \mathfrak{m}^{n-1}$ для любого i и $a_i \in \mathfrak{m}$ для $i \leqslant s-1$. Следовательно, $b_k a_s \in \mathfrak{m}^n$ и, так как a_s — обратимый элемент кольца A, $b_k \in \mathfrak{m}^n$.

б) Покажем, что $fB + M = B$. Положим

$$g = a_s + a_{s+1} X + a_{s+2} X^2 + \ldots;$$

это обратимый элемент кольца B. Тогда

$$f - X^s g = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{s-1} X^{s-1};$$

следовательно, если положить $fg^{-1} - X^s = (f - X^s g)\, g^{-1} = -h$, то коэффициенты из h принадлежат $\mathfrak{m}$. Возьмем теперь какой-нибудь элемент r из B. С помощью индукции по n определим последовательность $(q^{(n)})$ элементов из B; в качестве $q^{(0)}$ возьмем единственный формальный ряд, удовлетворяющий условию

$$r \equiv X^s q\,(0) \pmod{M}; \quad (5)$$

если $h = \sum_{i=0}^{\infty} h_i X^i$ и $q^{(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} q_i^{(n)} X^i$, то элементы $q_i^{(n)}$ определяются по формуле

$$q_i^{(n)} = \sum_{j=0}^{i+s} h_j q_{i+s-j}^{(n-1)}. \quad (6)$$

Из (6) немедленно следует, что

$$X^s q^{(n)} \equiv h q^{(n-1)} \pmod{M}. \tag{7}$$

Поскольку $h_j \in \mathfrak{m}$ для любого j, из соотношения (6) следует также (с помощью индукции по n), что $q_i^{(n)} \in \mathfrak{m}^n$ для любого i и любого n. Так как кольцо A полно, ряд $q^{(0)} + q^{(1)} + \ldots + q^{(n)} + \ldots$ сходится к некоторому элементу q кольца B. В силу (5) и (7), получаем

$$X^s (q^{(0)} + q^{(1)} + \ldots + q^{(n)}) \equiv r + h (q^{(0)} + \ldots + q^{(n-1)}) \pmod{M} \tag{8}$$

Поскольку модуль M замкнут, соотношение (8) дает в пределе $r \equiv (X^s - h) q \pmod{M}$, т. е. $r \in fg^{-1}g + M \subset fB + M$.

Для доказательства соотношения $B = fB + M$ можно также воспользоваться результатом гл. III, § 2 (ср. упражнение 12). Метод, использованный здесь, имеет преимущество в применении к сходящимся рядам.

Следствие. *В предположениях и обозначениях предложения 5 допустим, что $s \geqslant 1$, так что $f \in B\mathfrak{m} + BX$. Тогда A-гомоморфизм h кольца $B' = A[[T]]$ в кольцо $B = A[[X]]$, для которого $h(T) = f$* (гл. III, § 2, n° 9, предложение 11а)), *определяет на B структуру свободного B'-модуля, базисом которого служит $\{1, X, \ldots, X^{s-1}\}$. В частности, гомоморфизм h инъективен.*

Действительно, наделим B'-модуль B (T)-адической фильтрацией, образованной идеалами $f^n B$ для $n \geqslant 0$ (гл. III, § 2, n° 1). Тогда B/fB является свободным модулем над кольцом $A = B'/TB'$ и образы элементов X^i $(0 \leqslant i \leqslant s-1)$ в этом A-модуле образуют базис (предложение 5); поскольку, кроме того, f не является делителем нуля в B (предложение 5), Bf^n/Bf^{n+1} также является свободным (B'/TB')-модулем ранга s, так что выполняется условие (GR) из гл. III, § 2, n° 8 (где A заменено на B' и M — на B). С другой стороны, так как B' отделимо и полно относительно (T)-адической фильтрации, а $\mathrm{gr}(B)$, в силу предыдущих рассуждений, является $\mathrm{gr}(B')$-модулем конечного типа, то мы видим (гл. III, § 2, n° 9, следствие 1 предложения 12), что B является B'-модулем конечного типа. Первое утверждение этого следствия вытекает, таким образом, из предложения 13, гл. III, § 2, n° 9. Второе утверждение вытекает из первого немедленно.

Определение 2. *Многочлен $F \in A[X]$ называется отмеченным, если он имеет вид $F = X^s + a_{s-1}X^{s-1} + \ldots + a_0$, где $a_i \in \mathfrak{m}$ для $0 \leqslant i \leqslant s-1$.*

Заметим, что произведение двух отмеченных многочленов снова является отмеченным многочленом.

Предложение 6 (подготовительная теорема). *Пусть $f \in B$ — некоторый ряд, редуцированный ряд которого отличен от нуля, и пусть s — его редуцированный порядок. Тогда существует, и притом единственная, пара (u, F), в которой u является обратимым элементом на B, F — отмеченным многочленом степени s и $f = uF$.*

Положим $F = X^s + G$, где $G = g_0 + \ldots + g_{s-1}X^{s-1}$ $(g_i \in A)$. Соотношение $f = uF$ эквивалентно соотношению $F = u^{-1}f$, т. е. равенству $X^s = u^{-1}f - G$. Следовательно, в силу предложения 5, многочлен G и ряд u^{-1} единственны, а потому то же самое можно сказать и об элементах F и u. Предложение 5 показывает также, что существуют такие элементы $v \in B$ и многочлен $G = g_0 + \ldots + g_{s-1}X^{s-1}$ $(g_i \in A)$, что $X^s = vf - G$; остается доказать, что ряд v обратим в B и что $g_i \in \mathfrak{m}$ для любого i. Но, обозначив через $\bar{g}_i$ канонический образ коэффициента g_i в поле k и через $\bar{f}$, $\bar{v}$ — редуцированные ряды рядов f, g, получим

$$X^s + \bar{g}_0 + \bar{g}_1X + \ldots + \bar{g}_{s-1}X^{s-1} = \bar{f}\bar{v}.$$

Так как $\bar{f}$ имеет порядок s, то $\bar{g}_i = 0$ для любого i и $\bar{v}$ имеет порядок 0; следовательно, ряд v обратим.

Предложение 7. *Пусть F — отмеченный многочлен и g, h — такие два формальных ряда из B, что $F = gh$. Тогда существует такой обратимый элемент u из B, что ug и $u^{-1}h$ являются отмеченными многочленами и $F = (ug)(u^{-1}h)$.*

Действительно, редуцированные ряды рядов g и h не равны нулю; следовательно, в силу предложения 6, существуют такие обратимые элементы u, v кольца B, что ug и vh являются отмеченными многочленами. Тогда $uvF = (ug)(vh)$ — отмеченный многочлен и элемент uv обратим. Переходя к редуцированным рядам, мы тотчас устанавливаем, что F и uvF имеют один и тот же редуцированный порядок. Утверждение о единственности в предложении 6 показывает, следовательно, что $F = uvF$, откуда $uv = 1$.

Следствие. *Предположим дополнительно, что кольцо A целостное, и пусть F — отмеченный многочлен степени s. Для того чтобы многочлен F был экстремальным элементом кольца $A[X]$, необходимо и достаточно, чтобы он был экстремальным элементом кольца $B = A[[X]]$.*

Предположим, что F не является экстремальным в $A[X]$, так что $F = f_1f_2$, где f_1 и f_2 — необратимые элементы из кольца $A[X]$; произведение старших коэффициентов многочленов f_1 и f_2 равно 1, и потому эти коэффициенты обратимы в A. Из пред-

положения теперь следует, что f_1 и f_2 имеют степени >0 и $<s$. Поскольку редуцированные многочлены $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ таковы, что $\bar{f}_1\bar{f}_2=X^s$, ни $\bar{f}_1$, ни $\bar{f}_2$ не может быть обратимым в $k[[X]]$, так как если бы $\bar{f}_1$ был обратим, то $\bar{f}_2$ имел бы порядок s, а это не так. Тем более ни f_1, ни f_2 не обратимы в B, так что F не экстремален в B.

Обратно, если F не экстремален в $A[[X]]$, то $F=gh$, где ни g, ни h не обратимы в B; следовательно, их редуцированные порядки $\geqslant 1$; тогда отмеченные многочлены ug и $u^{-1}h$ из предложения 7 не являются константами, а это показывает, что F не экстремален в $A[X]$.

9. *Факториальность колец формальных рядов*

Предложение 8. *Пусть C — кольцо, являющееся или кольцом дискретного нормирования, или полем. Тогда кольцо формальных рядов $C[[X_1, \ldots, X_n]]$ факториально.*

Пусть $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал в C и π — образующая идеала $\mathfrak{p}$ (если C — поле, то $\pi=0$). Наделим C $\mathfrak{p}$-адической топологией; эта топология отделима. Поскольку C — нётерово локальное кольцо, $B=C[[X_1, \ldots, X_n]]$ является нётеровым локальным кольцом и его пополнение представляет собой кольцо $\hat{C}[[X_1, \ldots. X_n]]$ (гл. III, § 2, n° 6, предложение 6). В силу следствия из предложения 4 (n° 6), достаточно доказать, что $\hat{C}[[X_1, \ldots, X_n]]$ — факториальное кольцо. Но если C — поле, то $\hat{C}=C$; если же C — кольцо дискретного нормирования, то таково же и $\hat{C}$ (гл. VI, § 5, n° 3, предложение 5). Мы будем, следовательно, предполагать в дальнейшей части доказательства, что C — *полное* кольцо.

Начиная доказательство по индукции при $n=0$, предположим доказанным, что кольцо $A=C[[X_1, \ldots, X_{n-1}]]$ факториально. Отождествим B с $A[[X_n]]$ и обозначим через $\mathfrak{m}$ максимальный идеал кольца A (порожденный элементами π, $X_1, \ldots, X_{n-1}$). Докажем, что всякий ненулевой элемент g из B представляется по существу единственным способом в виде произведения экстремальных элементов.

Пусть K — поле $C/C\pi$; поскольку $B/B\pi$ отождествляется с $K[[X_1, \ldots, X_n]]$, идеал $B\pi$ прост и π — экстремальный элемент. Если $\pi\neq 0$, то, следовательно, $B_{B\pi}$ является кольцом нормированного дискретного нормирования w (гл. VI, § 3, n° 6, предложение 9); любой ненулевой элемент g из B записывается поэтому в виде $g=\pi^{w(g)}f$, где $f\in B$ и f не делится на π. Достаточно, следовательно, доказать, что f единственным образом записывается как произведение экстремальных элементов.

Но канонический образ элемента f в кольце $K[[X_1, \ldots, X_n]]$ отличен от нуля; лемма 3 (n° 7) показывает поэтому, что существует автоморфизм кольца B, который переводит f в такой элемент f', что не все коэффициенты ряда $f'(0, \ldots, 0, \ldots, X_n)$ принадлежат $C\mathfrak{n}$; это означает, что не все коэффициенты ряда f', рассматриваемого как формальный ряд от X_n, лежат в m. Достаточно доказать наше утверждение для f'.

В дальнейшем все элементы кольца B рассматриваются как формальные ряды от X_n с коэффициентами в A. В силу предложения 6 из n° 8 (оно здесь применимо, так как C (и, следовательно, A) отделимо и полно, а редуцированный ряд ряда f' отличен от нуля), f' ассоциирован в кольце B с некоторым, и притом единственным, отмеченным многочленом F. В силу предложения 7 n° 8, любой ряд, делящий f' (или, что то же самое, делящий F), ассоциирован с некоторым отмеченным многочленом, который делит F, и всякое разложение ряда f' имеет, с точностью до обратимых множителей, вид $f' = uF_1 \ldots F_q$, где u — обратимый элемент и где F_i — экстремальные отмеченные многочлены (в кольце B), для которых $F = F_1 \ldots F_q$. В силу следствия предложения 7 n° 8, многочлены F_i экстремальны также и в $A[X_n]$. Но поскольку кольцо A факториально в силу предположения индукции, кольцо $A[X_n]$ также факториально (теорема 2 n° 5); следовательно, так как рассматриваемые многочлены F_i унитарны, они определены однозначно многочленом F (с точностью до перестановки). Этим доказана единственность разложения $f' = uF_1 \ldots F_q$; его существование вытекает из того факта, что B — нётерово кольцо; доказательство закончено.

Замечания. 1) Существуют такие факториальные кольца A, что кольцо $A[[X]]$ не является факториальным (упражнение 8). Однако если A — кольцо главных идеалов, то кольцо $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ факториально (упражнение 9).

2) Позднее с помощью гомологических методов мы увидим, что любое регулярное локальное кольцо факториально (ср. § 4, n° 7, следствие 3 предложения 16). Тем самым будет дано другое доказательство предложения 8, с более доступной идеей.

Упражнения

1) Для того чтобы целостное кольцо A было факториальным, необходимо и достаточно, чтобы существовало отображение $x \to s(x)$ из $A - \{0\}$ в $\mathbf{N}$, удовлетворяющее следующим условиям: $s(xy) = s(x) + s(y)$; соотношение $s(x) = 0$ влечет за собой, что элемент x обратим в A; для любых двух элементов x, y из $A - \{0\}$, ни один из которых не делит другой, существуют такие элементы a, b, z, t из $A - \{0\}$, что $ax + by = zt$, $s(z) < s(x)$, причем t взаимно прост с x и y. (Показать, что если это условие выполнено, то любой ненулевой элемент из A является произведением экстремальных элементов; затем показать, что для любого экстремального элемента p идеал Ap прост, завершить доказательство с помощью теоремы 1г).)

2) а) Пусть A — целостное кольцо, представляющее собой объединение возрастающего фильтрующегося семейства (A_λ) подколец. Предположим, что каждое из колец A_λ факториально и что если $\lambda \leqslant \mu$, то любой экстремальный элемент из A_λ является также экстремальным элементом и в A_μ. Показать, что A — факториальное кольцо, множеством экстремальных элементов которого служит объединение множеств экстремальных элементов каждого из колец A_λ (ср. § 2, упражнение 19д)).

б) Вывести из упражнения а), что для любого факториального кольца A кольцо многочленов $A[X_\lambda]_{\lambda \in L}$ от произвольного семейства переменных факториально.

в) Пусть A — такое факториальное кольцо, что любое кольцо формальных рядов $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ от конечного числа переменных факториально. Показать, что тогда кольцо формальных рядов $A[[X_\lambda]]_{\lambda \in L}$ от произвольного семейства переменных (*Алгебра*, гл. IV, § 5, упражнение 1) факториально (метод тот же).

3) а) Пусть $A = \bigoplus_{n \geqslant 0} A_n$ — градуированная по положительным степеням алгебра над полем k, предположим, что $A_0 = k$ и что A — кольцо Крулля. Показать, что для того чтобы кольцо A было факториально, необходимо и достаточно, чтобы любой градуированный простой идеал $\mathfrak{p}$ высоты 1 в A имел вид $\mathfrak{p} = Aa$, где a — однородный элемент (воспользоваться упражнением 16 из § 1). Показать, что любой ненулевой однородный элемент из A является произведением однородных экстремальных элементов.

б) Пусть A — градуированная k-алгебра, удовлетворяющая условиям пункта а). Пусть k' — расширение поля k, и предположим, что кольцо $A \otimes_k k'$ факториально; показать, что тогда A факториально. (Если градуированный идеал $\mathfrak{a}$ кольца A таков, что $\mathfrak{a} \otimes_k k'$ — главный идеал в $A \otimes_k k'$, то показать, что $\mathfrak{a}$ — главный идеал, после этого воспользоваться пунктом а).)

4) а) Показать, что кольцо $A = \mathbf{Q}[X, Y]/\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ — главный идеал, порожденный многочленом $X^2 + Y^2 - 1$ из $\mathbf{Q}[X, Y]$, является кольцом Крулля, но не факториально (если x — образ переменной X в кольце A, то показать, что элемент x экстремален в A, но Ax не является максимальным идеалом в A).

б) Показать, что кольцо $A \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(i)$ факториально (доказать, что это кольцо изоморфно факторкольцу кольца $\mathbf{Q}(i)[X, Y]$ по главному идеалу $(XY - 1)$; сравнить с упражнением 3б)).

¶ 5) а) Пусть k — нётерово факториальное кольцо и B — кольцо многочленов $k[X_1, \ldots, X_n]$ при $n \geqslant 3$; пусть g_i $(0 \leqslant i \leqslant r)$ — некоторые элементы из $k[X_3, \ldots, X_n]$, причем элемент g_0 экстремален; положим $g = X_1 X_2 - \sum_{i=0}^{r} g_i X_1^i$ и рассмотрим факторкольцо $A = B/gB$. Показать, что кольцо A факториально. (Пусть S — мультипликативная система в A, порожденная элементом 1 и образом переменной X_1 в A; применить к $S^{-1}A$ предложение 3 n° 4.)

б) Пусть k — поле характеристики $\neq 2$ и F — однородный многочлен второй степени из кольца $k[X_1, \ldots, X_n]$ при $n \geqslant 5$, такой, что соответствующая полиномиальная функция на k^n является невырожденной квадратичной формой. Показать, что кольцо $k[X_1, \ldots, X_n]/(F)$ факториально. (Сначала доказывается, что любой однородный многочлен G второй степени нз $k[X_1, \ldots, X_n]$, которому соответствует полиномиальная функция, являющаяся невырожденной квадратичной формой, представляет собой экстремальный элемент при $n \geqslant 3$. После этого надо доказать предложение в случае, когда k алгебраически замкнуто; для этого следует воспользоваться пунктом а); наконец, надо перейти к общему случаю с помощью упражнения 3б).)

в) Если $F = X_1X_2 - X_3X_4$, то показать, что кольцо $k[X_1, X_2, X_3, X_4]/(F)$ не является факториальным. (Показать, что образы переменных X_i в этом кольце являются экстремальными элементами.)

¶ 6) а) Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики $\neq 2$. Описать градуированные простые идеалы кольца

$$K[X, Y, Z]/(X^2 + Y^2 + Z^2).$$

б) Пусть k — упорядоченное поле, a, b, c — положительные элементы из k и A — кольцо $k[X, Y, Z]/(aX^2 + bY^2 + cZ^2)$. Показать, что A — факториальное кольцо. (Свести доказательство к случаю, когда k — максимальное упорядоченное поле, используя упражнение 3б); после этого доказать, используя пункт а), что любой градуированный простой идеал высоты 1 в A является главным, и применить упражнение 3а).)

в) Пусть k — упорядоченное поле, a, b — положительные элементы из k и B — кольцо $k[X, Y]/(aX^2 + bY^2 + 1)$. Показать, что B — факториальное кольцо (воспользоваться пунктом б) и упражнением 17а) из § 1).

г) Показать, что кольцо $C = \mathbf{Q}[X, Y]/(X^2 + 2Y^2 + 1)$ факториально, но кольцо $C \oplus_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}(i)$ (при $i^2 = -1$) таким не является.

¶ 7) Пусть K — нётерово факториальное кольцо и F — некоторый экстремальный элемент кольца многочленов $K[X_1, \ldots, X_n]$; предположим, что когда каждой переменной X_i приписывается некоторый вес $q(i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, то многочлен F оказывается изобарическим веса $q > 0$. Пусть A — кольцо, порожденное в алгебраическом замыкании Ω поля частных кольца $K(X_1, \ldots, X_n)$ кольцом K, переменными X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и корнем многочлена $Z^c - F$, где c — целое число, взаимно простое с q. Показать, что кольцо A факториально в следующих двух случаях:

1) $c \equiv 1 \pmod{q}$;

2) любой проективный K-модуль конечного типа свободен (это так, например, когда K — поле или кольцо главных идеалов, или локальное кольцо). В первом случае рассмотреть кольцо частных $A[1/z]$; показать, что оно факториально, и применить предложение 3 n° 4. Во втором случае рассмотреть такое целое число d, что $cd \equiv 1 \pmod{q}$, и пусть элемент $z' \in \Omega$ таков, что $z = z'^d$; кольцо $B = A[z']$ факториально в силу первого случая и представляет собой свободный A-модуль. Рассмотреть B как градуированное кольцо, придав элементу z' вес q, а каждому из X_i — вес $cdq(i)$, и свести все к доказательству того, что для двух однородных элементов u, v из A идеал $Au \cap Av$ является главным, используя упражнение 16 § 1; наконец, рассмотреть идеал $Bu \cap Bv$ в кольце B и применить предложение 12, гл. I, § 3, n° 6. В частности, если K — поле и a, b, c — три целых положительных попарно взаимно простых числа, то кольцо

$$A = K[X, Y, Z]/(Z^a - X^b - Y^c)$$

факториально.

¶ 8) Пусть A — целостное кольцо и x, y, z — три ненулевых элемента из A, причем x экстремален, и $Ax \cap Ay = Axy$. Пусть S — мультипликативное множество степеней x^n $(n \geqslant 0)$, и пусть $B = S^{-1}A$; рассмотрим кольца формальных рядов $A[[T]]$ и $B[[T]]$.

а) Пусть i, j, k — три таких целых числа $\geqslant 0$, что $ijk - ij - jk - ki \geqslant 0$ и $z^i \in Ax^j + Ay^k$. Рассмотрим в кольце $A[[T]]$ элемент $v = xy - z^{i-1}T$. Показать, что существуют целое число $t > 0$ и ряд

$$v' = y^t x^{-1} + b_1 x^{-2} T + \ldots + b_{n-1} x^{-n} T^{n-1} + \ldots$$

из $B[[T]]$, для которых $vv' \in A[[T]]$ (определить по индукции элементы b_n, разбивая множество $\mathbf{N}$ на интервалы длины ij; внутри каждого такого интервала положить $b_{n+1} = b_n z^{i-1} x^{-1}$; на конце каждого интервала использовать неравенство $ijk - ij - jk - ki \geqslant 0$).

б) Предположим, что $z^{i-1} \notin Ax + Ay$. Показать, что в кольце $A[[T]]$ не существует никакого формального ряда со свободным членом y^k ($k > 0$ — целое число), ассоциированного с элементом v в кольце $B[[T]]$ (вычислить коэффициент при T в произведении элемента v и какого-либо обратимого элемента из $B[[T]]$).

в) Получить из пунктов а), б) и упражнения 7 пример такого факториального кольца A, что кольцо формальных рядов $A[[T]]$ не является факториальным. (В предыдущих обозначениях, предполагая выполненными условия пунктов а) и б) относительно элементов x, y, z, i, j, k, показать, что vv' не может быть произведением экстремальных множителей u_h ($1 \leqslant h \leqslant r$) в $A[[T]]$; заметить, что элементы u_h являются формальными рядами, свободные члены которых представляют собой степени элемента y. Рассмотреть далее кольцо $C = S^{-1}A[[T]]$, где система S' образована формальными рядами, свободный член которых лежит в S; кольцо $B[[T]]$ представляет собой пополнение кольца Зарисского C; показать, что $v' \in C$ и что v и u_h экстремальны в C; наконец, получить противоречие с результатом пункта б).)

г) Вывести из пункта в) пример нётерова факториального локального кольца A, пополнение $\hat{A}$ которого является нефакториальным кольцом Крулля.

¶ 9) а) Пусть A — такое нётерово целостное кольцо, что для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ в A кольцо частных $A_{\mathfrak{m}}$ является кольцом дискретного нормирования. Если B — кольцо формальных рядов $A[[X_1, \ldots, X_n]]$, то показать, что для всякого максимального идеала $\mathfrak{n}$ в B кольцо частных $B_{\mathfrak{n}}$ факториально (рассмотреть его пополнение, используя предложение 8 n° 9). Вывести отсюда, что любой дивизориальный идеал кольца B является проективным B-модулем.

б) Пусть C — такое нётерово кольцо, что любой проективный C-модуль конечного типа свободен. Показать, что кольцо формальных рядов $C[[X]]$ обладает тем же свойством (ср. гл. II, § 3, n° 2, предложение 5).

в) Получить из пунктов а) и б), что если A — кольцо главных идеалов, то кольцо формальных рядов $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ факториально.

10) а) Любое прюферово (§ 2, упражнение 12) факториальное кольцо является кольцом главных идеалов.

б) Любое псевдобезу-кольцо (§ 1, упражнение 21) Крулля факториально.

11) Пусть K — поле и A — кольцо многочленов $K[X, Y]$, которое факториально. Если L — поле $K(X^2, Y/X) \subset K(X, Y)$, то показать, что кольцо $A \cap L$ не является факториальным.

12) Доказать предложение 5 n° 8, используя следствие 3 теоремы 1, гл. III, § 2, n° 8.

13) Распространить следствие предложения 7 n° 8 на случай, когда отделимое и полное локальное кольцо A не является целостным (использовать упражнение 6б) из *Алгебры*, гл. VIII, § 6).

14) Пусть A — нётерово полное локальное кольцо, поле вычетов которого имеет характеристику $p > 0$. В кольце формальных рядов $A[[T]]$ для каждого целого $n > 0$ рассмотрим элементы $\omega_n = (1-T)^{p^n}$ и $\gamma_n = 1 - \omega_n$. Показать, что γ_n с точностью до знака является отмеченным многочленом (n° 8); вывести отсюда, что $A_n = A[[T]]/(\gamma_n)$ отождествляется с алгеброй над A группы $G_n = \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$. Показать, что пересечение главных идеалов (γ_n) равно (0); вывести отсюда, что $A[[T]]$ отождествляется с проективным пределом $\varprojlim A_n$.

¶ 15) Пусть K — поле, полное относительно некоторого дискретного нормирования v, A — кольцо этого нормирования, k — его поле вычетов и P — некоторый многочлен из $A[X_1, \ldots, X_n]$ полной степени d, обладающий следующим свойством: существует такое алгебраическое расширение K' поля K,

что в кольце $K'[X_1, \ldots, X_n]$ многочлен P является произведением многочленов полной степени 1. Предположим, кроме того, что существуют два таких многочлена Q, R из $A[X_1, \ldots, X_n]$, что Q имеет полную степень s и содержит одночлен aX_1^s, где $\varphi(a) \neq 0$ (φ обозначает канонический гомоморфизм $A \to k$, R имеет степень $\leqslant d-s$ и $\overline{P} = \overline{Q} \cdot \overline{R}$ (обозначения из гл. III, § 4). Показать, что тогда в кольце $A[X_1, \ldots, X_n]$ существуют два таких многочлена Q_0, R_0 степеней соответственно s, $d-s$, что $P = Q_0 R_0$, $\overline{Q} = \overline{Q}_0$, $\overline{R} = \overline{R}_0$ и Q_0 содержит одночлен $a_0 X_1^s$, где $\varphi(0) = \varphi(a_0)$. (Рассмотреть P, Q, R как многочлены от X_1 с коэффициентами в кольце B, равном пополнению кольца $A[X_2, \ldots, X_n]$ относительно нормирования, полученного продолжением v по способу, описанному в предложении 2 гл. VI, § 10, n° 1; после этого применить лемму Гензеля, наконец, воспользоваться исходным условием на многочлен P.)

16) Пусть B — кольцо дискретного нормирования, поле вычетов k которого конечно, но не является простым полем; пусть k_0 — простое подполе в k, и пусть A — подкольцо в B, образованное элементами, классы которых в поле вычетов принадлежат k_0. Пусть π — униформизирующая кольца B и $(\theta_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ — система обратимых элементов из B, такая, что классы $\overline{\theta}_i \bmod \pi$ элементов θ_i образуют систему представителей группы $k^* \bmod k_0^*$. Показать, что элементы $p_i = \theta_i \pi$ экстремальны в A и что каждый элемент из A является произведением обратимого элемента и степеней элементов p_i, хотя кольцо A не является целозамкнутым.

17) а) Пусть A — целостное кольцо; показать, что в кольце $A[X_{ij}]$, где (X_{ij}) — семейство n^2 переменных $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$, элемент $\det(X_{ij})$ экстремален. (Свести доказательство к случаю, когда A — поле; заметить, что сомножители элемента $\det(X_{ij})$ обязательно были бы однородными многочленами, и провести индукцию по n.)

б) Пусть K — бесконечное поле и F многочлен из $K[Y_1, \ldots, Y_m]$, который будет записываться также в виде $F(Y)$; для любой квадратной матрицы $s = (\alpha_{ij})$ порядка m с элементами из K обозначим через $F(s \cdot Y)$ многочлен F, в котором каждый Y_i заменен элементом $\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} Y_j$. Показать, что если элемент F экстремален, то таков же и элемент $F(s \cdot Y)$ для любой обратимой матрицы s. Если существует такое целое число $k \geqslant 0$, что $F(s \cdot Y) = (\det(s))^k \cdot F(Y)$ для любой обратимой матрицы s, то F обязательно однороден по каждой из переменных Y_j; кроме того, если $F = GH$, где G и H — два многочлена из $K[Y_1, \ldots, Y_m]$, то существуют два таких целых числа p и q, что $p+q=k$ и $G(s \cdot Y) = (\det(s))^p G(Y)$, $H(s \cdot Y) = (\det(s))^q H(Y)$ для любой обратимой матрицы s (воспользоваться пунктом а)).

в) Пусть A — кольцо, не сводящееся к 0; рассмотрим кольцо многочленов $A[X_{ij}]$, где X_{ij} — набор из $n(n+1)/2$ (соответственно $2n(2n-1)/2$) переменных и $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ (соответственно $1 \leqslant i < j \leqslant 2n$). Пусть $U = (\xi_{ij})$ (соответственно $V = (\eta_{ij})$) — квадратная матрица порядка n (соответственно $2n$) над $A[X_{ij}]$, в которой $\xi_{ij} = X_{ij}$ для $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ и $\xi_{ij} = X_{ji}$ для $i > j$ (соответственно $\eta_{ii} = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant 2n$, $\eta_{ij} = X_{ij}$ для $1 \leqslant i < j \leqslant 2n$, $\eta_{ij} = -X_{ji}$ для $i > j$). Показать, что $\det(U)$ (соответственно $\mathrm{Pf}(V)$) является экстремальным элементом в $A[X_{ij}]$ (рассуждать так же, как в пункте б), рассматривая $\det(s \cdot U \cdot {}^t s)$ и $\mathrm{Pf}(s \cdot V \cdot {}^t s)$).

18) Пусть K — поле, $f = g/h$ — некоторый элемент поля рациональных дробей $K(U, V)$ от двух переменных, где g и h — два взаимно простых

многочлена из $K[U, V]$. Показать, что в поле рациональных дробей $K(X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n)$ от $2n$ переменных определитель $\det(f(X_i, Y_j))$ равен

$$\left(\prod_{i,j} h(X_i, Y_j)\right)^{-1} V(X_1, \ldots, X_n)\, V(Y_1, \ldots, Y_n)\, F(X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n),$$

где F — некоторый многочлен из $K[X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n]$ и $V(X_1, \ldots, X_n)$ — определитель Вандермонда (*Алгебра*, гл. III, § 6, n° 4). Рассмотреть частный случай, когда $f = 1/(U+V)$ („*тождество Коши*").

19) Если U — квадратная матрица порядка n, Δ — ее определитель и Δ_p — определитель ее p-й внешней степени (*Алгебра*, гл. III, § 6, n° 3), то показать, что

$$\Delta_p = \Delta^{\binom{n-1}{p-1}}$$

(воспользоваться упражнением 17а) и упражнением 11 *Алгебры*, гл. III, § 6).

20) Пусть A — факториальное кольцо и $f = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ — многочлен из $A[X]$; предположим, что существует такой экстремальный элемент p в A, что

1° существует такой индекс $k \leqslant n$, что a_k не делится на p, но a_i делится на p при $i < k$;

2° элемент a_0 делится на p, но не делится на p^2. Показать, что при этих условиях один из неприводимых множителей элемента f в кольце $A[X]$ имеет степень $\geqslant k$ (рассуждения проводить в кольце $(A/pA)[X]$). Рассмотреть частный случай, когда $k = n$ („*критерий неприводимости Эйзенштейна*").

21) Показать, что в $\mathbf{Z}[X]$ следующие многочлены неприводимы:

$X^n - a$, где один из простых делителей числа a имеет в разложении для a степень 1;

$X^{2^k} + 1$ (заменить X на $X+1$);

$X^4 + 3X^3 + 3X^2 - 5$;

$5X^4 - 6X^3 - aX^2 - 4X + 2$.

(Воспользоваться упражнением 20.)

¶ 22) а) Пусть k — упорядоченное поле и A — факторкольцо кольца многочленов $k[X, Y, Z]$ по главному идеалу $(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1)$; обозначим через x, y, z канонические образы элементов X, Y, Z в A. Показать, что кольцо A факториально (рассмотреть кольцо частных A_{z-1} (обозначение из гл. II, § 5, n° 1) и воспользоваться предложением 3 n° 4).

б) Пусть $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 3}$ — канонический базис пространства A^3, и пусть M — фактормодуль модуля A^3 по моногенному A-подмодулю N, порожденному элементом $xe_1 + ye_2 + ze_3$, показать, что M является проективным A-модулем (образовать подмодуль в A^3, дополнительный к N).

в) Показать, что если $k = \mathbf{R}$, то A-модуль M не является свободным (отождествить M с подмодулем модуля непрерывных сечений касательного расслоенного пространства к единичной сфере и воспользоваться тем фактом, что не существует непрерывного поля касательных векторов, отличных от нуля в каждой точке сферы).

¶ 23) Пусть B — кольцо Крулля, E — его поле частных и Δ — такое дифференцирование поля E, что $\Delta(B) \subset B$; пусть K — подполе в E, равное ядру Δ, и A — кольцо Крулля $B \cap K$; предположим, что K имеет характеристику $p > 0$; тогда $E^p \subset K$ и $B^p \subset A$, так что B представляет собой целое замыкание кольца A в E и определен канонический гомоморфизм $\overline{i}\colon C(A) \to C(B)$ (§ 1, n° 10). Обозначим через U группу обратимых элементов кольца B.

а) Если $b \in E$ — такой элемент, что $\mathrm{div}_B(b)$ есть канонический образ некоторого дивизора из $D(A)$, то показать, что $\Delta b/b \in B$ (заметить, что для всякого простого идеала $\mathfrak{P}$ высоты 1 кольца B существует такой элемент $b' \in K$, что $v_{\mathfrak{P}}(b) = v_{\mathfrak{P}}(b')$, и обратить внимание на то, что кольцо $B_{\mathfrak{P}}$ устойчиво относительно Δ). Пусть L — аддитивная подгруппа в B, образованная элементами вида $\Delta b/b$ („логарифмические производные"), которые принадлежат B (где $b \in E$ или $b \in B$, что приводит к одному и тому же, и $b \neq 0$); пусть L' — подгруппа в L, образованная элементами $\Delta u/u$, где $u \in U$. Показать, что для всякого дивизора $d \in D(A)$, образ которого в $D(B)$ является главным дивизором, класс mod L' элемента $\Delta b/b$ для любого такого b, что $i(d) = \mathrm{div}_B(b)$, зависит только от класса d в группе $C(A)$, и получить отсюда канонический инъективный гомоморфизм φ группы $\mathrm{Ker}(\overline{i})$ в группу L/L'.

б) Показать, что если $\Delta(B)$ не содержится ни в каком простом идеале высоты 1 кольца B и если $[E:K] = p$, то гомоморфизм φ *биективен*. (Свести упражнение к доказательству того, что если $\Delta b/b \in B$ для некоторого элемента $b \in E$ и если $\mathfrak{P}$ — такой простой идеал высоты 1 в B, что $v_{\mathfrak{P}}(b)$ не делится на p, то $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = 1$, где $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$; для этого вывести из сделанных предположений, что если t — униформизирующая кольца $B_{\mathfrak{P}}$, то $\Delta t/t \in B_{\mathfrak{P}}$, так что идеал $\mathfrak{P}B_{\mathfrak{P}}$ устойчив относительно Δ и отображение Δ определяет, следовательно, при переходе к факторкольцу дифференцирование $\overline{\Delta}$ поля вычетов $k = B_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}B_{\mathfrak{P}}$; показать, что $\overline{\Delta} \neq 0$, и получить отсюда, что $f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = p$.)

в) Пусть k — поле характеристики 2, B — кольцо многочленов $k[X, Y, Z]$ и Δ — дифференцирование поля $E = k(X, Y, Z)$, при котором $\Delta(X) = Y^4$, $\Delta(Y) = X^2$, $\Delta(Z) = XYZ$; поле K, равное ядру Δ, таково, что $[E:k] = 4$. Имеет место включение $\Delta(Z)/Z \in B$; однако показать, что $\mathrm{div}_B(Z)$ не является каноническим образом никакого дивизора из $D(A)$. (Рассуждать от противного, предполагая, что $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = 1$ для $\mathfrak{P} = BZ$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$; тогда в A существовала бы униформизирующая кольца $B_{\mathfrak{P}}$, которая обязательно имела бы вид $a(X, Y, Z)Z$, где $b = a(X, Y, 0) \neq 0$. Вывести отсюда, что должно было бы выполняться равенство $\Delta b/b = -XY$ и получить противоречие, подсчитав $\Delta(-XY)$.)

24) а) Пусть E — поле характеристики 2, Δ — некоторое дифференцирование этого поля и K — подполе в E, равное ядру Δ; предположим, что $[E:K] = 2$. Показать, что $\Delta^2 = a\Delta$ при $a \in K$ и что элемент $t \in E$ имеет вид $\Delta x/x$ тогда и только тогда, когда $\Delta t = at + t^2$.

б) Пусть B — факториальное локальное кольцо характеристики 2, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал, E — его поле частных и Δ — некоторое дифференцирование поля E. Предположим, что подполе K поля E, равное ядру отображения Δ, таково, что $[E:K] = 2$; кроме того, предположим, что существуют два таких элемента x, y в $\mathfrak{m}$, что Δx и Δy порождают идеал $\mathfrak{q}$ в B, который порождается множеством $\Delta(B)$. Показать тогда, что если $t = \Delta Z/Z$ принадлежит идеалу $\mathfrak{q}$, то существует такой обратимый элемент u в B, что $t = \Delta u/u$ (записать $t = r\,\Delta x + s\,\Delta y$ при r, s из B и воспользоваться пунктом a)).

¶ 25) Пусть k — поле характеристики 2, B — кольцо формальных рядов $k[[X, Y]]$, E — его поле частных и Δ — k-дифференцирование поля E, определенное равенствами $\Delta(X) = Y^{2j}$, $\Delta(Y) = X^{2i}$ (i, j — целые числа $\geqslant 0$); подкольцо A кольца B, образованное такими элементами $x \in B$, что $\Delta x = 0$, есть кольцо формальных рядов из $k[[X, Y, Z]]$, в которые нужно подставить X^2 вместо X, Y^2 вместо Y и $X^{2i+1} + Y^{2j+1}$ вместо Z.

а) Показать, что группа $C(A)$ содержит векторное пространство над k размерности $N(i, j)$, равной числу таких пар целых чисел (a, b), что

$0 \leqslant a < i$, $0 \leqslant b < j$ и $(2j+1)a + (2i+1)b \geqslant 2ij$. (Воспользовавшись упражнением 23б) и упражнением 24а), заметить, что элементы из L — это такие формальные ряды $F \in B$, что $\Delta F = F^2$; наделяя X весом $2j+1$, а Y — весом $2i+1$, разложить F в бесконечную сумму изобарических многочленов; если L_q — подгруппа в L, образованная рядами $F \in L$, изобарические компоненты которых имеют вес $\geqslant q$, то группа L/L' изоморфна прямой сумме групп C_q/C_{q+1}, где $C_q = L_q/(L' \cap L_q)$; вычислить эти группы для $q \geqslant 4ij$, используя упражнение 24б).)

б) Показать, что идеал AX^2 кольца A прост; если $A' = A[X^{-2}]$, то получить отсюда, что группы $C(A')$ и $C(A)$ изоморфны (n° 4, предложение 3). Показать, что A' — дедекиндово кольцо (рассмотреть кольцо $B' = B[X^{-2}]$, являющееся целым над A' и кольцом главных идеалов, и воспользоваться теоремой 3, гл. V, § 2, n° 4. Получить отсюда пример дедекиндова кольца, группа классов идеалов которого бесконечна.

26) Пусть A — факториальное кольцо и K — его поле частных. Для того чтобы элементы f_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ из кольца $B = A[X_1, \ldots, X_n]$ обладали тем свойством, что идеал $\sum_{i=1}^{r} Bf_i$ равен кольцу B, необходимо и достаточно, чтобы существовали многочлены v_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ из $K[X_1, \ldots, X_n]$, для которых $\sum_{i=1}^{r} v_i f_i = 1$ и которые, кроме того, удовлетворяют следующему условию: если $v_i = w_i/d$, где $d \in A$, многочлены w_i принадлежат кольцу $A[X_1, \ldots, X_n]$ и наибольший общий делитель множества коэффициентов всех многочленов w_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ равен 1, то для всякого экстремального элемента p кольца A, делящего d, идеал, порожденный классами элементов f_i в кольце $(A/Ap)[X_1, \ldots, X_n]$, совпадает с этим кольцом.

¶ 27) а) Пусть K — поле, A — кольцо, порожденное в алгебраическом замыкании поля рациональных дробей $K(U, V, X, Y)$ от четырех переменных кольцом многочленов $K[U, V, X, Y]$ и корнем Z многочлена $F = Z^7 - U^5X^2 - V^4Y^3$. Показать, что A является факториальным кольцом (ср. упражнение 7).

б) Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал, порожденный в A элементами X, Y, U, V и z; положим $C = A_{\mathfrak{p}}[[T]]$. Показать, что C — нётерово локальное кольцо, не являющееся факториальным, для которого ассоциированное градуированное кольцо $\mathrm{gr}(C)$ факториально (воспользоваться упражнением 8).

§ 4. Модули над целозамкнутыми нётеровыми кольцами

На протяжении этого параграфа A обозначает целостное *коммутативное кольцо* с полем частных K. Начиная с n° 2, предполагается, кроме того, что кольцо A *нётерово и целозамкнутое* (следовательно, является кольцом Крулля; см. § 1, n° 3, следствие теоремы 2); в этом случае через $P(A)$, $D(A)$, $C(A)$ соответственно обозначаются множество простых идеалов кольца A высоты 1 (§ 1, n° 6), группа дивизоров кольца A (§ 1, n° 3) и группа классов дивизоров кольца A (§ 1, n° 10), причем для последних используются аддитивные обозначения.

Общий метод изучения модулей конечного типа над целозамкнутым нётеровым кольцом A заключается в „локализации“

модулей по всем простым идеалам $\mathfrak{p} \in P(A)$ *высоты* 1 кольца A; поскольку $A_{\mathfrak{p}}$ является *кольцом дискретного нормирования* (§ 1, n°6, теорема 4), структура $A_{\mathfrak{p}}$-модулей конечного типа хорошо известна (*Алгебра*, гл. VII, § 4), и она дает некоторые сведения о структуре A-модулей конечного типа. В частном случае, когда A является дедекиндовым кольцом, этим способом можно развить теорию, в той же мере исчерпывающую, как и в случае, когда A — кольцо главных идеалов (n° 10).

1. Решетки

Определение 1. *Пусть V — векторное пространство конечной размерности над полем K. Решеткой в пространстве V относительно кольца A (или просто решеткой в V) называется всякий A-подмодуль M модуля V, удовлетворяющий следующему условию:*

существуют два свободных A-подмодуля L_1, L_2 пространства V, для которых $L_1 \subset M \subset L_2$ и $\operatorname{rg}_A(L_1) = \operatorname{rg}_K(V)$.

Примеры. 1) Если положить $V = K$, то решетками в K служат ненулевые *дробные идеалы* поля K (§ 1, n° 1, определение 1).

2) Если $\operatorname{rg}_K(V) = n$, то любой *свободный* A-подмодуль L в V обладает базисом, состоящим не более чем из n элементов, так как всякое подмножество в V, свободное над A, свободно и над K. Для того чтобы свободный подмодуль L был решеткой в V, необходимо и достаточно, чтобы L обладал базисом из n элементов (другими словами, чтобы $\operatorname{rg}_A(L) = n$).

3) Если A — кольцо *главных идеалов*, то любая решетка M в V является A-модулем конечного типа (так как A нётерово) и не имеет кручения; следовательно, эта решетка является *свободным* A-модулем (*Алгебра*, гл. VII, § 4, n° 3, следствие 2 теоремы 2).

Предложение 1. *Для того чтобы A-подмодуль M пространства V был решеткой в V, необходимо и достаточно, чтобы $KM = V$ и чтобы M содержался в некотором A-подмодуле конечного типа пространства V.*

Эти условия, очевидно, необходимы, так как свободный A-подмодуль пространства V, имеющий тот же ранг, что и V, порождает V. Обратно, если $KM = V$, то M содержит некоторый базис $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ пространства V над полем K; следовательно, он содержит A-подмодуль L_1, порожденный элементами a_i и являющийся свободным. С другой стороны, если $M \supset M_1$, где M_1 — некоторый A-подмодуль пространства V, порожденный конечным числом элементов b_j, и если $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — некоторый базис

пространства V над K, то существует такой элемент $s \neq 0$ кольца A, что каждый из b_j является линейной комбинацией *с коэффициентами в* A элементов $s^{-1}e_i$; если L_2 — свободный A-подмодуль пространства V, порожденный элементами $s^{-1}e_i$, то $M \subset L_2$.

Следствие. *Предположим, что кольцо A нётерово. Для того чтобы некоторый A-подмодуль M пространства V был решеткой в V, необходимо и достаточно, чтобы $KM = V$ и M был модулем конечного типа.*

Замечание. 1) Напомним, что для любого A-подмодуля M пространства V каноническое отображение $M \otimes_A K \to V$ инъективно и имеет своим образом модуль KM (*Algèbre*, chap. II, 3e éd., § 7, n° 10, proposition 26); равенство $KM = V$ означает, следовательно, что это отображение *биективно*.

Предложение 2. *Пусть M — решетка в V, M_1 — некоторый A-подмодуль в V. Если существуют два таких элемента x, y из K^*, что $xM \subset M_1 \subset yM$, то M_1 является решеткой в V. Обратно, если M_1 — решетка в V, то существуют два ненулевых элемента a, b кольца A, для которых $aM \subset M_1 \subset b^{-1}M$.*

Действительно, если L_1, L_2 — две свободные решетки в V, для которых $L_1 \subset M \subset L_2$, то соотношения $xM \subset M_1 \subset yM$ влекут за собой следующее: $xL_1 \subset M_1 \subset yL_2$ и xL_1, и yL_2 являются свободными решетками; обратно, если M_1 — решетка и $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — базис модуля L_2 над A, то из равенства $KM_1 = V$ следует существование такого элемента $x = a/s \in K^*$ (где a и s — ненулевые элементы из A), что $xe_i \in M_1$ для любого i, откуда $xM \subset xL_2 \subset M_1$, так что a fortiori $aM \subset M_1$. Меняя ролями M и M_1, аналогичным образом убеждаемся в существовании такого элемента $b \neq 0$ из A, что $bM_1 \subset M$.

Предложение 3. (i) *Если M_1 и M_2 — решетки в V, то $M_1 \cap M_2$ и $M_1 + M_2$ также являются решетками в V.*

(ii) *Если W — векторное подпространство в V и если M — решетка в V, то $M \cap W$ — решетка в пространстве W.*

(iii) *Пусть V, V_1, ..., V_k — векторные пространства конечного ранга над полем K, и пусть $f\colon V_1 \times \ldots \times V_k \to V$ — полилинейное отображение, образ которого порождает V. Если M_i — решетка в V_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, то A-подмодуль пространства V, порожденный множеством $f(M_1 \times \ldots \times M_k)$, является решеткой в V.*

(iv) *Пусть V и W — векторные пространства конечного ранга над полем K, M — некоторая решетка в V и N — решетка в W.*

Тогда A-подмодуль $N:M$ пространства $\mathrm{Hom}_K(V, W)$, *образованный такими K-линейными отображениями f, что $f(M)\subset N$, является решеткой в* $\mathrm{Hom}_K(V, W)$.

(i) В силу предложения 2, существуют отличные от нуля элементы a, b в кольце A, для которых $aM_1\subset M_2\subset b^{-1}M_1$; отсюда мы заключаем, что подмодули $M_1\cap M_2$ и M_1+M_2 заключены между aM_1 и $b^{-1}M_1$ и, следовательно, в силу предложения 2, являются решетками.

(ii) Пусть S — дополнение к W в пространстве V, L_W — некоторая свободная решетка в W, L_S — некоторая свободная решетка в S, так что $L=L_W\otimes L_S$ — свободная решетка в V. Следовательно, существуют такие x, y в K^*, что $xL\subset M\subset yL$. Отсюда следует, что $xL_W\subset M\cap W\subset yL_W$; это показывает, что $M\cap W$ является решеткой в W (предложение 2).

(iii) Поскольку $KM_i=V_i$, то ясно, что, в силу линейности, множество $f(M_1\times\ldots\times M_k)$ порождает векторное K-пространство V; с другой стороны, для любого i существует такой A-подмодуль N_i конечного типа пространства V_i, что $M_i\subset N_i$; A-подмодуль N пространства V, порожденный $f(N_1\times\ldots\times N_k)$, является модулем конечного типа и содержит M; следовательно, M — решетка в V (предложение 1).

(iv) Пусть P (соответственно Q) — свободная решетка в V (соответственно W), содержащая M (соответственно содержащаяся в N); очевидно, что $N:M\subset Q:P$. Но непосредственно видно, что модуль $Q:P$ изоморфен модулю $\mathrm{Hom}_A(P, Q)$; следовательно, $Q:P$ является свободным A-модулем ранга $(\mathrm{rg}_A P)(\mathrm{rg}_A Q)$ (*Algèbre*, chap. II, 3^e éd., § 1, n° 6, corollaire de la proposition 6) и тем самым — решеткой в $\mathrm{Hom}_K(V, W)$. Аналогично, если P' (соответственно Q') — свободная решетка в V (соответственно W), содержащаяся в M (соответственно содержащая N), то $Q':P'\supset N:M$ и $Q':P'$ является решеткой в $\mathrm{Hom}_K(V, W)$; отсюда следует наше утверждение.

Замечания. 2) Предложение 3 (i) показывает, что множество $R(V)$ решеток пространства V является *решеточно-упорядоченным* в смысле отношения включения; более того, если M — фиксированная решетка пространства V, то решетки xM, где x пробегает K^*, образуют часть множества $R(V)$, которая одновременно *коинициальна и конфинальна* (*Théorie des ensembles*, chap. III, 2^e éd., § 1, n° 7)[1].

3) В обозначениях предложения 3 (iv) каноническое отображение $N:M\to\mathrm{Hom}_A(M, N)$, которое каждому K-линейному отображению $f\in N:M$ сопоставляет A-линейное отображение

[1] См. также *Теория множеств*, гл. III, § 1, n° 7. — *Прим. ред.*

модуля M в модуль N, имеющее тот же график, что и $f|M$, *биективно*: действительно, любое A-линейное отображение $g\colon M \to N$ продолжается до некоторого K-линейного отображения $g\otimes 1\colon M\otimes_A K \to N\otimes_A K$, а мы видели, что $M\otimes_A K$ и $N\otimes_A K$ отождествляются соответственно с Y и W.

В частности, если взять $W = K$, $N = A$, то $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ — это не что иное, как *векторное K-пространство V^*, сопряженное к V*, и $A : M$ отождествляется с A-модулем M^*, сопряженным к M; в дальнейшем мы будем считать, что это отождествление уже осуществлено и будем говорить, что M^* есть *решетка, сопряженная к M*; таким образом, это *множество таких $x^* \in V^*$, что $\langle x, x^*\rangle \in A$ для всякого $x \in M$.*

Следствие. *Пусть U, V, W — три векторных пространства конечного ранга над полем K, $f\colon U \times V \to W$ — некоторое невырожденное слева K-линейное отображение* (*Алгебра*, гл. IX, § 1, n° 1, определение 3). *Если M — решетка в V и N — решетка в W, то множество $N :_f M$ таких $x \in U$, что $f(x, y) \in N$ для всякого $y \in M$, является решеткой в U.*

Пусть $s_f\colon U \to \mathrm{Hom}_K(V, W)$ есть линейное отображение, ассоциированное слева с f (*Алгебра*, гл. IX, loc. cit.), т. е. $s_f(x)$ есть линейное отображение $y \to f(x, y)$; напомним, что невырожденность слева отображения f означает, что отображение s_f *инъективно*. В силу предложения 3 (iv), модуль $N : M$ является решеткой в $\mathrm{Hom}_K(V, W)$; поскольку $N :_f M = s_f^{-1}(N : M)$ и s_f инъективно, следствие вытекает из предложения 3 (ii).

Примеры. 4) Пусть S — некоторая K-алгебра конечного ранга (не обязательно ассоциативная), обладающая единичным элементом. Тогда билинейное отображение $(x, y) \to xy$ из $S \times S$ в S невырожденно (слева и справа). Если M и N — решетки в S относительно кольца A, то таково же множество $M \cdot N$ (предложение 3 (iii)) и множество таких $x \in S$, что $xM \subset N$ (следствие предложения 3). Заметим, что существует *A-подалгебра* в S, содержащая единичный элемент из S и являющаяся *решеткой* в S; действительно, рассмотрим некоторый базис $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ алгебры S, в котором e_1 — единичный элемент из S; пусть $e_i e_j = \sum_k c_{ijk} e_k$ — таблица умножения в S $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$, так что $c_{1jk} = \delta_{jk}$, $c_{i1k} = \delta_{ik}$ (символы Кронекера). Пусть $s \in A$ — такой ненулевой элемент, что $c'_{ijk} = sc_{ijk} \in A$ для любой тройки индексов (i, j, k); если положить $s'_i = s^{-1}e_i$ для $i \geqslant 2$, то $e'_i e'_j = sc'_{ij1}e_1 + \sum_{k\geqslant 2} c'_{ijk}e'_k$ для $i \geqslant 2$ и $j \geqslant 2$; решетка в S, имеющая в качестве базиса e_1 и элементы e'_i $(2 \leqslant i \leqslant n)$, является A-под-

алгеброй алгебры S, в которой e_1 служит единичным элементом.

5) Пусть V — векторное пространство конечной размерности над полем K и f — некоторая невырожденная билинейная форма на V. Если M — некоторая решетка в V, то из следствия предложения 3 вытекает, что множество M_f^* таких $x \in V$, что $f(x, y) \in A$, снова является решеткой в V; если $s_f\colon V \to V^*$ — линейное отображение, ассоциированное слева с f (и биективное), то $s_f(M_f^*)$ есть не что иное, как решетка M^*, сопряженная к M.

Предложение 4. *Пусть B — целостное коммутативное кольцо, A — подкольцо в B, K и L — соответствующие поля частных колец A и B. Пусть V — векторное пространство конечной размерности над K.*

(i) *Для любой решетки M в пространстве V относительно кольца A образ BM модуля $M_{(B)} = M \otimes_A B$ в пространстве $V_{(L)} = V \otimes_K L$ является решеткой в $V_{(L)}$ относительно кольца B.*

(ii) *Предположим дополнительно, что B — плоский A-модуль. Тогда каноническое отображение $M_{(B)} \to BM$ биективно. Если, кроме того, B — строго плоский модуль, то отображение, сопоставляющее каждой решетке M в пространстве V относительно кольца A решетку BM в пространстве $V_{(L)}$ относительно кольца B, инъективно.*

Поскольку $KM = V$, то ясно, что $L \cdot (BM) = V_{(L)}$; с другой стороны, M содержится в некотором A-подмодуле M_1 конечного типа пространства V; следовательно, BM содержится в BM_1, являющемся B-модулем конечного типа, откуда и следует (i) (предложение 1).

(ii) Имеет место соотношение $V_{(L)} = V \otimes_K L = V \otimes_A L$ (гл. II, § 2, n° 7, предложение 18); поскольку L — плоский B-модуль, то L является также и плоским A-модулем (гл. 1, § 2, n° 7, следствие 3 предложения 8). Поскольку B — плоский A-модуль, каноническое отображение $M \otimes_A B \to V \otimes_A B$ инъективно; с другой стороны, так как V — свободный K-модуль и K — плоский A-модуль, V является плоским A-модулем (гл. 1, § 2, n° 7, следствие 3 предложения 8); следовательно, каноническое отображение $V \otimes_A B \to V \otimes_A L$ инъективно; тем самым доказано первое утверждение. Чтобы убедиться в том, что из соотношения $BM_1 = BM_2$ вытекает равенство $M_1 = M_2$ для любых двух решеток M_1, M_2 пространства V относительно кольца A, когда B — строго плоский A-модуль, надо заметить сначала, что $BM_1 \cap BM_2 = B(M_1 \cap M_2)$ (гл. 1, § 2, n° 6, предложение 6). Следовательно, можно ограничиться случаем, когда $M_1 \subset M_2$, а тогда наше утверждение вытекает из предложения 3 гл. 1, § 2, n° 1, примененного к каноническому вложению $M_1 \to M_2$.

Следствие. *Предположим, что A — кольцо дискретного нормирования. Пусть $\hat{A}$ — его пополнение и $\hat{K}$ — поле частных кольца $\hat{A}$* (гл. VI, § 5, n° 3). *Отображение* φ, *которое каждой решетке M в пространстве V сопоставляет решетку $\hat{A}M$ в пространстве $\hat{V} = V \otimes_K \hat{K}$ относительно кольца $\hat{A}$, биективно, и обратное к нему отображение сопоставляет каждой решетке M' в пространстве $\hat{V}$ относительно кольца $\hat{A}$ ее пересечение $M' \cap V$ (где V канонически отождествлено с некоторым векторным K-подпространством в $\hat{V}$).*

Если L — свободная решетка в V, то решетки aL (для $a \in A$, $a \neq 0$) образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в некоторой топологии $\mathscr{T}$ пространства V (согласованной со структурой A-модуля), которая (если выбрать некоторый базис L над A) может быть отождествлена с *топологией произведения* на K^n; в силу предложения 2, фундаментальная система окрестностей нуля в топологии $\mathscr{T}$ образована также и *всеми решетками* пространства V относительно кольца A. Ясно, что $\hat{V}$ есть *пополнение* пространства V относительно топологии $\mathscr{T}$. Кроме того, если $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал кольца A, то топология $\mathscr{T}$ индуцирует на любой решетке M в пространстве V относительно кольца A $\mathfrak{m}$-адическую топологию, ибо M является A-модулем конечного типа (гл. III, § 3, n° 2, теорема 2) и $\hat{A}M$ представляет собой пополнение модуля M относительно этой топологии (гл. III, § 2, n° 12, предложение 16). Кроме того, так как множество M открыто (и, следовательно, замкнуто) в V, то $\hat{A}M \cap V = M$, а это снова доказывает тот факт, что отображение φ *инъективно* (это непосредственно следует из предложения 4 (ii), так как $\hat{A}$ является строго плоским A-модулем). Наконец, если M' — решетка в пространстве $\hat{V}$ относительно кольца $\hat{A}$, то $M = M' \cap V$ — решетка пространства V относительно кольца A, так как, поскольку любой элемент из $\hat{A}$ является произведением некоторого элемента из A и некоторого обратимого элемента из $\hat{A}$, из предложения 2 вытекает, что существуют элементы a, b из $A - \{0\}$, для которых $a\hat{A}L \subset M' \subset b^{-1}\hat{A}L$, откуда $aL \subset M' \cap V \subset bL$. Кроме того, M' открыто в $\hat{V}$ и, поскольку V плотно в $\hat{V}$, M' является пополнением $M' \cap V = M$; этим доказано, что отображение φ *сюръективно*, откуда и вытекает следствие.

Пример 6. Пусть S — некоторая мультипликативная система кольца A, не содержащая 0; применим предложение 4 к $B = S^{-1}A$; тогда мы получим, что $L = K$, $BM = S^{-1}M$; зна-

чит, $S^{-1}M$ является решеткой в пространстве V относительно кольца $S^{-1}A$. Кроме того, имеет место

Предложение 5. *Пусть V, W — два векторных пространства конечного ранга над полем K, M — некоторая решетка в V, N — некоторая решетка в W. Если M имеет конечный тип, то* (в обозначениях предложения 3)

$$S^{-1}(N:M) = S^{-1}N : S^{-1}M \tag{1}$$

в пространстве $\mathrm{Hom}_K(V, W)$.

Ясно, что первый член формулы (1) содержится во втором.

Обратно, пусть $f \in S^{-1}N : S^{-1}M$, и пусть $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — система образующих решетки M. Существует такой элемент $s \in S$, что $f(x_i) \in s^{-1}N$ для любого i; следовательно, $sf \in N : M$; предложение доказано.

2. Двойственность, рефлексивные модули

Напомним, что начиная с этого места кольцо A предполагается *нётеровым и целозамкнутым* и что через $P(A)$ (или просто через P) обозначается множество простых идеалов высоты 1 кольца A. Любая решетка относительно кольца A является A-модулем *конечного типа* (n° 1, следствие предложения 1).

Пусть V — векторное пространство конечного ранга над полем K, V^* — сопряженное к нему пространство и V^{**} — его второе сопряженное пространство; мы будем отождествлять V и V^{**} с помощью канонического отображения c_V (*Algébre*, chap. II, 3^e éd., § 7, n° 5, théorème 6). Пусть M — решетка в пространстве V; напомним, что A-модуль M^*, сопряженный к M, канонически отождествляется с *решеткой, сопряженной* к M, т. е. множеством таких $x^* \in V^*$, что $(x, x^*) \in A$ для любого $x \in M$. Второй сопряженный A-модуль M^{**} модуля M является, следовательно, *решеткой* в пространстве V, содержащей M. Кроме того, $M^{***} = M^*$, ибо из включения $M \subset M^{**}$ следует, что $(M^{**})^* \subset M^*$ и, с другой стороны, $M^* \subset (M^*)^{**}$ в силу изложенного выше (ср. *Théorie des ensembles*, chap. III, 2^e éd., § 1, n° 5, proposition 2).

Если $\mathfrak{p}$ — простой идеал, то предложение 5, примененное к $N = A$, дает соотношение $(M^*)_{\mathfrak{p}} = (M_{\mathfrak{p}})^*$, которое оправдывает обозначение $M^*_{\mathfrak{p}}$ для обеих частей этого равенства.

Теорема 1. *Если M — решетка в пространстве V, то* $M^* = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} M^*_{\mathfrak{p}}$.

Ясно, что M^* содержится в каждом из модулей $M_\mathfrak{p}^*$. Обратно, предположим, что $x^* \in \bigcap_{\mathfrak{p}\in P} M_\mathfrak{p}^*$; если $x \in M$, то $(x, x^*) \in \bigcap_{\mathfrak{p}\in P} A_\mathfrak{p}$ и, поскольку $A = \bigcap_{\mathfrak{p}\in P} A_\mathfrak{p}$ (§ 1, n° 6, теорема 4), то $x^* \in M^*$.

Следствие. *Имеет место равенство* $M^{**} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in P} M_\mathfrak{p}$.

Действительно, теорема 1, примененная к M^*, показывает, что $M^{**} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in P} M_\mathfrak{p}^{**}$. Но так как $A_\mathfrak{p}$ — кольцо главных идеалов (§ 1, n° 6, теорема 4), то $M_\mathfrak{p}$ является свободным A-модулем конечного типа; следовательно, $M_\mathfrak{p}^{**}$ канонически отождествляется с $M_\mathfrak{p}$ (*Algébre*, chap. II, 3^e éd., § 2, n° 7, proposition 14), откуда и вытекает следствие.

Для произвольной решетки M относительно кольца A при каноническом отображении c_M: $M \to M^{**}$ (*Algébre*, chap. II, 3^e éd., § 2, n° 7) элемент $x \in M$ отождествляется с самим собой, так как x является таким единственным элементом y пространства $V = V^{**}$, что $(x, x^*) = (y, x^*)$ для любого $x^* \in M^*$, ибо M^* порождает V^*. Мы говорим, что модуль M *рефлексивен*, если $M^{**} = M$ (loc. cit). Поскольку выше было показано, что $M^* = (M^*)^{**}$, мы видим, что модуль, *сопряженный* к произвольной решетке M, всегда *рефлексивен*.

Замечание 1. Пусть M — некоторый A-модуль конечного типа. Немедленно проверяется, что модуль M^*, сопряженный к M, отождествленный с некоторым A-подмодулем в $\mathrm{Hom}_A(M, K)$, является *решеткой* в векторном K-пространстве $\mathrm{Hom}_A(M, K)$; в частности, любой *рефлексивный* A-модуль конечного типа изоморфен некоторой решетке в надлежащим образом выбранном векторном K-пространстве.

Теорема 2. *Если M — решетка в пространстве V, то следующие условия эквивалентны*:

а) *модуль M рефлексивен*;

б) $M = \bigcap_{\mathfrak{p}\in P} M_\mathfrak{p}$;

в) $\mathrm{Ass}(V/M) \subset P$.

Эквивалентность условий а) и б) вытекает из следствия теоремы 1. Если выполнено условие б), то V/M канонически отождествляется с A-подмодулем произведения $\prod_{\mathfrak{p}\in P} (V/M_\mathfrak{p})$; но на самом деле V/M содержится в *прямой сумме* $\bigoplus_{\mathfrak{p}\in P} (V/M_\mathfrak{p})$. Действительно, если $L \subset M$ — свободная решетка и $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ —

базис этой решетки, то каждая координата x_i точки $x \in V$ относительно (e_i) принадлежит $A_\mathfrak{p}$ для всех, кроме конечного числа, значений $\mathfrak{p}$ (§ 1, n° 6, теорема 4); следовательно, $x \in \in L_\mathfrak{p} \subset M_\mathfrak{p}$ для всех, кроме конечного числа, значений $\mathfrak{p} \in P$. Соотношение $V/M \subset \bigoplus_{\mathfrak{p} \in P} (V/M_\mathfrak{p})$ влечет за собой

$$\operatorname{Ass}(V/M) \subset \bigcup_{\mathfrak{p} \in P} \operatorname{Ass}(V/M_\mathfrak{p}).$$

Поскольку $V/M_\mathfrak{p}$ является $A_\mathfrak{p}$-модулем, любой элемент из $A - \mathfrak{p}$ не может аннулировать ненулевой элемент из $V/M_\mathfrak{p}$, так как элементы из $A - \mathfrak{p}$ обратимы в $A_\mathfrak{p}$; элементы из $\operatorname{Ass}(V/M_\mathfrak{p})$ содержатся, следовательно, в $\mathfrak{p}$ и отличны от нуля, так как $V/M_\mathfrak{p}$ представляет собой $A_\mathfrak{p}$-модуль кручения. Поскольку $\mathfrak{p}$ имеет высоту 1, то обязательно имеет место равенство $\operatorname{Ass}(V/M_\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$, так как $V/M_\mathfrak{p} \neq \{0\}$. Следовательно, $\operatorname{Ass}(V/M) \subset P$.

Наконец, если выполнено условие в), то

$$\operatorname{Ass}(M^{**}/M) \subset \operatorname{Ass}(V/M) \subset P.$$

С другой стороны, если $\mathfrak{p} \in P$, то, как мы видели при доказательстве следствия теоремы 1, $M^{**}_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p}$, откуда $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Ass}(M^{**}/M)$ (гл. IV, § 1, n° 3, следствие 1 предложения 7). Отсюда мы заключаем, что $\operatorname{Ass}(M^{**}/M) = \varnothing$ и тем самым $M^{**} = M$ (гл. IV, § 1, n° 1, следствие 1 предложения 2).

Следствие. *Пусть M, N — две решетки в пространстве V относительно кольца A, причем модуль N рефлексивен. Для того чтобы $M \subset N$, необходимо и достаточно, чтобы при всяком $\mathfrak{p} \in P$ выполнялось включение $M_\mathfrak{p} \subset N_\mathfrak{p}$.*

Очевидно, условие необходимо, и если оно выполнено, то $\bigcap_{\mathfrak{p} \in P} M_\mathfrak{p} \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} N_\mathfrak{p} = N$. Поскольку $M \subset M^{**} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} M_\mathfrak{p}$, то $M \subset N$.

Примеры. 1) Любая *свободная* решетка рефлексивна.

2) Положим $V = K$. Для того чтобы некоторый дробный идеал $\mathfrak{a}$ поля K был рефлексивной решеткой, необходимо и достаточно, чтобы он был *дивизориальным идеалом*; это верно в силу критерия б) теоремы 2 и предложений 5 и 7 § 1, n° 4.

3) Пусть M — решетка относительно кольца A; если S — мультипликативная система кольца A, не содержащая нуля, то предложение 5 n° 1 показывает, что $S^{-1}(M^*) = (S^{-1}M)^*$; если модуль M рефлексивен, то $S^{-1}M$ является, следовательно, рефлексивной решеткой относительно кольца $S^{-1}A$.

Предложение 6. (i) *Если M_1 и M_2 — рефлексивные решетки в пространстве V, то решетка $M_1 \cap M_2$ также рефлексивна.*

(ii) *Если W — векторное подпространство в V и если M — рефлексивная решетка в V, то $M \cap W$ — рефлексивная решетка в W.*

(iii) *Пусть V, W — два векторных пространства конечного ранга над полем K и M* (соответственно N) *— решетка в V* (соответственно в W). *Если N рефлексивна, то решетка $N : M$ в $\mathrm{Hom}_K(V, W)$* (n° 1, предложение 3) *рефлексивна.*

(i) Имеет место равенство $(M_1 \cap M_2)_\mathfrak{p} = (M_1)_\mathfrak{p} \cap (M_2)_\mathfrak{p}$ для любого $\mathfrak{p} \in P$ (гл. II, § 2, n° 4, теорема 1). Если $M_1 = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} (M_1)_\mathfrak{p}$ и $M_2 = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} (M_2)_\mathfrak{p}$, то $M_1 \cap M_2 = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} (M_1 \cap M_2)_\mathfrak{p}$, откуда следует требуемое утверждение в силу теоремы 2.

(ii) Аналогично выполняется равенство $(M \cap W)_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p} \cap W_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p} \cap W$, откуда следует, что $M \cap W = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} (M \cap W)_\mathfrak{p}$; тем самым доказано утверждение (ii).

(iii) Поскольку M — модуль конечного типа, из предложения 5 n° 1 следует, что $(N : M)_\mathfrak{p} = N_\mathfrak{p} : M_\mathfrak{p}$; кроме того, из соотношения $N = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} N_\mathfrak{p}$ вытекает, что

$$N : M = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} (N_\mathfrak{p} : M_\mathfrak{p}).$$

Действительно, если $f \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} (N_\mathfrak{p} : M_\mathfrak{p})$ и если $x \in M$, то $f(x) \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} N_\mathfrak{p} = N$, откуда $f \in N : M$; этим доказано, что модуль $N : M$ рефлексивен.

Замечания. 2) Если M_1 и M_2 — рефлексивные решетки в пространстве V, то решетка $M_1 + M_2$ не обязана быть рефлексивной (ср. § 1, упражнение 2).

3) Если M — некоторый A-модуль конечного типа и T — его подмодуль кручения, то модуль M^*, сопряженный к M, совпадает с модулем, сопряженным к M/T, так как для любой линейной формы f на M образ $f(T)$ является подмодулем кручения кольца B, т. е. равен нулю. Поскольку модуль M/T изоморфен решетке в некотором векторном пространстве над полем K, мы видим, что модуль, сопряженный к *любому* A-модулю конечного типа, *рефлексивен.*

Предложение 7. *Пусть $0 \to M \to N \to Q \to 0$ — точная последовательность A-модулей. Предположим, что N — модуль конечного типа без кручения.*

(i) *Если модуль M рефлексивен, то* $\mathrm{Ass}(Q) \subset PU\{\{0\}\}$ (*другими словами, любой идеал, ассоциированный с модулем Q, либо равен* 0, *либо имеет высоту* 1).

(ii) *Обратно, если N — рефлексивный модуль и если* $\mathrm{Ass}(Q) \subset P \cup \{\{0\}\}$, *то модуль M рефлексивен.*

Поскольку кольцо A нётерово, модуль M также имеет конечный тип; если положить $V = M_{(K)}$, $W = N_{(K)}$, то M (соответственно N) канонически отождествится с некоторой решеткой в пространстве V (соответственно W) (n° 1, предложение 1). Рассмотрим две точные последовательности

$$0 \to V/M \to W/M \to W/V \to 0,$$

$$0 \to Q \to W/M \to W/N \to 0.$$

(i) Из них получается (гл. IV, § 1, n° 1, предложение 3), что

$$\mathrm{Ass}(Q) \subset \mathrm{Ass}(W/M) \subset \mathrm{Ass}(V/M) \cup \mathrm{Ass}(W/V).$$

Если модуль M рефлексивен, то $\mathrm{Ass}(V/M) \subset P$ (теорема 2); с другой стороны, ясно, что множество $\mathrm{Ass}(W/V)$ или пусто, или состоит из $\{0\}$; отсюда следует утверждение (i).

(ii) Аналогичным образом получаем, что

$$\mathrm{Ass}(V/M) \subset \mathrm{Ass}(W/M) \subset \mathrm{Ass}(Q) \cup \mathrm{Ass}(W/N).$$

В силу имеющихся предположений, мы получаем, следовательно, что $\mathrm{Ass}(V/M) \subset P \cup \{0\}$. Но V/M является A-модулем кручения; значит, $\{0\} \notin \mathrm{Ass}(V/M)$. Из теоремы 2 вытекает теперь, что модуль M рефлексивен.

Предложение 8. *Пусть R и S — два коммутативных кольца, $\rho\colon R \to S$ — гомоморфизм колец и M — некоторый R-модуль конечного типа. Предположим, что R нётерово и что S — плоский R-модуль. Тогда если M — рефлексивный модуль, то рефлексивным будет и S-модуль $M_{(S)} = M \otimes_R S$.*

Известно (гл. 1, § 2, n° 10, предложение 11), что существует канонический изоморфизм $\omega_M\colon (M^*)_{(S)} \to (M_{(S)})^*$, при котором

$$\langle x \otimes 1,\ \omega_M(x^* \otimes 1)\rangle = \rho(\langle x, x^*\rangle)$$

для $x \in M$, $x^* \in M^*$. Так как M есть фактормодуль некоторого свободного R-модуля L конечного типа, то M^* изоморфен R-подмодулю сопряженного модуля L^*, причем L^* — свободный модуль конечного типа. Так как кольцо R нётерово, то модуль M^* также является R-модулем конечного типа, и потому имеет место изоморфизм $\omega_{M^*}\colon (M^{**})_{(S)} \to ((M^*)_{(S)})^*$, при котором

$$\langle x^* \otimes 1,\ \omega_{M^*}(x^{**} \otimes 1)\rangle = \rho(\langle x^*, x^{**}\rangle)$$

для $x^* \in M^*$ и $x^{**} \in M^{**}$. С другой стороны, имеет место изоморфизм ${}^t\omega_M$: $(M_{(S)})^{**} \to ((M^*)_{(S)})^*$, и с помощью композиции мы получаем из него канонический изоморфизм

$$\varphi = ({}^t\omega_M^{-1}) \circ (\omega_{M^*})\colon\ (M^{**})_{(S)} \to (M_{(S)})^{**},$$

такой, что в предыдущих обозначениях имеем

$$\langle \omega_M(x^* \otimes 1),\ \varphi(x^{**} \otimes 1)\rangle = \rho(\langle x^*, x^{**}\rangle). \tag{1}$$

Рассмотрим теперь канонический гомоморфизм c_M: $M \to M^{**}$ и покажем, что композиция гомоморфизмов

$$\psi\colon\ M_{(S)} \xrightarrow{c_M \otimes 1} (M^{**})_{(S)} \to (M_{(S)})^{**} \tag{2}$$

есть не что иное, как канонический гомоморфизм $c_{M_{(S)}}$.

Это немедленно следует из равенства (1), которое приводит к следующим соотношениям:

$$\langle \omega_M(x^* \otimes 1),\ \psi(x \otimes 1)\rangle = \rho(\langle x^*, c_M(x)\rangle) = \rho(\langle x, x^*\rangle) = \\ = \langle x \otimes 1,\ \omega_M(x^* \otimes 1)\rangle,$$

и того факта, что элементы $\omega_M(x^* \otimes 1)$ порождают $(M_{(S)})^*$. Поскольку условие рефлексивности модуля M означает, что гомоморфизм c_M биективен, то тем самым биективен и гомоморфизм $c_M \otimes 1$, и, следовательно, биективен гомоморфизм $\psi = c_{M_{(S)}}$; тем самым наше утверждение доказано.

3. Локальное построение рефлексивных модулей

Мы сохраняем предположения и обозначения n° 2. Будем говорить, что некоторое свойство имеет место *„для почти всех идеалов* $\mathfrak{p} \in P$“, если множество тех $\mathfrak{p} \in P$, для которых оно не выполняется, *конечно.*

Теорема 3. *Пусть V — векторное пространство конечного ранга над полем K и M — решетка в V относительно кольца A.*

(i) *Пусть N — решетка в V относительно A; тогда для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца A модуль $N_{\mathfrak{p}}$ является решеткой в V относительно кольца $A_{\mathfrak{p}}$ и для почти всех $\mathfrak{p} \in P$ имеет место равенство $N_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}$.*

(ii) *Обратно, предположим, что для каждого $\mathfrak{p} \in P$ задана такая решетка $N(\mathfrak{p})$ в пространстве V относительно кольца $A_{\mathfrak{p}}$, что $N(\mathfrak{p}) = M_{\mathfrak{p}}$ для почти всех $\mathfrak{p} \in P$. Тогда $N = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} N(\mathfrak{p})$ — рефлексивная решетка в пространстве Y относительно кольца A, и она является единственной рефлексивной решеткой N' в V относительно A, такой, что $N'_{\mathfrak{p}} = N(\mathfrak{p})$ для каждого $\mathfrak{p} \in P$.*

(i) Первое утверждение следует из предложения 4 n° 1. Кроме того, в K^* существуют элементы x, y, для которых $xN \subset M \subset yN$ (n° 1, предложение 2); известно, что $v_\mathfrak{p}(x) = v_\mathfrak{p}(y) = 0$ для почти всех $\mathfrak{p} \in P$ (§ 1 n° 6, теорема 4), что доказывает обратимость элементов x и y в кольце $A_\mathfrak{p}$; следовательно, $M_\mathfrak{p} = N_\mathfrak{p}$.

(ii) Заменив M на $x^{-1}M$ при некотором $x \neq 0$ из A, можно предполагать, что $N(\mathfrak{p}) \subset M_\mathfrak{p}$ для любого $\mathfrak{p} \in P$. Пусть $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_h$ — такие элементы множества P, что $N(\mathfrak{p}) = M_\mathfrak{p}$ для любого $\mathfrak{p}$, отличного от $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$. Положим

$$Q = M \cap N(\mathfrak{p}_1) \cap \ldots \cap N(\mathfrak{p}_h).$$

Так как каждый из модулей $N(\mathfrak{p}_i)$ содержит свободную решетку относительно кольца $A_{\mathfrak{p}_i}$, то a fortiori он содержит некоторую решетку пространства V относительно кольца A, и, следовательно, Q содержит решетку пространства V относительно A (n° 1, предложение 3). Поскольку Q содержится в M, то Q представляет собой решетку относительно кольца A. Для доказательства того, что $Q_\mathfrak{p} = N(\mathfrak{p})$ для всякого $\mathfrak{p} \in P$, мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}'$ — два простых идеала кольца A, для которых (0) является единственным простым идеалом в A, содержащимся в $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}'$. Тогда для любого A-подмодуля E пространства V выполняется равенство $(E_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}'} = K \cdot E$.*

Пусть S — мультипликативная система $(A - \mathfrak{p})(A - \mathfrak{p}')$ в кольце A; в силу предложения 7 гл. II, § 2, n° 3, справедливо равенство $(E_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}'} = S^{-1}E$. Кроме того, $A \subset S^{-1}A \subset K$; простые идеалы кольца $S^{-1}A$ соответствуют тем простым идеалам $\mathfrak{q}$ кольца A, для которых $\mathfrak{q} \cap S = \varnothing$ (гл. II, § 2, n° 5, предложение 11), а, по предположению, (0) является единственным простым идеалом в A, не пересекающим S; следовательно, $S^{-1}A = K$ и $S^{-1}E = K \cdot E$.

Возвратимся теперь к доказательству пункта (ii). Если $\mathfrak{p} \in P$ отличается от $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$, то лемма 1, примененная к модулю $N(\mathfrak{p}_i)$, дает равенство $(N(\mathfrak{p}_i))_\mathfrak{p} = ((N(\mathfrak{p}_i))_{\mathfrak{p}_i})_\mathfrak{p} = K \cdot N(\mathfrak{p}_i) = V$, ибо идеалы $\mathfrak{p}_i$ и $\mathfrak{p}$ имеют высоту 1. Тогда

$$Q_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p} \cap (N(\mathfrak{p}_1))_\mathfrak{p} \cap \ldots \cap (N(\mathfrak{p}_h))_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p} = N(\mathfrak{p})$$

(гл. II, § 2, n° 4). С другой стороны, если идеал $\mathfrak{p}$ равен $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$, то $(N(\mathfrak{p}_i))_{\mathfrak{p}_j} = V$ для $i \neq j$, в силу такого же рассуждения, как и выше, и $(N(\mathfrak{p}_i))_{\mathfrak{p}_i} = N(\mathfrak{p}_i)$, откуда

$$Q_{\mathfrak{p}_i} = M_{\mathfrak{p}_i} \cap N(\mathfrak{p}_i) = N(\mathfrak{p}_i).$$

Мы доказали, таким образом, что $Q_\mathfrak{p} = N(\mathfrak{p})$ для любого $\mathfrak{p} \in P$. Тогда $N = Q^{**} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} Q_\mathfrak{p}$ — рефлексивный модуль и для любого $\mathfrak{p} \in P$ выполняются соотношения $N_\mathfrak{p} = Q_\mathfrak{p} = N(\mathfrak{p})$. Свойство единственности следует немедленно из теоремы 2 n° 2.

Замечание. Пусть L — некоторая свободная решетка в пространстве V относительно кольца A. Так как $A_\mathfrak{p}$ есть кольцо главных идеалов для $\mathfrak{p} \in P$, то $N(\mathfrak{p})$ является свободным A-модулем того же ранга, что решетка L, и существует такой автоморфизм $u(\mathfrak{p}) \in \mathbf{GL}(V)$, что $u(\mathfrak{p})(L_\mathfrak{p}) = N_\mathfrak{p}$; причем это условие определяет $u(\mathfrak{p})$ с точностью до умножения справа на некоторый элемент из $\mathbf{GL}(L_\mathfrak{p})$. Условие $N(\mathfrak{p}) = L_\mathfrak{p}$ для почти всех $\mathfrak{p} \in P$ означает, что $u(\mathfrak{p}) \in \mathbf{GL}(L_\mathfrak{p})$ для почти всех $\mathfrak{p} \in P$. Семейства $(u\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \in P}$, удовлетворяющие этому последнему условию, образуют мультипликативную группу $\mathbf{GL}_a(V)$, содержащую в качестве подгруппы произведение $\prod_{\mathfrak{p} \in P} \mathbf{GL}(L_\mathfrak{p})$. Теорема 3 показывает теперь, что *множество рефлексивных решеток пространства V находится в каноническом взаимно однозначном соответствии с однородным пространством* $\mathbf{GL}_a(V) \Big/ \prod_{\mathfrak{p} \in P} \mathbf{GL}(L_\mathfrak{p})$. Если выбрать базис $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ решетки L над кольцом A, то $\mathbf{GL}(V)$ (соответственно $\mathbf{GL}(L_\rho)$) отождествляется с группой обратимых матриц $\mathbf{GL}(n, K)$ (соответственно $\mathbf{GL}(n, A_\mathfrak{p})$), а группа $\mathbf{GL}_a(V)$ — с группой таких систем $(U(\mathfrak{p}))_{\mathfrak{p} \in P}$ матриц порядка n, что $U(\mathfrak{p}) \in \mathbf{GL}(n, K)$ для любого $\mathfrak{p} \in P$ и $U(\mathfrak{p}) \in \mathbf{GL}(n, A_\mathfrak{p})$ для почти всех $\mathfrak{p} \in P$. Когда A является дедекиндовым кольцом, группа $\mathbf{GL}_a(V)$ отождествляется также с группой $\mathbf{GL}(n, \mathrm{A})$, где A — кольцо ограниченных аделей (§ 2, n° 4).

4. *Псевдоизоморфизмы*

Мы сохраняем предположения и обозначения n° 2 и 3.

Предложение 9. *Пусть M — некоторый A-модуль конечного типа. Тогда эквивалентны следующие условия:*

а) $M_\mathfrak{p} = 0$ *для любого простого идеала* $\mathfrak{p}$ *высоты* $\leqslant 1$;

б) *аннулятор* $\mathfrak{a}$ *модуля* M *является ненулевым идеалом и* $A : \mathfrak{a} = A$ ($A : \mathfrak{a}$ *обозначает, как в* § 1, n° 1, *множество таких* $x \in K$, *что* $x\mathfrak{a} \subset A$).

Известно (гл. II, § 2, n° 2, следствие 2 предложения 4), что условие $M_\mathfrak{p} = 0$ эквивалентно тому, что $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$, т. е. равенству $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p}$ (гл. II, § 2, n° 5, замечание). С другой стороны, для любого целого идеала $\mathfrak{b} \neq 0$ кольца A соотношение „$\mathfrak{b}A_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p}$ для

любого $\mathfrak{p} \in P''$ эквивалентно равенству $\operatorname{div} \mathfrak{b} = \operatorname{div} A = 0$ в группе $D(A)$ (§ 1, n° 4, предложение 7) или равенству $\operatorname{div}(A : \mathfrak{b}) = 0$, а поскольку идеал $A : \mathfrak{b}$ дивизориален (§ 1, n° 1, предложение 1), это соотношение эквивалентно также равенству $A : \mathfrak{b} = A$. Справедливость доказываемого предложения устанавливается теперь с помощью того замечания, что соотношение $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$ для $\mathfrak{p} = (0)$ влечет за собой $\mathfrak{a} \neq (0)$.

Замечание 1. Эквивалентные условия предложения 9 означают также, что множество $\operatorname{Ass}(M)$ не содержит ни одного простого идеала высоты $\leqslant 1$. *Их можно проинтерпретировать, сказав, что $\operatorname{Supp}(M)$ имеет *коразмерность* $\geqslant 2$ в $\operatorname{Spec}(A)$.*

Определение 2. *A-модуль M называется псевдонулевым, если он имеет конечный тип и если выполняются эквивалентные условия предложения* 9.

Это определение и предложение 9 показывают, что псевдонулевой A-модуль является *A-модулем кручения*; обратное неверно.

Примеры. 1) Если A — дедекиндово кольцо, то любой простой идеал в A имеет высоту $\leqslant 1$; утверждение, что M — псевдонулевой модуль, означает тогда, что $\operatorname{Supp}(M) = \varnothing$, т. е. что $M = 0$ (гл. II, § 4, n° 4).

2) Пусть k — поле, $A = k[X, Y]$ — кольцо многочленов над k от двух переменных; если $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал $AX + AY$ кольца A, то A-модуль $A/\mathfrak{m}$ является псевдонулевым; действительно, его аннулятор $\mathfrak{m}$ не имеет высоту $\leqslant 1$, так как он содержит главные простые идеалы AX и AY и отличается от них; следовательно, $A : \mathfrak{m} = A$ (§ 1, n° 6, следствие 1 теоремы 3).

Определение 3. *Пусть M и N — два A-модуля и $f\colon M \to N$ — некоторый гомоморфизм. Говорят, что гомоморфизм f псевдоинъективен* (соответственно *псевдосюръективен*, *псевдонулевой*), *если* $\operatorname{Ker}(f)$ (соответственно $\operatorname{Coker}(f)$, $\operatorname{Im}(f)$) *является псевдонулевым модулем; гомоморфизм f называется псевдобиективным, если он одновременно псевдоинъективен и псевдосюръективен.*

Псевдобиективный гомоморфизм называют также *псевдоизоморфизмом.*

Предположим, что M и N — модули конечного типа; тогда, для того чтобы гомоморфизм $f\colon M \to N$ был псевдоинъективным (соответственно псевдосюръективным, псевдонулевым), необходимо и достаточно, чтобы для любого $\mathfrak{p} \in P \cup \{\{0\}\}$ гомоморфизм $f_{\mathfrak{p}}\colon M_{\mathfrak{p}} = N_{\mathfrak{p}}$ был инъективным (соответственно сюръективным, нулевым). Это вытекает из того, что A-модуль $A_{\mathfrak{p}}$ плоский (ср. гл. I, § 2, n° 3, замечание 2).

Пример 3. Пусть M — некоторый A-модуль без кручения конечного типа; тогда каноническое отображение c_M: $M \to M^{**}$ модуля M в его второй сопряженный модуль является *псевдоизоморфизмом*. Действительно, M можно отождествить с некоторой решеткой в пространстве $V = M \otimes_A K$ (n° 1, предложение 1); мы видели, что $M_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p}^{**}$ для каждого $\mathfrak{p} \in P$ (n° 2, пример 2), а оба модуля $M_\mathfrak{p}$ и $M_\mathfrak{p}^{**}$ для $\mathfrak{p} = 0$ равны V.

Теорема 4. *Пусть E — некоторый A-модуль конечного типа, T — подмодуль кручения в E и $M = E/T$. Тогда существует псевдоизоморфизм*

$$f\colon E \to T \times M.$$

Сначала мы докажем две леммы.

Лемма 2. *Пусть $(\mathfrak{p}_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ — непустое конечное семейство простых идеалов кольца A высоты 1, и пусть $S = \bigcap_i (A - \mathfrak{p}_i)$; тогда кольцо $S^{-1}A$ является кольцом главных идеалов.*

Действительно, $S^{-1}A$ является полулокальным кольцом, максимальными идеалами в котором служат $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{p}_i S^{-1}A$ для $1 \leqslant i \leqslant k$, причем локальное кольцо $(S^{-1}A)_{\mathfrak{m}_i}$ изоморфно $A_{\mathfrak{p}_i}$ (гл. II, § 3, n° 5, предложение 17), т. е. кольцу дискретного нормирования. Следовательно, кольцо $S^{-1}A$ дедекиндово (§ 2, n° 2, теорема 1е)) и, поскольку оно полулокально, оно является кольцом главных идеалов (§ 2, n° 2, предложение 1).

Лемма 3. *Существует гомоморфизм g: $E \to T$, ограничение которого на T является одновременно гомотетией и псевдоизоморфизмом.*

Пусть $\mathfrak{a}$ — аннулятор модуля T; так как T является A-модулем кручения конечного типа, то $\mathfrak{a} \neq 0$. Пусть $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ — простые идеалы высоты 1, содержащие $\mathfrak{a}$ (имеется лишь конечное число таких идеалов; см. § 1, n° 6, теорема 4); если это число равно 0, то модуль T псевдонулевой (предложение 9а)), и можно положить $g = 0$. В противном же случае пусть $S = \bigcap_i (A - \mathfrak{p}_i)$.

В силу леммы 2, кольцо $S^{-1}A$ является кольцом главных идеалов; следовательно, $S^{-1}M$, являющийся $(S^{-1}A)$-модулем конечного типа без кручения, *свободен* (*Алгебра*, гл. VII, § 4, n° 3, следствие 2 теоремы 2). Поскольку $S^{-1}M = (S^{-1}E)/(S^{-1}T)$, модуль $S^{-1}T$ является прямым слагаемым модуля $S^{-1}E$ (*Algébre*, chap. II, 3e éd., § 1, n° 11, proposition 21). Но $\mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}E, S^{-1}T) =$

$= S^{-1}\mathrm{Hom}_A(E, T)$ (гл. II, § 2, n° 7, предложение 19). Следовательно, существуют такие $s_0 \in S$ и $g_0 \in \mathrm{Hom}_A(E, T)$, что $s_0^{-1}g_0$ является проекцией модуля $S^{-1}E$ на $S^{-1}T$. Если через $h_0 \in \mathrm{Hom}_A(T, T)$ обозначить ограничение отображения g_0 на T, то существует такой элемент $s_1 \in S$, что $s_1 h_0(x) = s_1 s_0 x$ для любого $x \in T$. Полагая $s = s_1 s_0$, $g = s_1 g_0$, мы видим, следовательно, что $h = s_1 h_0$ является гомотетией умножения на s модуля T и равно ограничению отображения g на T. Остается проверить, что h является псевдоизоморфизмом. Однако если $\mathfrak{p} = 0$ или если $\mathfrak{p} \in P$ отличается от $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, то $T_{\mathfrak{p}} = 0$ (гл. II, § 4, n° 4, предложение 17) и $h_{\mathfrak{p}}$: $T_{\mathfrak{p}} \to T_{\mathfrak{p}}$ является изоморфизмом; если же, напротив, $\mathfrak{p}$ равен одному из идеалов $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, то элемент s обратим в $A_{\mathfrak{p}_i}$ и $h_{\mathfrak{p}_i}$ (гомотетия умножения на s модуля $T_{\mathfrak{p}_i}$) снова оказывается изоморфизмом; тем самым доказательство леммы 3 закончено.

Докажем теперь теорему 4. Пусть g: $E \to T$ — гомоморфизм, удовлетворяющий условиям леммы 3; пусть h — ограничение гомоморфизма g на T, и пусть π — каноническая проекция модуля E на M. Покажем, что гомоморфизм $f = (g, \pi)$: $E \to T \times M$ является искомым. Действительно, следующая диаграмма, в которой строки являются точными, коммутативна:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & T & \to & E & \to & M & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle 1_M} & & \\ 0 & \to & T & \to & T \times M & \to & M & \to & 0 \end{array}$$

Змеевидная диаграмма (гл. I, § 1, n° 4, предложение 2) дает точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Ker}(h) \to \mathrm{Ker}(f) \to 0 \to \mathrm{Coker}(h) \to \mathrm{Coker}(f) \to 0;$$

следовательно, модуль $\mathrm{Ker}(f)$ изоморфен $\mathrm{Ker}(h)$, а $\mathrm{Coker}(f)$ изоморфен $\mathrm{Coker}(h)$. Поскольку h — псевдоизоморфизм, f также является псевдоизоморфизмом.

Можно сказать, что „с точностью до псевдоизоморфизма" теорема 4 сводит изучение A-модулей конечного типа, с одной стороны, к изучению модулей без кручения и, с другой стороны, к изучению модулей кручения. Кроме того, мы видели выше (пример 3), что модуль без кручения псевдоизоморфен своему второму сопряженному, т. е. некоторому *рефлексивному* модулю. Что касается модулей кручения, то имеет место следующий результат, который определяет их с точностью до псевдоизоморфизма.

Теорема 5. *Пусть T — некоторый A-модуль кручения конечного типа. Тогда имеются два таких конечных семейства* $(n_i)_{i \in I}$

и $(\mathfrak{p}_i)_{i\in I}$, *где* n_i — *целые числа* $\geqslant 1$ *и* $\mathfrak{p}_i$ — *простые идеалы высоты* 1 *кольца* A, *что если* $T' = \bigoplus_{i\in I} A/\mathfrak{p}_i^{n_i}$, *то существует псевдоизоморфизм модуля* T *в* T'. *Более того, семейства* $(n_i)_{i\in I}$ *и* $(\mathfrak{p}_i)_{i\in I}$, *обладающие этим свойством, единственны с точностью до перестановки индексов, и идеалы* $\mathfrak{p}_i$ *содержат аннулятор модуля* T.

Единственность. Если $f\colon T \to T'$ — псевдоизоморфизм и если $\mathfrak{p}\in P$, то $f_{\mathfrak{p}}\colon T_{\mathfrak{p}} \to T'_{\mathfrak{p}}$ — изоморфизм. Но $T'_{\mathfrak{p}}$ является прямой суммой модулей $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^{n_i}A_{\mathfrak{p}}$, взятой по тем индексам i, для которых $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}$; идеалы $\mathfrak{p}^{n_i}A_{\mathfrak{p}}$ являются, следовательно, *элементарными делителями* $A_{\mathfrak{p}}$-модуля кручения $T_{\mathfrak{p}}$ (*Алгебра*, гл. VII, § 4, n° 7); их единственность была доказана в предложении 7 *Алгебры*, гл. VII, § 4, n° 7.

Существование. Можно ограничиться случаем, когда $T \neq 0$. Пусть $\mathfrak{a}$ — аннулятор (ненулевой и отличный от A) модуля T, пусть $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ — простые идеалы кольца A высоты 1, содержащие $\mathfrak{a}$ (их имеется лишь конечное число (§ 1, n° 6, теорема 4)), и пусть $S = \bigcap_i (A - \mathfrak{p}_i)$. Полулокальное кольцо $A' = S^{-1}A$ является кольцом главных идеалов (лемма 2) и в качестве максимальных идеалов имеет идеалы $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{p}_i A'$. Так как $S^{-1}T$ является A'-модулем кручения конечного типа, то он изоморфен конечной прямой сумме $\bigoplus_{j\in I} A'/\mathfrak{m}_{\varphi(j)}^{n_j}$, где φ — некоторое отображение конечного множества I в интервал $(1, k)$ (*Алгебра*, гл. VII, § 4, n° 7, предложение 7). Поскольку модуль $A'/\mathfrak{m}_{\varphi(j)}^{n_j}$ изоморфен модулю $S^{-1}\left(A/\mathfrak{p}_{\varphi(j)}^{n_j}\right)$ (гл. II, § 2, n° 4), мы получаем некоторый A-модуль кручения T' искомого типа и некоторый изоморфизм f_0 $S^{-1}T$ на $S^{-1}T'$. Так как модуль $\mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}T, S^{-1}T')$ равен модулю $S^{-1}\mathrm{Hom}(T, T')$ (гл. II, § 2, n° 7, предложение 19), то существует такой элемент $s\in S$ и такой гомоморфизм $f\colon T \to T'$, что $f_0 = s^{-1}f$. Остается доказать, что f — псевдоизоморфизм. Но если $\mathfrak{p} = 0$ или если $\mathfrak{p}\in P$ отличен от $\mathfrak{p}_i$, то $T_{\mathfrak{p}} = T'_{\mathfrak{p}} = 0$ (гл. II, § 4, n° 4, предложение 17); если же, напротив, $\mathfrak{p}$ является одним из идеалов $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, то элемент s обратим в $A_{\mathfrak{p}_i}$, и поскольку $f_{\mathfrak{p}_i} = s\,(f_0)_{\mathfrak{p}_i}$ и $(f_0)_{\mathfrak{p}_i}$ — изоморфизм модуля $T_{\mathfrak{p}_i} = \left(S^{-1}T\right)_{\mathfrak{m}_i}$ на $T'_{\mathfrak{p}_i} = \left(S^{-1}T'\right)_{\mathfrak{m}_i}$, изоморфизмом является и $f_{\mathfrak{p}_i}$.

Замечание 2. В формулировке теоремы 5 можно заменить модули $A/\mathfrak{p}_i^{n_i}$ на $A/\mathfrak{p}_i^{(n_i)}$ (§ 1, n° 4, предложение 8). Действительно, для любого $\mathfrak{p}\in P$ каноническое отображение $g\colon A/\mathfrak{p}^n \to A/\mathfrak{p}^{(n)} = A/(A \cap \mathfrak{p}^n A_{\mathfrak{p}})$ является псевдоизоморфизмом, так

как для идеала $\mathfrak{q} \in P$, отличного от $\mathfrak{p}$, имеют место равенства $A_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}^n A_\mathfrak{q} = A_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}^{(n)} A_\mathfrak{q} = 0$, и $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n A_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^{(n)} A_\mathfrak{p}$.

*Пусть задана точная последовательность A-модулей $E \to F \to G$; если E и G являются псевдонулевыми, то таков же и модуль F, что вытекает из определения 2 и теоремы 1 гл. II, § 2, n° 4. На языке теории категорий можно, следовательно, сказать, что в категории A-модулей $\mathscr{C}$ подкатегория $\mathscr{C}'$ псевдонулевых модулей является *плотной*, и мы можем определить *факторкатегорию* $\mathscr{C}/\mathscr{C}'$: ее объектами будут по-прежнему A-модули, но множество морфизмов модуля E в F (где E, F принадлежат $\mathscr{C}/\mathscr{C}'$) будет представлять собой индуктивный предел множества коммутативных групп $\mathrm{Hom}_A(E', F')$, где E' (соответственно F') пробегает множество подмодулей модуля E (соответственно множество фактормодулей F/F'' модуля F), таких, что E/E' (соответственно F'') — псевдонулевой модуль. При этом, очевидно, для всякой пары A-модулей E, F имеется канонический гомоморфизм $\mathrm{Hom}_\mathscr{C}(E, F) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}/\mathscr{C}'}(E, F)$. Утверждение, что некоторый гомоморфизм $u \in \mathrm{Hom}_A(E, F)$ псевдонулевой (соответственно псевдоинъективный, псевдосюръективный, псевдобиективный), означает, что его канонический образ в $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}/\mathscr{C}'}(E, F)$ является нулевым (соответственно мономорфизмом, эпиморфизмом, изоморфизмом).

5. Дивизоры, связанные с модулями кручения

Сохраняются обозначения и предположения из n° 2,3 и 4. Напомним, что $D(A)$ (или просто D) обозначает *группу дивизоров* кольца A, записываемую аддитивно: известно (§ 1, n° 3, теорема 2), что D представляет собой свободный $\mathbf{Z}$-модуль, порожденный элементами множества P.

Пусть T — некоторый A-модуль кручения конечного типа. Для всякого $\mathfrak{p} \in P$ $T_\mathfrak{p}$ является $A_\mathfrak{p}$-модулем кручения конечного типа и, следовательно, модулем *конечной длины* (гл. IV, § 2, n° 5, следствие 2 предложения 7); будем обозначать эту длину через $l_\mathfrak{p}(T)$. Тогда $T_\mathfrak{p} = 0$ для любого $\mathfrak{p}$, не содержащего аннулятор модуля T, и, следовательно, для почти всех $\mathfrak{p}$ (§ 1, n° 6, теорема 4); это оправдывает следующее определение:

Определение 4. *Если T — некоторый A-модуль кручения конечного типа, то содержанием модуля называется дивизор*

$$\chi(T) = \sum_{\mathfrak{p} \in P} l_\mathfrak{p}(T) \cdot \mathfrak{p}.$$

Предложение 10. (i) *Пусть $0 \to T_1 \to T_2 \to T_3 \to 0$ — точная последовательность A-модулей кручения конечного типа. Тогда*

$$\chi(T_2) = \chi(T_1) + \chi(T_3).$$

(ii) *Если существует псевдоизоморфизм* $f\colon T_1 \to T_2$, *то* $\chi(T_1) = \chi(T_2)$.

(iii) *Равенство* $\chi(T) = 0$ *имеет место тогда и только тогда, когда модуль* T *является псевдонулевым.*

В силу определения 4, достаточно рассмотреть значения $l_\mathfrak{p}$ для соответствующих модулей при всех $\mathfrak{p} \in P$. Свойство (i) вытекает из теоремы 1 гл. II, § 2, n° 4, и из аддитивности длины на точной последовательности (*Algebre*, chap. II, 3^e éd., § 1, n° 10, proposition 16); свойства же (ii) и (iii) вытекают немедленно из определений n° 4.

Следствие. *Пусть* $0 \to T_n \to T_{n-1} \to \ldots \to T_0 \to 0$ — *точная последовательность* A-*модулей кручения конечного типа. Тогда* $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \chi(T_i) = 0$.

В силу теоремы 1 гл. II, § 2, n° 4, это опять-таки следует из аналогичного свойства длины $l_\mathfrak{p}$ (*Algebre*, chap. II, 3^e éd., § 1, n° 10, 3 corolaire de la proposition 16).

Напомним (гл. II, § 5, n° 4), что можно говорить о *множестве* $\boldsymbol{F}(A)$ *классов* A-*модулей конечного типа* относительно изоморфизма; для любого A-модуля M конечного типа обозначим через $\mathrm{cl}(M)$ соответствующий элемент множества $\boldsymbol{F}(A)$; будем обозначать через $\boldsymbol{T}(A)$ подмножество в $\boldsymbol{F}(A)$, образованное классами A-модулей кручения конечного типа. Ясно, что χ определяет отображение множества $\boldsymbol{T}(A)$ в $D(A)$, снова обозначаемое через χ, для которого $\chi(\mathrm{cl}(T)) = \chi(T)$.

Предложение 11. *Пусть* G — *коммутативная группа, записываемая аддитивно, и* $\varphi\colon \boldsymbol{T}(A) \to G$ — *некоторое отображение; для любого* A-*модуля кручения конечного типа* T *положим, допуская некоторую непоследовательность в обозначениях,* $\varphi(T) = \varphi(\mathrm{cl}(T))$. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) *если* $0 \to T_1 \to T_2 \to T_3 \to 0$ — *точная последовательность* A-*модулей конечного типа, то* $\varphi(T_2) = \varphi(T_1) + \varphi(T_3)$;

2) *если модуль* T *псевдонулевой, то* $\varphi(T) = 0$.

Тогда существует, и притом единственный, гомоморфизм $\theta\colon D(A) \to G$, *такой, что* $\varphi = \theta \circ \chi$.

Поскольку $\chi(A/\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ для любого $\mathfrak{p} \in A$, то должно иметь место равенство $\theta(\mathfrak{p}) = \varphi(A/\mathfrak{p})$ для любого $\mathfrak{p} \in P$; этим и устанавливается единственность θ, так как элементы из P образуют базис группы $D(A)$. Обратно, пусть θ — гомоморфизм группы $D(A)$ в группу G, при котором $\theta(\mathfrak{p}) = \varphi(A/\mathfrak{p})$ для всякого $\mathfrak{p} \in P$; покажем, что он является искомым. Для этого положим $\psi(T) = \varphi(T) - \theta(\chi(T))$ для произвольного A-модуля кручения конечного типа T; ясно, что условия 1) и 2) выполняются, если за-

менить в них φ на ψ. С другой стороны, $\psi(A/\mathfrak{p}) = 0$, если $\mathfrak{p} \in P$; если же простой идеал $\mathfrak{p}$ отличен от нуля и не лежит в P, то аннулятор модуля $A/\mathfrak{p}$ не содержится ни в одном идеале множества P; следовательно (n° 4, теорема 5), модуль $A/\mathfrak{p}$ псевдонулевой и $\psi(A/\mathfrak{p}) = 0$. Но всякий A-модуль кручения конечного типа T допускает композиционный ряд, факторы которого изоморфны A-модулям типа $A/\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(T)$ (гл. IV, § 1, n° 4, теоремы 1 и 2) и, следовательно, $\mathfrak{p} \neq 0$, так как G — модуль кручения. Индукцией по длине этого композиционного ряда получается (в силу свойства 1) для ψ), что $\psi(T) = 0$.

* Можно, как и в n° 4, рассмотреть факторкатегорию $\mathscr{T}/\mathscr{T}'$ категории $\mathscr{T}$ всех A-модулей кручения конечного типа по плотной подкатегории $\mathscr{T}'$, состоящей из псевдонулевых A-модулей кручения конечного типа. На языке абелевых категорий предложение 11 выражает тот факт, что *группа Гротендика* абелевой категории $\mathscr{T}/\mathscr{T}'$ канонически изоморфна группе $D(A)$*.

Предложение 12. *Если $\mathfrak{a}$ — ненулевой идеал из A, то*

$$\chi(A/\mathfrak{a}) = \chi((A:\mathfrak{a})/A) = \mathrm{div}\,\mathfrak{a}.$$

Пусть $\mathfrak{p} \in P$. Тогда $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}}A_{\mathfrak{p}}$ при $n_{\mathfrak{p}} \geqslant 0$, так как $A_{\mathfrak{p}}$ является кольцом дискретного нормирования. Так как $(A/\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}}$, то $l_{\mathfrak{p}}(A/\mathfrak{a}) = n_{\mathfrak{p}}$, откуда $\chi(A/\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{p}\in P} n_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p} = \mathrm{div}\,\mathfrak{a}$ (§ 1, n° 4, предложение 7).

С другой стороны, $(A:\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^{-n_{\mathfrak{p}}}A_{\mathfrak{p}}$; следовательно, $l_{\mathfrak{p}}((A:\mathfrak{a})/A) = n_{\mathfrak{p}}$ и доказательство заканчивается тем же способом.

6. *Относительный инвариант двух решеток*

Мы сохраняем здесь обозначения и предположения n° 2—5. Пусть V — векторное пространство конечного ранга n над полем K, M — некоторая решетка в пространстве V относительно кольца A. Пусть W — внешняя степень $\bigwedge^n V$, являющаяся векторным пространством *ранга* 1 над K. Обозначим через M_W решетку в пространстве W, порожденную образом модуля M^n при каноническом отображении $V^n \to \bigwedge^n V$ (n° 1, предложение 3 (iii)); следует заметить, что M_W не обязательно изоморфно модулю $\bigwedge^n M$ (*Алгебра*, гл. III, § 5, упражнение 9). Если e — базис пространства W над полем K, то можно поэтому записать $M_W = \mathfrak{a} \cdot e$, где $\mathfrak{a}$ — некоторый ненулевой дробный идеал кольца A.

Пусть M' — вторая решетка в пространстве V; положим $M'_W = \mathfrak{a}' \cdot e$, где $\mathfrak{a}'$ — ненулевой дробный идеал кольца A; диви-

зор $\operatorname{div}(\mathfrak{a}) - \operatorname{div}(\mathfrak{a}')$ *не зависит от выбора базиса* e *пространства* W, так как при изменении базиса $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}'$ умножаются на один и тот же элемент из K^*; положим $\chi(M, M') = \operatorname{div}(\mathfrak{a}) - \operatorname{div}(\mathfrak{a}')$ и будем называть этот дивизор *относительным инвариантом решетки* M' *по отношению к решетке* M. Ясно, что если M, M', M'' — три решетки в пространстве V, то

$$\chi(M, M') + \chi(M', M'') + \chi(M'', M) = 0; \tag{3}$$

$$\chi(M, M') + \chi(M', M) = 0. \tag{4}$$

Для любого $\mathfrak{p} \in P$ из определений немедленно следует, что $(M_W)_\mathfrak{p} = (M_\mathfrak{p})_W$; кроме того, $M_\mathfrak{p}$ является свободным $A_\mathfrak{p}$-модулем, так как $A_\mathfrak{p}$ — кольцо главных идеалов; поэтому базис модуля $M_\mathfrak{p}$ над $A_\mathfrak{p}$ является базисом пространства V над полем K; следовательно, $(M_\mathfrak{p})_W = \bigwedge^n (M_\mathfrak{p})$ (гл. II, § 2, n° 8), а дробный идеал $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} = \mathfrak{a}A_\mathfrak{p}$ является главным. Если положить $\mathfrak{a}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}}A_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}'_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{n'_\mathfrak{p}}A_\mathfrak{p}$, то

$$\chi(M, M') = \sum_{\mathfrak{p} \in P} (n_\mathfrak{p} - n'_\mathfrak{p})\,\mathfrak{p},$$

и потому можно также записать равенство

$$\chi(M, M') = \sum_{\mathfrak{p} \in P} \chi(M_\mathfrak{p}, M'_\mathfrak{p}), \tag{5}$$

отождествив $D(A_\mathfrak{p})$ с $\mathbf{Z}$-подмодулем в $D(A)$, порожденным идеалом $\mathfrak{p}$.

Предложение 13. *Пусть* M *— некоторая решетка пространства* V *и* u *— некоторый* K*-автоморфизм пространства* V. *Тогда*

$$-\chi(M, u(M)) = \operatorname{div}(\det(u)). \tag{6}$$

Действительно, для любого $\mathfrak{p} \in P$ имеет место равенство $\bigwedge^n (u(M)_\mathfrak{p}) = \bigwedge^n (u(M_\mathfrak{p}))$; если $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — базис модуля $M_\mathfrak{p}$, то

$$\bigwedge^n (M_\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p} e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$$

и $\bigwedge^n (u(M_\mathfrak{p})) = A_\mathfrak{p} \cdot \det(u)\, e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$, откуда, в силу формулы (5), следует

Предложение 1. *Если* M, M' *— такие две решетки в пространстве* V, *что* $M' \subset M$, *то* M/M' *является* A*-модулем кручения конечного типа и*

$$\chi(M, M') = -\chi(M/M'). \tag{7}$$

Действительно, ясно, что $M/M' \subset V/M'$ является модулем кручения конечного типа; с другой стороны, для любого $\mathfrak{p} \in P$, как известно (*Алгебра*, гл. VII, § 4, n° 2, теорема 1), существуют такие базисы $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ модуля $M_\mathfrak{p}$ и $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ модуля $M'_\mathfrak{p}$, что $e'_i = \pi^{\nu_i} e_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$, где $\nu_i \geqslant 0$ — целые числа и π — уни-

формизирующая кольца $A_\mathfrak{p}$. Следовательно, в прежних обозначениях, $n'_\mathfrak{p} - n_\mathfrak{p} = \sum_{i=1}^{n} \nu_i$; с другой стороны, модуль $(M/M')_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p}/M'_\mathfrak{p}$ изоморфен $A_\mathfrak{p}$-модулю кручения $\bigoplus_{i=1}^{n} A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^{\nu_i}A_\mathfrak{p}$, так что его длина равна $\sum_{i=1}^{n} \nu_i$; тем самым предложение доказано в силу формулы (5) и определения 4 n° 5.

Следствие. *Пусть L_1, L_2 — два свободных A-модуля одного и того же ранга n, и пусть $f\colon L_1 \to L_2$ — некоторый гомоморфизм. Пусть U — матрица гомоморфизма f относительно некоторых базисов модулей L_1 и L_2. Для того чтобы модуль* Coker (f) *был A-модулем кручения, необходимо и достаточно, чтобы* $\det(U) \neq 0$; *тогда*

$$\chi(\mathrm{Coker}\,(f)) = \mathrm{div}\,(\det(U)). \tag{8}$$

Можно рассматривать L_1 и L_2 как решетки в пространствах $V_1 = L_1 \otimes_A K$ и $V_2 = L_2 \otimes_A K$ соответственно, а f продолжить до K-гомоморфизма $f_{(K)}\colon V_1 \to V_2$. Тогда $(\mathrm{Coker}\,(f))_K = (\mathrm{Coker}\,(f)_K)$ и утверждение о том, что Coker (f) является A-модулем кручения, означает, что $\mathrm{Coker}\,(f_{(K)}) = 0$; но это все равно, что сказать, что $f_{(K)}$ сюръективен или что $\det(U) \neq 0$, откуда получается первая часть утверждения. С другой стороны, можно записать $f(L_1) = u(L_2)$, где u — некоторый эндоморфизм модуля L_2 с определителем $\det(U)$. Так как $\mathrm{Coker}\,(f) = L_2/u(L_2)$, то формула (8) вытекает из (7) и (6).

Пример. Если $A = \mathbf{Z}$, то группа дивизоров кольца A отождествляется с мультипликативной группой $\mathbf{Q}_+^*$ положительных рациональных чисел. Для любой конечной коммутативной группы T число $\chi(T)$ равно *порядку* группы T. Предыдущее следствие показывает, что порядок группы Coker (f) равен *абсолютному значению* числа $\det(U)$ (ср. *Алгебра*, гл. VII, § 4, n° 7, следствие 3 теоремы 3).

7. Классы дивизоров, связанные с модулями конечного типа

Мы сохраняем предположения и обозначения n° 2—6. Напомним, что через $C(A)$ (или просто через C) обозначается *группа классов дивизоров* кольца A, равная факторгруппе группы $D(A)$ по подгруппе главных дивизоров. Для любого дивизора $d \in D$ будем обозначать через $c(d)$ его класс в C.

Предложение 15. *Пусть M — некоторый A-модуль конечного типа. Тогда существует такой свободный подмодуль L модуля M,*

что M/L является модулем кручения и элемент $c(\chi(M/L))$ из C не зависит от выбора свободного подмодуля L.

Положим $S = A - \{0\}$, и пусть $V = S^{-1}M = M \otimes_A K$; если n — ранг пространства V над полем K, то существует n элементов e_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ модуля M, канонические образы которых в V образуют базис пространства V. Эти элементы, очевидно, линейно независимы в M и, следовательно, порождают свободный подмодуль L в модуле M, для которого $S^{-1}(M/L) = S^{-1}M/S^{-1}L = 0$, так что M/L — модуль кручения.

Пусть теперь L_1 — второй свободный подмодуль модуля M ранга n. Так как $S^{-1}L = S^{-1}L_1$, то существует такое $s \in S$, что $sL_1 \subset L$; следовательно, можно ограничиться доказательством того факта, что если $L_1 \subset L_2$ — два свободных подмодуля ранга n в модуле M, то $c(\chi(M/L_1)) = c(\chi(M/L_2))$. Но $\chi(M/L_1) = \chi(M/L_2) + \chi(L_2/L_1)$ и из следствия предложения 14 n° 6 вытекает, что $\chi(L_2/L_1)$ является главным дивизором; значит,

$$c(\chi(L_2/L_1)) = 0.$$

Элемент $c(\chi(M/L))$ будет обозначаться в дальнейшем через $c(M)$; мы будем говорить, что $c(M)$ есть *класс дивизоров, связанный с модулем M.*

Предложение 16. (i) *Пусть $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ — точная последовательность A-модулей конечного типа. Тогда*

$$c(M_2) = c(M_1) + c(M_3).$$

(ii) *Если существует псевдоизоморфизм модуля M_1 в модуль M_2, то $c(M_1) = c(M_2)$.*

(iii) *Если T — модуль кручения, то $c(T) = -c(\chi(T))$.*

(iv) *Если $\mathfrak{a} \neq 0$ — дробный идеал поля K, то*

$$c(\mathfrak{a}) = c(\operatorname{div}(\mathfrak{a})).$$

(v) *Если L — свободный A-модуль, то $c(L) = 0$.*

Для доказательства пункта (i) рассмотрим свободный подмодуль L_1 (соответственно L_3) модуля M_1 (соответственно M_3), такой, что M_1/L_1 (соответственно M_3/L_3) является модулем кручения. Так как L_3 свободен и g сюръективно, то в модуле $g^{-1}(L_3)$ существует свободное дополнение L_{23} к подмодулю $\operatorname{Ker}(g)$, изоморфное модулю L_3 (*Algebre*, chap. II, 3^e éd., § 1, n° 11, proposition 21), но модуль $\operatorname{Ker}(g) = f(M_1)$ содержит модуль $f(L_1) = L_{12}$, который является свободным в силу инъективности гомоморфизма f. Сумма $L_2 = L_{12} + L_{23}$ прямая и, следовательно, L_2 является *свободным* подмодулем в M_2. Кроме того, имеет

место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & L_1 & \to & L_2 & \to & L_3 \to 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 & \xrightarrow{g} & M_3 \to 0 \end{array}$$

где строки точны, а вертикальные стрелки означают вложения. Следовательно, из змеевидной диаграммы (гл. I, § 1, n° 4, предложение 2) получается точная последовательность

$$0 \to M_1/L_1 \to M_2/L_2 \to M_3/L_3 \to 0.$$

Поскольку M_1/L_1 и M_3/L_3 являются модулями кручения, эта точная последовательность показывает прежде всего, что и M_2/L_2 есть модуль кручения; далее, в силу предложения 10 n° 5, отсюда же следует, что

$$\chi(M_2/L_2) = \chi(M_1/L_1) + \chi(M_3/L_3);$$

тем самым доказано утверждение (i).

Утверждения (iii) и (v) очевидны по определению. Докажем (ii) [1]). Пусть f: $M_1 \to M_2$ — некоторый псевдоизоморфизм, и пусть L_1 — такой свободный подмодуль в M_1, что M_1/L_1 является модулем кручения. Положим $L_2 = f(L_1)$; поскольку модуль $\mathrm{Ker}(f)$ псевдонулевой, то он является модулем кручения; следовательно, $\mathrm{Ker}(f) \cap L_1 = 0$, и потому модуль L_2 свободен. Пусть $\bar{f}$: $M_1/L_1 \to M_2/L_2$ — гомоморфизм, полученный из f посредством перехода к фактормодулям. Модуль $\mathrm{Ker}(\bar{f})$ изоморфен модулю $\mathrm{Ker}(f)$, а $\mathrm{Coker}(\bar{f})$ — модулю $\mathrm{Coker}(f)$; значит, $\bar{f}$ — псевдоизоморфизм. При этом $\mathrm{Coker}(\bar{f}) = M_2/f(M_1)$ есть модуль кручения и тем же свойством обладает модуль $f(M_1)/L_2 = \bar{f}(M_1/L_1)$. Следовательно, M_2/L_2 — модуль кручения, и из предложения 10 (ii) n° 5 следует, что $\chi(M_1/L_1) = \chi(M_2/L_2)$.

Наконец, остается доказать утверждение (iv). Пусть $x \in K^*$ — такой элемент, что $\mathfrak{a} \subset xA$. Из рассмотрения точной последовательности $0 \to \mathfrak{a} \to xA \to xA/\mathfrak{a} \to 0$ мы получаем, что $c(\mathfrak{a}) = c(xA) - c(xA/\mathfrak{a}) = -c(xA/\mathfrak{a})$ в силу (i) и (v). Но модуль $xA/\mathfrak{a}$ изоморфен модулю $A/x^{-1}\mathfrak{a}$, откуда, в силу (iii), получается, что

$$c(xA/\mathfrak{a}) = -c(\chi(A/x^{-1}\mathfrak{a})) = -c(\mathrm{div}(x^{-1}\mathfrak{a})) = -c(\mathrm{div}(\mathfrak{a}))$$

(n° 5, предложение 12). Доказательство окончено.

Когда M является *решеткой* в пространстве V относительно кольца A, имеет место равенство $\chi(M/L) = -\chi(M, L)$ (n° 6, предложение 14). Пусть $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — базис модуля L, $e = e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$, и пусть $M_W = \mathfrak{a} \cdot e$ (обозначение n° 6); имеет место

[1]) Легко видеть, что утверждение (ii) также непосредственно вытекает из утверждений (i) и (iii) и предложения 10 (iii) n° 5. — *Прим. ред.*

равенство $\chi(M, L) = \operatorname{div}(\mathfrak{a})$, откуда $c(M) = c(\operatorname{div}(\mathfrak{a}))$; это обобщает предложение 16 (v).

Следствие 1. *Пусть* $0 \to M_n \xrightarrow{u} M_{n-1} \to \ldots \to M_0 \to 0$ — *точная последовательность A-модулей конечного типа. Тогда*

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i c(M_i) = 0.$$

Будем рассуждать индукцией по n, учитывая, что случай $n = 2$ получается из предложения 16 (i). Если $M'_{n-1} = \operatorname{Coker}(u)$, то имеют место две точные последовательности

$$0 \to M_n \to M_{n-1} \to M'_{n-1} \to 0,$$

$$0 \to M'_{n-1} \to M_{n-2} \to \ldots \to M_0 \to 0.$$

Первая из них показывает, что M'_{n-1} является модулем конечного типа, а из предположения индукции получаем

$$(-1)^{n-1} c(M'_{n-1}) + \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i c(M_i) = 0$$

и

$$c(M'_{n-1}) = c(M_{n-1}) - c(M_n),$$

откуда вытекает следствие.

Конечной свободной резольвентой A-модуля E называется точная последовательность

$$0 \to L_n \to L_{n-1} \to \ldots \to L_0 \to E \to 0,$$

где $L_i\ (0 \leqslant i \leqslant n)$ — *свободные A-модули конечного типа.*

Следствие 2. *Если дивизориальный дробный идеал* $\mathfrak{a} \neq 0$ *кольца A допускает конечную свободную резольвенту, то он является главным.*

Действительно, применим следствие 1 к конечной свободной резольвенте модуля $\mathfrak{a}$

$$0 \to L_n \to L_{n-1} \to \ldots L_0 \to \mathfrak{a} \to 0.$$

В силу предложения 16 (v), имеет место равенство $c(\mathfrak{a}) = 0$; следовательно, в силу предложения 16 (iv), дивизор $\operatorname{div}(\mathfrak{a})$ является главным. Так как, по предположению, идеал $\mathfrak{a}$ — дивизориальный, то он главный (§ 1, n° 1).

Следствие 3. *Если любой дивизориальный идеал* $\neq 0$ *кольца A допускает конечную свободную резольвенту, то кольцо A факториально.*

Это непосредственно вытекает из следствия 2 и определения 1 § 3, n° 1.

Мы увидим позже, что *регулярное* локальное кольцо удовлетворяет условиям следствия 3, а потому является *факториальным кольцом.*

Если M — некоторый A-модуль конечного типа, то через $r(M)$ мы будем обозначать его *ранг* (напомним, что это есть ранг над K пространства $M_{(K)} = M \otimes_A K$); если $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ — точная последовательность A-модулей конечного типа, то последовательность $0 \to (M_1)_{(K)} \to (M_2)_{(K)} \to (M_3)_{(K)} \to 0$ тоже точна, так что $r(M_2) = r(M_1) + r(M_3)$. Положим

$$\gamma(M) = (r(M),\ c(M)) \in \mathbf{Z} \times C(A);$$

элемент γ удовлетворяет, следовательно, условию (i) предложения 16, и если M — псевдонулевой модуль, то $\gamma(M) = 0$ (так как M — модуль кручения). Существует единственное отображение из $\boldsymbol{F}(A)$ в $\mathbf{Z} \times C(A)$, снова обозначаемое через γ, при котором $\gamma(M) = \gamma(\mathrm{cl}(M))$ для любого A-модуля M конечного типа. Мы сейчас увидим, что сформулированные выше свойства по существу *характеризуют* отображение γ.

Предложение 17. *Пусть G — коммутативная группа, записываемая аддитивно, и φ — некоторое отображение множества $\boldsymbol{F}(A)$ классов A-модулей конечного типа в группу G; для всякого A-модуля M конечного типа положим, допуская некоторую непоследовательность в обозначениях, $\varphi(M) = \varphi(\mathrm{cl}(M))$. Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) *если $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ — точная последовательность A-модулей конечного типа, то $\varphi(M_2) = \varphi(M_1) + \varphi(M_3)$;*

2) *если T — псевдонулевой модуль, то $\varphi(T) = 0$.*

Тогда существует, и притом единственный, гомоморфизм $\theta\colon \mathbf{Z} \times C \to G$, такой, что $\varphi = \theta \circ \gamma$.

В силу предложения 16 (iv), любой элемент из $\mathbf{Z} \times C$ имеет вид $(r(M), c(M))$ при подходящим образом выбранном A-модуле конечного типа M; отсюда следует единственность гомоморфизма θ. Применим предложение 11 n° 5 к ограничению гомоморфизма $-\varphi$ на $T(A)$; следовательно, существует гомоморфизм $\theta_0\colon D \to G$, при котором $-\varphi(T) = \theta_0(\chi(T))$ для любого A-модуля кручения T конечного типа. Пусть x — ненулевой элемент из A; применяя свойство (i) к точной последовательности

$$0 \to A \xrightarrow{h_x} A \to A/xA \to 0,$$

где h_x — умножение на x, мы получаем, что $\varphi(A/xA) = 0$, откуда вытекает равенство $\theta_0(\mathrm{div}(x)) = 0$. При переходе к факторгруппе отображение θ_0 определяет, следовательно, гомоморфизм $\theta_1\colon C \to G$ и $\varphi(T) = \theta_1(c(T))$ для любого A-модуля кручения T.

Покажем, что тогда гомоморфизм θ, определенный равенством $\theta(n, z) = n\varphi(A) + \theta_1(z)$, является искомым. Для этого положим $\varphi'(M) = \varphi(M) - \theta(\gamma(M))$ для всякого A-модуля M конечного типа; ясно, что условие 1) выполняется, когда φ заменено в нем на φ'. Кроме того, $\varphi'(M) = 0$, когда M — модуль кручения или свободный модуль. Но поскольку для любого A-модуля M конечного типа существует такой свободный подмодуль L в M, что M/L — модуль кручения (предложение 15), свойство 1) показывает, что $\varphi'(M) = 0$ для любого A-модуля M конечного типа.

На языке абелевых категорий предложение 17 показывает, что группа $\mathbf{Z} \times C(A)$ канонически изоморфна *группе Гротендика* факторкатегории $\mathscr{F}/\mathscr{F}'$, где $\mathscr{F}$ — категория A-модулей конечного типа, а $\mathscr{F}'$ — плотная подкатегория в $\mathscr{F}$, образованная псевдонулевыми модулями.

8. *Свойства по отношению к конечным расширениям кольца скаляров*

В этом пункте через A и B обозначаются *два таких целозамкнутых нётеровых кольца, что* $A \subset B$ *и при этом* B *является* A*-модулем конечного типа.* Через K и L обозначаются поля частных колец A и B соответственно. Мы будем писать div_A, χ_A, c_A, r_A вместо div, χ, c, γ, r соответственно, когда речь будет идти об A-модулях, и применять аналогичные обозначения для B-модулей.

Известно (§ 1, n° 10), что простой идеал $\mathfrak{P}$ кольца B имеет высоту 1 тогда и только тогда, когда $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$ есть идеал высоты 1. Кроме того (loc. cit., предложение 14), для $\mathfrak{p} \in P(A)$ существует лишь конечное число простых идеалов $\mathfrak{P} \in P(B)$, лежащих над $\mathfrak{P}$. Для краткости мы будем обозначать через $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$ отношение „идеал $\mathfrak{P}$ лежит над идеалом $\mathfrak{p}$“ (т. е. $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$). В этой ситуации мы будем обозначать через $e_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}}$ или через $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ индекс ветвления $e(v_{\mathfrak{P}}/v_{\mathfrak{p}})$ нормирования $v_{\mathfrak{P}}$ относительно нормирования $v_{\mathfrak{p}}$ (гл. VI, § 8, n° 1) и через $f_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}}$ или через $f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ степень вычетов $f(v_{\mathfrak{P}}/v_{\mathfrak{p}})$ (loc. cit.); напомним, что дискретные нормирования $v_{\mathfrak{p}}$ и $v_{\mathfrak{P}}$ *нормированы* и что $f_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}}$ является степенью поля частных кольца $B/\mathfrak{P}$ над полем частных кольца $A/\mathfrak{p}$. Положим $n = r_A(B)$, где B рассматривается как A-модуль. Следовательно, по определению $n = [L : K]$ и для всякого $\mathfrak{p} \in P(A)$ число n равно также и рангу свободного $A_{\mathfrak{P}}$-модуля $B_{\mathfrak{P}}$ для всякого $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$. Поэтому из теоремы 2 гл. VI, § 8, n° 5, вытекает, что для всякого $\mathfrak{p} \in P(A)$ имеет место равенство

$$\sum_{\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}} e_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}} = n. \tag{9}$$

Учитывая, что $D(A)$ и $D(B)$ являются свободными $\mathbf{Z}$-модулями, можно определить возрастающий гомоморфизм упорядоченных групп N: $D(B) \to D(A)$ (обозначаемый также через $N_{B/A}$) с помощью формулы

$$N(\mathfrak{P}) = f_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{p} \quad \text{для} \quad \mathfrak{P} \in P(B), \quad \text{где} \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A. \tag{10}$$

С другой стороны, был определен (§ 1, n° 10, предложение 14) возрастающий гомоморфизм упорядоченных групп i: $D(A) \to D(B)$ (обозначаемый также через $i_{B/A}$) с помощью формулы

$$i(\mathfrak{p}) = \sum_{\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}} e_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}} \mathfrak{P} \quad \text{для} \quad \mathfrak{p} \in P(A). \tag{11}$$

Ясно, что для любого семейства (d_ι) (соответственно (d'_ι)) дивизоров кольца A (соответственно кольца B) имеют место соотношения

$$N(\sup(d'_\iota)) = \sup(N(d'_\iota)), \quad N(\inf(d'_\iota)) = \inf(N(d'_\iota)), \tag{12}$$

$$i(\sup(d_\iota)) = \sup(i(d_\iota)), \quad i(\inf(d_\iota)) = \inf(i(d_\iota)). \tag{13}$$

Формула (9) показывает, что

$$N \circ i = n \cdot 1_{D(A)}. \tag{14}$$

Для любого $a \in A$ имеет место равенство (§ 1, n° 10, предложение 14)

$$i(\mathrm{div}_A(a)) = \mathrm{div}_B(a). \tag{15}$$

Отсюда следует (с помощью соотношения (13)), что для любого дробного идеала $\mathfrak{a}$ кольца A имеет место равенство

$$i(\mathrm{div}_A(\mathfrak{a})) = \mathrm{div}_B(\mathfrak{a}B). \tag{16}$$

Известно (гл. V, § 1, n° 3, следствие предложения 11), что для любого элемента $b \in B$ имеет место включение $N_{L/K}(b) \in A$; кроме того (гл. VI, § 8, n° 5, формула (9)), справедливо равенство

$$v_{\mathfrak{p}}(N_{L/K}(b)) = \sum_{\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}} f_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}} v_{\mathfrak{P}}(b), \tag{17}$$

откуда

$$N(\mathrm{div}_B(b)) = \mathrm{div}_A(N_{L/K}(b)). \tag{18}$$

Формулы (15) и (18) показывают, что при переходе к факторгруппам гомоморфизмы N и i определяют гомоморфизмы, которые мы, допуская некоторую неаккуратность, будем снова обозначать теми же буквами:

$$N : C(B) \to C(A) \quad \text{и} \quad i : C(A) \to C(B).$$

Следует заметить, что гомоморфизм i: $C(A) \to C(B)$ в общем случае не инъективен (§ 3, упражнение 7).

Напомним, что для любого B-модуля R через $R_{[A]}$ обозначается A-модуль, полученный из R посредством ограничения скаляров на кольцо A (*Algèbre*, chap. II, 3^e éd., § 1, n° 13).

Предложение 18. (i) *Для того чтобы модуль R был псевдонулевым, необходимо и достаточно, чтобы псевдонулевым был A-модуль $R_{[A]}$.*

(ii) *Для того чтобы R был B-модулем кручения конечного типа, необходимо и достаточно, чтобы $R_{[A]}$ был A-модулем кручения конечного типа, и в этом случае*

$$\chi_A(R_{[A]}) = N(\chi_B(R)). \tag{19}$$

(iii) *Для того чтобы R был B-модулем конечного типа, необходимо и достаточно, чтобы $R_{[A]}$ был A-модулем конечного типа, и в этом случае*

$$c_A(R_{[A]}) = N(c_B(R)) + r_B(R)\, c_A(B), \tag{20}$$

$$r_A(R_{[A]}) = n \cdot r_B(R) \quad (\textit{напомним, что } n = r_A(B)). \tag{21}$$

Поскольку B является A-модулем конечного типа, для того чтобы R был B-модулем конечного типа, необходимо и достаточно, чтобы $R_{[A]}$ был A-модулем конечного типа. Кроме того, если $\mathfrak{b}$ — аннулятор модуля R, то $\mathfrak{b} \cap A = \mathfrak{a}$ является аннулятором модуля $R_{[A]}$; поскольку кольцо B целое над A, в нем не существует идеала, отличного от 0, лежащего над идеалом 0 кольца A (гл. V, § 2, n° 1, следствие 1 предложения 1); следовательно, неравенства $\mathfrak{a} \neq 0$ и $\mathfrak{b} \neq 0$ эквивалентны.

(i) В силу последнего замечания можно ограничиться случаем, когда R является B-модулем кручения. Если $\mathfrak{b}$ содержится в некотором простом идеале $\mathfrak{P} \in P(B)$, то $\mathfrak{a}$ содержится в идеале $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$, высота которого равна 1. Обратно, если $\mathfrak{a}$ содержится в некотором простом идеале $\mathfrak{p} \in P(A)$, то существует простой идеал $\mathfrak{P}$ кольца B, который содержит $\mathfrak{b}$ и лежит над $\mathfrak{p}$ (гл. V, § 2, n° 1, следствие 2 теоремы 1). Утверждение (i) вытекает из этих замечаний и определения 2 n° 4.

(ii) Для любого B-модуля конечного типа R, являющегося модулем кручения, положим $\varphi(R) = \chi_A(R_{[A]})$; ясно, что (для B-модулей кручения конечного типа) отображение φ удовлетворяет условиям 1) и 2) предложения 11 n° 5 (на основании (i)). Следовательно, существует такой гомоморфизм θ: $D(B) \to D(A)$, что $\varphi(R) = \theta(\chi_B(R))$ для любого B-модуля кручения R конечного типа. Гомоморфизм θ определяется своими значениями на элементах вида $\chi_B(B/\mathfrak{P})$, где $\mathfrak{P} \in P(B)$, так как $\chi_B(B/\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$. Но для любого простого идеала $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$ из $P(A)$ имеет место соотношение $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{q}$: следовательно, $(B/\mathfrak{P})_{\mathfrak{q}} = 0$. С другой стороны, если положить $S = A - \mathfrak{p}$, то идеал $\mathfrak{P} \cdot S^{-1}B$ будет

максимальным идеалом кольца $S^{-1}B$ (так как он лежит над максимальным идеалом $\mathfrak{p}S^{-1}A$ кольца $S^{-1}A$ и кольцо $S^{-1}B$ целое над $S^{-1}A$); следовательно, $(B/\mathfrak{P})_{\mathfrak{p}} = S^{-1}B/\mathfrak{P}S^{-1}B$ есть поле, изоморфное полю частных кольца $B/\mathfrak{P}$, т. е. полю вычетов нормирования $v_{\mathfrak{P}}$; его длина как $A_{\mathfrak{p}}$-модуля равна, следовательно, $f_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}}$; этим доказано, что $\theta = N$ (n° 5, определение 4).

(iii) Если T — подмодуль кручения в R, то $T_{[A]}$ является подмодулем кручения в $R_{[A]}$ и $(R/T)_{[A]} = R_{[A]}/T_{[A]}$; для доказательства соотношения (21) можно, следовательно, ограничиться случаем, когда модуль R без кручения. Тогда R отождествляется с B-подмодулем в $R_{(L)}$ и содержит некоторый базис $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ пространства $R_{(L)}$ над L. Если $(b_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ — базис поля L над K, образованный элементами из B, то $b_j e_i$ составляют базис пространства $R_{(L)}$ над K, образованный элементами из B, откуда и следует (21). Пусть, с другой стороны, M — такой свободный B-подмодуль модуля R, что R/M является B-модулем кручения; поскольку $M_{[A]}$ является прямой суммой $r_B(R)$ экземпляров A-модулей, изоморфных B, то (предложение 16 (i)) $c_A(M_{[A]}) = r_B(R)\, c_A(B)$. Кроме того, $c_A((R/M)_{[A]}) = -c_A(N(\chi_B(R/M)))$ в силу формулы (19). Но, по определению гомоморфизма N: $C(B) \to C(A)$, имеет место равенство $c_A(N(d)) = N(c_B(d))$ для всякого $d \in D(B)$ и, поскольку $c_B(\chi(R/M)) = -c_B(R)$ по определению, мы, наконец, получаем, что $c_A((R/M)_{[A]}) = N(c_B(R))$. Теперь достаточно применить предложение 16 (i), чтобы получить (20).

Предложение 19. *Пусть R — некоторый B-модуль конечного типа. Для того чтобы он был рефлексивен, необходимо и достаточно, чтобы $R_{[A]}$ был рефлексивным A-модулем.*

Уже было замечено в процессе доказательства предложения 18, что, для того чтобы R был B-модулем без кручения, необходимо и достаточно, чтобы $R_{[A]}$ был A-модулем без кручения. Следовательно, можно предполагать, что R является решеткой в пространстве $W = R \otimes_B L$ относительно кольца B. Воспользуемся следующей леммой:

Лемма 4. *Пусть W — векторное пространство конечного ранга над полем L, и пусть R — решетка в W относительно кольца B. Для любого идеала $\mathfrak{p}$ имеет место соотношение* $(R_{[A]})_{\mathfrak{p}} = \bigcap_{\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}} R_{\mathfrak{P}}$.

Действительно, если $S = A - \mathfrak{p}$, то простые идеалы кольца $S^{-1}B$ порождаются простыми идеалами кольца B, не пересекающими S, т. е. идеалами $\mathfrak{P}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, лежащими над $\mathfrak{p}$,

и идеалом (0); это показывает, что $S^{-1}B$ является полулокальным кольцом, максимальными идеалами которого служат $m_i = \mathfrak{P}_i(S^{-1}B)$ для $1 \leqslant i \leqslant m$; кроме того, локальное кольцо $(S^{-1}B)_{m_i}$ изоморфно кольцу $B_{\mathfrak{P}_i}$ (гл. II, § 2, n° 5, предложение 11); следовательно, оно является кольцом дискретного нормирования. Кольцо $S^{-1}B$ является поэтому дедекиндовым (§ 2, n° 2, теорема 1e) и, так как оно полулокально, кольцом главных идеалов (§ 2, n° 2, предложение 1). Но модуль $(R_{[A]})_{\mathfrak{p}}$ равен модулю $S^{-1}R$, рассматриваемому как $A_{\mathfrak{p}}$-модуль; в силу сказанного выше, $S^{-1}R$ является *свободной* решеткой в W относительно кольца $S^{-1}B$, и потому можно применить теорему 2 n° 2 и получить, что $S^{-1}R = \bigcap_i (S^{-1}R)_{m_i}$; но $(S^{-1}R)_{m_i} = R_{\mathfrak{P}_i}$; это и доказывает лемму.

Вернемся к доказательству предложения 19. В силу леммы 4 $\bigcap_{\mathfrak{P} \in P(B)} R_{\mathfrak{P}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P(A)} (R_{[A]})_{\mathfrak{p}}$, и окончательный результат вытекает из теоремы 2 n° 2.

Следствие. *Кольцо B является рефлексивным A-модулем.*

Предложение 2. (i) *Для того чтобы A-модуль конечного типа M был псевдонулевым, необходимо и достаточно, чтобы $M \otimes_A B$ был псевдонулевым B-модулем.*

(ii) *Если M — некоторый A-модуль кручения конечного типа, то $M \otimes_A B$ является B-модулем кручения конечного типа и имеет место равенство*

$$\chi_B(M \otimes_A B) = i(\chi_A(M)). \tag{22}$$

(iii) *Если M — некоторый A-модуль конечного типа, то $M \otimes_A B$ является B-модулем конечного типа и*

$$e_B(M \otimes_A B) = i(e_A(M)), \tag{23}$$

$$r_B(M \otimes_A B) = r_A(M). \tag{24}$$

(i) Пусть $\mathfrak{P}$ — простой идеал кольца B и $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$. Тогда $(M \otimes_A B)_{\mathfrak{P}} = M \otimes_A B_{\mathfrak{P}}$ (гл. II, § 2, n° 7, предложение 18), и, с другой стороны, $M \otimes_A B_{\mathfrak{P}} = (M \otimes_A A_{\mathfrak{p}}) \otimes A_{\mathfrak{p}} B_{\mathfrak{P}} = M_{\mathfrak{p}} \otimes A_{\mathfrak{p}} B_{\mathfrak{P}}$. Соотношение $M_{\mathfrak{p}} = 0$ эквивалентно, следовательно, равенству $(M \otimes_A B)_{\mathfrak{P}} = 0$ (гл. II, § 4, n° 4, лемма 4). Принимая во внимание определение 2 n° 4, для доказательства (i) достаточно применить это замечание к идеалу $\mathfrak{P} = (0)$ и идеалам $\mathfrak{P} \in P(B)$.

Для доказательства (ii) мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма 5. *Пусть M_1, M_2 — два A-модуля конечного типа и f: $M_1 \to M_2$ — некоторый инъективный гомоморфизм. Тогда ядро*

гомоморфизма $f \otimes 1_B : M_1 \otimes_A B \to M_2 \otimes_A B$ *является псевдонулевым модулем.*

Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца A высоты $\leqslant 1$. Имеем $(M_i \otimes_A B)_{\mathfrak{p}} = (M_i)_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{p}}$ $(i = 1, 2)$ (гл. II, § 2, n° 7, предложение 18) и $(f \otimes 1_B)_{\mathfrak{p}} = f_{\mathfrak{p}} \otimes 1_{B_{\mathfrak{p}}}$. Предположение об инъективности гомоморфизма f влечет за собой инъективность и гомоморфизма $f_{\mathfrak{p}}$ (гл. II, § 2, n° 4, теорема 1). С другой стороны, в силу выбора идеала $\mathfrak{p}$, кольцо $A_{\mathfrak{p}}$ является кольцом главных идеалов и $B_{\mathfrak{p}}$ является $A_{\mathfrak{p}}$-модулем без кручения конечного типа, следовательно, *свободным* модулем. Отсюда мы заключаем, что $f_{\mathfrak{p}} \otimes 1_{B_{\mathfrak{p}}}$ является инъективным гомоморфизмом. Если $I = \operatorname{Ker}(f \otimes 1)$, то $I_{\mathfrak{p}} = \operatorname{Ker}((f \otimes 1)_{\mathfrak{p}})$ (гл. II, § 2, n° 4, теорема 1). Следовательно, $I_{\mathfrak{p}} = 0$, откуда вытекает, что a fortiori $I_{\mathfrak{P}} = (I_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{P}} = 0$ для $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$, что и завершает доказательство леммы (n° 4, определение 2).

Вернемся к доказательству утверждения (ii). Для любого A-модуля кручения конечного типа M положим $\varphi(M) = \chi_B(M \otimes_A B)$; из (i) следует, что если M — псевдонулевой модуль, $\varphi(M) = 0$. С другой стороны, рассмотрим точную последовательность A-модулей кручения конечного типа

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0.$$

Из леммы 5 вытекает, что имеет место точная последовательность B-модулей

$$0 \to I \to M_1 \otimes_A B \to M_2 \otimes_A B \to M_3 \otimes_A B \to 0,$$

где модуль I псевдонулевой. Используя следствие предложения 10 n° 5, мы получаем, следовательно, что $\varphi(M_2) = \varphi(M_1) + \varphi(M_3)$. Из предложения 11 вытекает поэтому, что существует такой гомоморфизм θ: $D(A) \to D(B)$, что $\varphi(M) = \theta(\chi_A(M))$ для любого A-модуля кручения конечного типа M. Чтобы доказать равенство $\theta = i$, достаточно показать, что $\varphi(A/\mathfrak{p}) = i(\mathfrak{p})$ для каждого $\mathfrak{p} \in P(A)$; но $(A/\mathfrak{p}) \otimes_A B = B/\mathfrak{p}B$ и для любого $\mathfrak{P} \in P(B)$ имеет место равенство $(B/\mathfrak{p}B)_{\mathfrak{P}} = B_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{P}}$; последний модуль равен 0, если $\mathfrak{P}$ не лежит над $\mathfrak{p}$; если же, напротив, $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$, то $B_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{P}}$ является $B_{\mathfrak{P}}$-модулем длины $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ в силу определения индекса ветвления (гл. VI, § 8, n° 1). Следовательно, $\chi_B(B/\mathfrak{p}B) = \sum_{\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}} e_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{P} = i(\mathfrak{p})$, чем и завершается доказательство утверждения (ii).

Формула (24) получается немедленно, так как

$$(M \otimes_A B) \otimes_B L = M \otimes_A L = (M \otimes_A K) \otimes_K L$$

и ранг пространства $(M \otimes_A K) \otimes_K L$ над L равен рангу пространства $M \otimes_A K$ над K. Для доказательства формулы (23) рас-

смотрим свободный подмодуль H модуля M, такой, что $Q = M/H$ является A-модулем кручения. Применяя, как и выше, лемму 5, мы получаем точную последовательность B-модулей

$$0 \to I \to H \otimes_A B \to M \otimes_A B \to Q \otimes_A B \to 0,$$

где модуль I псевдонулевой. Следовательно, из предложения 16 (ii) и (v) в n° 7, а также из следствия 1 предложения 16 вытекает, что

$$c_B(M \otimes_A B) = c_B(Q \otimes_A B) = -c_B(\chi_B(Q \otimes_A B)) = -c_B(i(\chi_B(Q)))$$

в силу утверждения (ii); но, по определению гомоморфизма i: $C(A) \to C(B)$, имеют место равенства

$$c_B(i(\chi_A(Q))) = i(c_A(\chi_A(Q))) = -i(c_A(M)),$$

что и завершает доказательство формулы (23).

Замечания. 1) Если M — рефлексивный A-модуль, то $M \otimes_A B$ не обязан быть рефлексивным (упражнение 6). Однако он будет рефлексивным, когда B является *плоским* A-модулем (n° 2, предложение 8).

2) Пусть C — третье целозамкнутое нётерово кольцо, такое, что $B \subset C$ и C является B-модулем конечного типа (и поэтому A-модулем конечного типа). Тогда имеют место формулы транзитивности

$$N_{C/A} = N_{B/A} \circ N_{C/B}, \tag{25}$$

$$i_{C/A} = i_{C/B} \circ i_{B/A}, \tag{26}$$

которые вытекают немедленно из формул транзитивности для индекса ветвления и степени вычетов (гл. VI, § 8, n° 1, лемма 1).

9. *Теорема редукции*

Мы сохраняем обозначения и предположения n° 2—7.

Лемма 6. *Пусть R — коммутативное кольцо, $\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — различные простые идеалы из R.*

(i) *Для $1 \leqslant i \leqslant n$ пусть H_i обозначает подмножество $R/\mathfrak{p}_i$, удовлетворяющее следующему условию: не существует такого элемента $\alpha_i \in R/\mathfrak{p}_i$, что $\alpha_i + H_i$ содержит какой-нибудь ненулевой идеал из $R/\mathfrak{p}_i$. Тогда существует такой элемент $a \in R$, что для $1 \leqslant i \leqslant n$ канонический образ элемента a в кольце $R/\mathfrak{p}_i$ не принадлежит H_i.*

(ii) *Если* $\mathrm{Card}(H_i) < \mathrm{Card}(R/\mathfrak{p}_i)$, *то H_i удовлетворяет условию пункта* (i).

(i) Будем рассуждать индукцией по n, учитывая, что случай $n=0$ тривиален. Пусть, следовательно, $n\geqslant 1$. Совершив при необходимости перестановку индексов i, мы можем считать, что идеал $\mathfrak{p}_1$ минимален среди $\mathfrak{p}_i$ и, следовательно, для $2\leqslant i\leqslant n$ существует такой элемент $c_i\in\mathfrak{p}_i$, что $c_i\notin\mathfrak{p}_1$. В силу предположения индукции, существует такой элемент $b\in R$, что канонический образ элемента b в кольце $R/\mathfrak{p}_i$ не принадлежит H_i для $2\leqslant i\leqslant n$. Для всякого $x\in R$ положим $a_x=b+xc_2c_3\ldots c_n$; поскольку $c_i\in\mathfrak{p}_i$, очевидно, что $a_x\equiv b\pmod{\mathfrak{p}_i}$ для $2\leqslant i\leqslant n$. Следовательно, достаточно доказать, что существует такой элемент $x\in R$, что канонический образ элемента a_x в $R/\mathfrak{p}_1$ не принадлежит H_1. Но множество канонических образов элементов a_x в кольце $R/\mathfrak{p}_1$, когда x пробегает кольцо R, есть не что иное, как $\beta+\mathfrak{c}$, где β — канонический образ элемента b и $\mathfrak{c}$ — идеал кольца $R/\mathfrak{p}_1$, порожденный каноническим образом элемента $c_2\,c_3\ldots c_n$; в силу выбора элементов c_i, мы получаем, что $\mathfrak{c}\neq 0$, так как кольцо $R/\mathfrak{p}_1$ целостное и предположение о множестве H_1 влечет за собой существование искомого элемента x.

(ii) Поскольку кольцо $R/\mathfrak{p}_i$ целостное, любой ненулевой идеал в $R/\mathfrak{p}_i$ имеет такую же мощность, как и само кольцо $R/\mathfrak{p}_i$, и то же самое справедливо для любого сдвига идеала на элемент кольца $R/\mathfrak{p}_i$, откуда и следует утверждение.

Теорема 6. *Пусть M — некоторый A-модуль без кручения конечного типа. Тогда существует такой свободный подмодуль L в M, что модуль M/L изоморфен некоторому идеалу кольца A.*

Мы обозначим через *n ранг* модуля M (т. е. ранг пространства $V=M\otimes_A K$ над полем K), и будем рассматривать M как решетку в пространстве V относительно кольца A. Тогда для любого идеала $\mathfrak{p}\in P(A)$ модуль $M_{\mathfrak{p}}$ представляет собой решетку в пространстве V относительно кольца $A_{\mathfrak{p}}$ (n° 1, пример 6) и, поскольку $A_{\mathfrak{p}}$ является кольцом главных идеалов, $M_{\mathfrak{p}}$ есть *свободный* $A_{\mathfrak{p}}$-модуль ранга n. Положим

$$M(\mathfrak{p})=M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}}.$$

Обозначим через $k(\mathfrak{p})$ поле частных кольца $A/\mathfrak{p}$ (изоморфное полю вычетов кольца $A_{\mathfrak{p}}$); следовательно, $M(\mathfrak{p})=M\otimes_A k(\mathfrak{p})$ является векторным пространством ранга n над полем $k(\mathfrak{p})$. Для любого $x\in M$ обозначим через $x(\mathfrak{p})$ канонический образ элемента x в $M(\mathfrak{p})$.

Лемма 7. *Пусть x_i $(1\leqslant i\leqslant m)$ — линейно независимые элементы из M (над A или над K, что одно и то же), и пусть L есть A-подмодуль в M, порожденный элементами x_i. Тогда для*

почти всех $\mathfrak{p} \in P$ *элементы* $x_i(\mathfrak{p}) \in M(\mathfrak{p})$ *линейно независимы над полем* $k(\mathfrak{p})$; *для того чтобы эти элементы были линейно независимы над* $k(\mathfrak{p})$ *при всяком* $\mathfrak{p} \in P$, *необходимо и достаточно, чтобы модуль* M/L *был без кручения.*

Пусть $x_{m+1}, \ldots, x_n$ — элементы модуля M, которые вместе с набором $x_1, \ldots, x_m$ образуют базис пространства V, и пусть N — свободный A-подмодуль в M, порожденный элементами x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Из теоремы 3 n° 3 следует, что $N_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}$ для почти всех $\mathfrak{p} \in P$; поскольку $x_1(\mathfrak{p}), \ldots, x_n(\mathfrak{p})$ образуют базис пространства $N(\mathfrak{p})$ над полем $k(\mathfrak{p})$, из сказанного вытекает первое утверждение.

Если M/L — модуль без кручения, то таков же и $(M/L)_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}/L_{\mathfrak{p}}$ для любого $\mathfrak{p} \in P$ (n° 1, пример 6); так как $A_{\mathfrak{p}}$ — кольцо главных идеалов, то модуль $M_{\mathfrak{p}}/L_{\mathfrak{p}}$ свободен. Следовательно, $M_{\mathfrak{p}}$ представляет собой прямую сумму $L_{\mathfrak{p}}$ и некоторого свободного $A_{\mathfrak{p}}$-модуля E; поэтому $M(\mathfrak{p})$ является прямой суммой $L(\mathfrak{p})$ и векторного $k(\mathfrak{p})$-пространства $E/\mathfrak{p}E$ и, в частности, $L(\mathfrak{p})$ вложено в $M(p)$, но пространство $L(\mathfrak{p})$ имеет ранг m, и, так как оно порождено элементами $x_i(\mathfrak{p})$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, эти последние линейно независимы.

Обратно, предположим, что $x_i(\mathfrak{p})$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ линейно независимы над полем $k(\mathfrak{p})$ при любом $\mathfrak{p} \in P$. Тогда $L_{\mathfrak{p}}$ является прямым слагаемым модуля $M_{\mathfrak{p}}$ при любом $\mathfrak{p}$ (гл. II, § 3, n° 2, следствие 1 предложения 5), и потому $M_{\mathfrak{p}}/L_{\mathfrak{p}} = (M/L)_{\mathfrak{p}}$ является модулем без кручения для каждого $\mathfrak{p} \in P$. Отсюда мы заключаем, что $P \cap \mathrm{Ass}(M/L) = \varnothing$, в силу следствия предложения 5, гл. IV, § 1, n° 2. Но так как модуль L рефлексивен, из предложения 7 (i) n° 2 следует, что единственным простым идеалом, который может принадлежать множеству $\mathrm{Ass}(M/L)$, является идеал (0); следовательно, M/L — модуль без кручения.

Лемма 8. *Предположим, что ранг* n *модуля* M *не меньше* 2; *тогда существует такой элемент* $x \neq 0$ *модуля* M, *что* M/Ax *есть модуль без кручения.*

Пусть $\mathfrak{p} \neq 0$ — произвольный элемент из M. В силу леммы 7, множество Y простых идеалов $\mathfrak{p} \in P$, для которых $y(\mathfrak{p}) = 0$, конечно. Если $Y = \varnothing$, то из леммы 7, примененной к последовательности (x_i), образованной одним элементом y, следует, что M/Ay является модулем без кручения. Предположим, таким образом, что $Y \neq \varnothing$, и положим $S = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Y} (A - \mathfrak{p})$; известно (n° 4, лемма 2), что $S^{-1}A$ является полулокальным кольцом главных идеалов, максимальными идеалами которого служат идеалы $\mathfrak{p}S^{-1}A$, где $\mathfrak{p} \in Y$, а соответствующие локализации равны $A_{\mathfrak{p}}$.

Следовательно,

$$S^{-1}A/\mathfrak{p}S^{-1}A = k(\mathfrak{p}),$$

откуда

$$S^{-1}M/\mathfrak{p}S^{-1}M = (M/\mathfrak{p}M)\otimes_A S^{-1}A = \\ = M\otimes_A((A/\mathfrak{p})\otimes_A S^{-1}A) = M\otimes_A \cdot k(\mathfrak{p}) = M(\mathfrak{p}).$$

для любого $\mathfrak{p}\in Y$. В силу предложения 6 гл. II, § 1, n° 2, существует элемент $z/s\in S^{-1}M$ ($z\in M$, $s\in S$), канонические образы которого в $M(\mathfrak{p})$ для $\mathfrak{p}\in Y$ все отличны от нуля. По определению множества S справедливо, таким образом, соотношение $z(\mathfrak{p})\neq 0$ при любом $\mathfrak{p}\in Y$. Кроме того, можно предполагать, что $\mathfrak{p}$ и z *линейно независимы* над полем K. Действительно, в противном случае рассмотрим элемент $t\in M$, который линейно независим от $\mathfrak{p}$ (он существует, так как $n\geqslant 2$); возьмем, с другой стороны, элемент $a\neq 0$ из $\bigcap_{\mathfrak{p}\in Y}\mathfrak{p}$ (это пересечение не сводится к нулю, так как кольцо A целостное) и положим $z'=z+at$; ясно, что y и z' линейно независимы над полем K и что $z'(\mathfrak{p})=z(\mathfrak{p})\neq 0$ для любого $\mathfrak{p}\in Y$.

Предполагая, таким образом, что y и z линейно независимы над K, обозначим через Z множество тех простых идеалов $\mathfrak{p}\in P-Y$, для которых $y(\mathfrak{p})$ и $z(\mathfrak{p})$ линейно зависимы над полем $k(\mathfrak{p})$; из леммы 7 вытекает, что это множество *конечно*. Для любого $\mathfrak{p}\in Z$ можно, следовательно, записать $z(\mathfrak{p})=\lambda(\mathfrak{p})\,y(\mathfrak{p})$ при $\lambda(\mathfrak{p})\in k(\mathfrak{p})$. Но $\operatorname{Card}(A/\mathfrak{p})\geqslant 2$ для всякого $\mathfrak{p}\in P$, поэтому из леммы 6 следует, что существует такой элемент $b\in A$, что для всякого $\mathfrak{p}\in Z$ канонический образ элемента b в $A/\mathfrak{p}$ отличен от $\lambda(\mathfrak{p})$. Покажем, что тогда элемент $x=z-by$ является искомым. Достаточно (в силу леммы 7 для случая $m=1$) проверить, что $x(\mathfrak{p})\neq 0$ для *каждого* $\mathfrak{p}\in P$. Но

если $\mathfrak{p}\in Y$, то $x(\mathfrak{p})\neq 0$ по построению;

если $\mathfrak{p}\in \mathbf{Z}$, то $x(\mathfrak{p})=\mu_{\mathfrak{p}}y(\mathfrak{p})$, где $\mu_{\mathfrak{p}}\neq 0$ в силу выбора элемента b; следовательно, $x(\mathfrak{p})\neq 0$, так как $y(\mathfrak{p})\neq 0$;

если $\mathfrak{p}\in P-(Y\cup Z)$, то $y(\mathfrak{p})$ и $z(\mathfrak{p})$ линейно независимы, а потому $x(\mathfrak{p})\neq 0$.

Доказав эти леммы, обратимся к доказательству теоремы 6. Будем рассуждать индукцией по n, учитывая, что случай $n\leqslant 1$ тривиален, так как тогда модуль M сам изоморфен некоторому идеалу в A. Предположим, следовательно, что $n\geqslant 2$; в силу леммы 8, существует такой свободный подмодуль L_0 ранга 1 в M, что модуль M/L_0 без кручения; следовательно, ранг модуля M/L_0 равен $n-1$. В силу предположения индукции, существует такой свободный подмодуль L_1 в M/L_0, что модуль $(M/L_0)/L_1$ изоморфен некоторому идеалу A. Пусть L — прообраз

модуля L_1 в модуле M; модуль L/L_0 изоморфен L_1 и, так как L_1 свободен, L изоморфен прямой сумме $L_0 \oplus L_1$ (*Algébre*, chap. II, 3^{e}éd., § 1, n° 11, proposition 21), следовательно, поскольку M/L изоморфен $(M/L_0)/L_1$, теорема доказана.

Замечание. Если модуль M рефлексивен, то модуль M/L рефлексивным быть не обязан (упражнение 9).

10. Модули над дедекиндовыми кольцами

Предположим теперь, что A — *дедекиндово кольцо*; уже известно, что идеалы из $\mathfrak{p} \in P$ в этом случае *максимальны* и что ими исчерпывается множество ненулевых простых идеалов кольца A (§ 2, n° 1); группа $D(A)$ отождествляется в этом случае с группой $I(A)$ ненулевых дробных идеалов кольца A.

Предложение 21. *Пусть A — дедекиндово кольцо. Тогда любой псевдонулевой модуль над A равен нулю, а любой псевдоинъективный* (соответственно *псевдосюръективный, псевдобиективный, псевдонулевой*) *гомоморфизм A-модулей является инъективным* (соответственно *сюръективным, биективным, нулевым*).

Первое утверждение уже было доказано (n° 4, пример 1); остальные утверждения получаются немедленно.

Предложение 22. *Пусть A — дедекиндово кольцо и M — некоторый A-модуль конечного типа. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

а) *модуль M есть модуль без кручения;*

б) *модуль M рефлексивен;*

в) *модуль M проективен.*

Уже известно (даже без каких-либо ограничений на целостное кольцо A), что из б) следует а) (n° 2, замечание 1) и что из в) следует б) (*Algébre*, chap. II, 3^{e}éd., § 2, n° 7, corrollai 4 de la proposition 14). Если M без кручения, то его можно отождествить с некоторой решеткой в пространстве $V = M \otimes_A K$ относительно кольца A; следовательно, модуль $M_\mathfrak{p}$ является свободным $A_\mathfrak{p}$-модулем для любого *максимального* идеала $\mathfrak{p} \in P$, ибо $A_\mathfrak{p}$ — кольцо главных идеалов. Окончательный результат вытекает из теоремы 1б) гл. II, § 5, n° 2.

Следствие. *Пусть M — некоторый A-модуль конечного типа и T — его подмодуль кручения. Тогда T является прямым слагаемым модуля M.*

Действительно, поскольку модуль M/T — без кручения, он проективен в силу предложения 22, и следствие вытекает, таким образом, из *Algébre*, chap. II, 3^{e}éd., § 2, n° 3, proposition 4.

Предложение 23. *Пусть A — дедекиндово кольцо и T — некоторый A-модуль кручения конечного типа. Тогда существуют такие два конечных семейства $(n_i)_{i\in I}$ и $(\mathfrak{p}_i)_{i\in I}$, где n_i — целые числа $\geqslant 1$ и $\mathfrak{p}_i$ — элементы из P, что T изоморфен прямой сумме $\bigoplus_{i\in I}\left(A/\mathfrak{p}_i^{n_i}\right)$. Кроме того, семейства $(n_i)_{i\in I}$ и $(\mathfrak{p}_i)_{i\in I}$ единственны с точностью до перестановки множества индексов.*

Это следует из теоремы 5 n° 4, если принять во внимание тот факт, что любой псевдоизоморфизм здесь является изоморфизмом.

Предложение 24. *Пусть A — дедекиндово кольцо и M — некоторый A-модуль без кручения конечного типа ранга $n\geqslant 1$. Тогда существует такой идеал $\mathfrak{d}\neq 0$ кольца A, что M изоморфен прямой сумме модулей A^{n-1} и $\mathfrak{d}$. Кроме того, класс идеала $\mathfrak{d}$ определен этим условием однозначно.*

Теорема 6 n° 9 показывает, что существует такой свободный подмодуль L в M, что модуль M/L изоморфен некоторому идеалу $\mathfrak{a}\subset A$. Если $\mathfrak{a}=0$, то положим $\mathfrak{d}=A$.

В противном случае идеал $\mathfrak{a}$ имеет ранг 1; следовательно, $L=A^{n-1}$ и $\mathfrak{a}$ является *проективным* модулем (предложение 22). Поэтому M изоморфен прямой сумме L и $\mathfrak{a}$ (*Algébre*, chap. II, 3^e éd., § 2, n° 2, proposition 4), чем доказывается первая часть предложения. Кроме того, из предложения 16 ((i), (iv) и (v)) n° 7 вытекает, что $c(M)=c(\mathfrak{d})$, откуда и следует единственность класса идеала $\mathfrak{d}$.

Замечания. 1) Предложения 23, 24 и следствие предложения 22 полностью определяют структуру A-модулей конечного типа. Предложение 24 показывает, что любой A-модуль без кручения конечного типа определяется, с точностью до изоморфизма, своим *рангом* и *классом дивизоров*, который с ним связан.

2) Можно показать, что над дедекиндовым кольцом любой проективный модуль не конечного типа обязательно *свободен* (упражнение 21) и что любой подмодуль проективного модуля проективен (упражнение 20).

Упражнения

1) Пусть A — целозамкнутое нётерово кольцо и V — векторное пространство конечного ранга над полем частных кольца A. Показать, что если (M_λ) — произвольное семейство рефлексивных решеток в пространстве V, содержащих некоторую фиксированную решетку N, то решетка $M=\bigcap_\lambda M_\lambda$ рефлексивна (рассмотреть сопряженные решетки M_λ^*).

*2) Пусть A — целозамкнутое нётерово кольцо и E, F — два A-модуля конечного типа. Предположим, что в E нет кручения, что модуль $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ рефлексивен и что $\mathrm{Ext}^1_A(E, F) = 0$. Показать, что тогда F — рефлексивный модуль. (Доказать сначала, что F не имеет кручения; если $T = F^{**}/c_F(F)$, то подсчитать двумя способами множество $\mathrm{Ass}(\mathrm{Hom}_A(E, T))$, используя точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(E, F) \to \mathrm{Hom}(E, F^{**}) \to \mathrm{Hom}(E, T) \to 0$$

и предложение 10, гл. IV, § 1, п° 4.)*

3) Пусть A — целозамкнутое нётерово кольцо, K — его поле частных, M — рефлексивная решетка в векторном пространстве V конечного ранга над K и L — *свободная* решетка в пространстве V, содержащая M. Показать, что существует такая свободная решетка L_1 в V, что $M = L \cap L_1$. (Рассмотреть конечное множество I простых идеалов $\mathfrak{p}$ высоты 1 в кольце A, таких, что $L_{\mathfrak{p}} \neq M_{\mathfrak{p}}$, и кольцо главных идеалов $S^{-1}A$, где $S = \bigcap_{\mathfrak{p} \in I} (A - \mathfrak{p})$; показать, что существует такая свободная решетка L_0 в пространстве V, что $M_{\mathfrak{p}} = (L_0)_{\mathfrak{p}}$ для каждого $\mathfrak{p} \in L$, и такой $s \in S$, что $M \subset s^{-1}L_0 = L_1$).

4) Пусть k — поле, A — кольцо многочленов $k[X, Y]$.

а) Пусть (e_1, e_2) — канонический базис A-модуля A^2, и пусть E есть A-подмодуль модуля A^2, порожденный элементами $(X - Y)e_1$, $e_1 + Xe_2$ и $e_1 + Ye_2$; пусть F — моногенный подмодуль в E, порожденный элементом $(X - Y)^2 e_1$. Показать, что A-модуль $M = E/F$ не является прямой суммой своего подмодуля кручения и некоторого модуля без кручения.

б) Показать, что A-модуль кручения A/AXY не является прямой суммой моногенных подмодулей вида $A/\mathfrak{p}_i^{n_i}$, где $\mathfrak{p}_i$ — простые идеалы высоты 1.

5) Пусть A — целозамкнутое нётерово кольцо и M — некоторый A-модуль конечного типа. Показать, что если $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — два идеала из A, то A-модуль $((\mathfrak{a}M) \cap (\mathfrak{b}M))/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})M$ является псевдонулевым; привести пример, когда этот модуль не нулевой.

6) Пусть k — поле, B — кольцо многочленов $k[X, Y]$, A — подкольцо $k[X^2, XY, Y^2]$ в B.

а) Показать, что A является целозамкнутым нётеровым кольцом и что B представляет собой A-модуль конечного типа.

б) Показать, что идеал $\mathfrak{p} = AX^2 + AXY$ кольца A является простым идеалом высоты 1 (и, следовательно, дивизориальным), но B-модуль $\mathfrak{p} \otimes_A B$ имеет ненулевой подмодуль кручения и, следовательно, не является рефлексивным; идеал $\mathfrak{p}B$ кольца B не является дивизориальным, каноническое отображение $\mathfrak{p} \otimes_A B \to \mathfrak{p}B$ не является инъективным и идеал $\mathfrak{p}$ не является плоским A-модулем.

7) Пусть A — целозамкнутое нётерово кольцо, E — некоторый A-модуль без кручения конечного типа и E^* — сопряженный ему модуль.

а) Показать, что канонический гомоморфизм $E^* \otimes_A E \to \mathrm{End}_A(E)$ является псевдоизоморфизмом.

б) Получить из а), что, для того чтобы E был проективным A-модулем, необходимо и достаточно, чтобы $E^* \otimes_A E$ был рефлексивным A-модулем. (Заметить, что если модуль $E^* \otimes_A E$ рефлексивен, то канонический гомоморфизм $E^* \otimes_A E \to \mathrm{End}_A(E)$ биективен.)

¶ *8) Пусть A — целозамкнутое нётерово кольцо и M_1, M_2 — два A-модуля конечного типа.

а) Показать, что A-модули $\operatorname{Tor}_i^A(M_1, M_2)$, $\operatorname{Ext}_A^i(M_1, M_2)$ являются псевдонулевыми при $i \geqslant 2$ (свести к случаю, когда A — кольцо главных идеалов).

б) Если M_1 — модуль без кручения, то показать, что $\operatorname{Tor}_1^A(M_1, M_2)$ и $\operatorname{Ext}_A^1(M_1, M_2)$ являются псевдонулевыми модулями (тот же метод).

в) Если M_1 является A-модулем кручения, то показать, что имеют место соотношения (в обозначениях n° 5)

$$\chi(M_1 \otimes_A M_2) - \chi\left(\operatorname{Tor}_1^A(M_1, M_2)\right) = r(M_2)\,\chi(M_1),$$

$$\chi(\operatorname{Hom}_A(M_1, M_2)) - \chi\left(\operatorname{Ext}_A^1(M_1, M_2)\right) = -r(M_2)\,\chi(M_1),$$

$$\chi(\operatorname{Hom}_A(M_2, M_1)) - \chi\left(\operatorname{Ext}_A^1(M_2, M_1)\right) = r(M_2)\,\chi(M_1).$$

г) Показать, что для любой пары A-модулей конечного типа M_1, M_2 имеют место соотношения

$$c(M_1 \otimes_A M_2) - c\left(\operatorname{Tor}_1^A(M_1, M_2)\right) = r(M_1)\,c(M)_2 + r(M_2)\,c(M_1),$$

$$c(\operatorname{Hom}_A(M_1, M_2)) - c\left(\operatorname{Ext}_A^1(M_1, M_2)\right) = r(M_1)\,c(M_2) - r(M_2)\,c(M_1).$$

9) Пусть k — поле и A — кольцо многочленов $k[X, Y]$. На A-модуле $M = A^2$ рассмотрим такую линейную форму f, при которой $f(e_1) = X$, $f(e_2) = Y$ ((e_1, e_2) — канонический базис). Показать, что ядро L формы f является моногенным свободным A-модулем, но фактормодуль M/L (изоморфный некоторому идеалу нз A) не рефлексивен.

¶ 10) Пусть A — коммутативное кольцо. Для любого подмодуля R свободного A-модуля конечного типа $L = A^n$ обозначим через $\mathfrak{c}_1(R)$ идеал, порожденный элементами (x, x^*), где x пробегает модуль R и x^* пробегает сопряженный модуль L^*; положим $\mathfrak{c}_k(R) = \mathfrak{c}_1\left(\operatorname{Im}\left(\bigwedge^k R\right)\right)$, где $\operatorname{Im}\left(\bigwedge^k R\right)$ — канонический образ k-й внешней степени модуля R в модуле $\bigwedge^k L$. Если $R_1 \subset R_2$ — два подмодуля в L, то $\mathfrak{c}_k(R_1) \subset \mathfrak{c}_k(R_2)$ для всякого k.

а) Пусть M — некоторый A-модуль конечного типа, модуль M изоморфен некоторому фактормодулю L/R, где $L = A^n$ при подходящем n. Показать, что последовательность идеалов $(\mathfrak{a}_k)_{k \geqslant 0}$, в которой $\mathfrak{a}_k = \mathfrak{c}_{n-k}(R)$ для $k \leqslant n$ и $\mathfrak{a}_k = A$ для $k > n$, не зависит от представления модуля M в виде L/R. (Рассмотреть сначала случай, когда модули L/R и L/R' изоморфны, после этого заметить, что A^n/R изоморфен $A^{n+h}/(R + A^h)$ для любого $h > 0$.) Положим $\mathfrak{d}_k(M) = \mathfrak{a}_k$ для любого $k \geqslant 0$; эти идеалы называются *детерминантными* идеалами, ассоциированными с модулем M. Имеет место соотношение $\mathfrak{d}_k(M) \subset \mathfrak{d}_{k+1}(M)$ для любого $k \geqslant 0$.

б) Если A — кольцо главных идеалов и $M = L/R$, где L — свободный модуль конечного типа, то показать, что идеалы $\mathfrak{c}_{k+1}(R)\,(\mathfrak{c}_k(R))^{-1}$ совпадают с *инвариантными множителями* подмодуля R в модуле L.

в) Пусть $r = \gamma(M)$ — наименьшее число элементов в системах образующих модуля M, и пусть r_0 — такое наименьшее целое число h, что $\mathfrak{d}_h(M) = A$. Показать, что $r_0 \leqslant r$ и привести пример, когда $r_0 < r$ (взять в качестве A дедекиндово кольцо).

г) Если $\mathfrak{a}$ — аннулятор модуля M, то показать, что $\mathfrak{d}_0(M) \subset \mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}^{r-k} \subset \mathfrak{d}_k(M)$ для $k \leqslant r = \gamma(M)$.

д) Предположим, что M является прямой суммой подмодулей M_i $(1 \leqslant i \leqslant h)$; показать, что

$$\mathfrak{d}_k(M) = \sum \mathfrak{d}_{k_1}(M_1) \dots \mathfrak{d}_{k_h}(M_h),$$

где сумма распространяется на всевозможные конечные последовательности $(k_i)_{1 \leqslant i \leqslant h}$, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^{h} k_i = k$.

е) Если N — подмодуль конечного типа в M, то $\mathfrak{d}_k(M/N) \subset \mathfrak{d}_k(M)$ для всякого $k \geqslant 0$. Показать, что

$$\sum_{j=0}^{k} \mathfrak{d}_j(N)\, \mathfrak{d}_{k-j}(M/N) \in \mathfrak{d}_k(M).$$

ж) Пусть K — поле, A — кольцо многочленов $K[X, Y, Z]$, $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал $AX + AY + AZ$ и $\mathfrak{q}$ — идеал в A порожденный элементами X, Y, YZ и Z^2. Рассмотрим A-модуль $M = A/\mathfrak{q}$ и его подмодуль $N = \mathfrak{m}/\mathfrak{q}$. Показать, что $\mathfrak{d}_0(M) = \mathfrak{q}$, $\mathfrak{d}_1(M) = A$, $\mathfrak{d}_0(N) = \mathfrak{m}^2$, $\mathfrak{d}_1(N) = \mathfrak{m}$.

11) Пусть A — кольцо Крулля и M, N — две решетки конечного типа в векторном пространстве V конечного ранга n над полем частных кольца A. Для любого $c \neq 0$ из A, удовлетворяющего условию $cN \subset M$, рассмотрим детерминантные идеалы $\mathfrak{d}_k(M/cN)$ (упражнение 10) и положим

$$d_k(N, M) = \operatorname{div}(\mathfrak{d}_k(M/cN)) - (n-k)\operatorname{div}(c).$$

а) Показать, что дивизор $d_k(N, M)$ не зависит от выбора элемента c со свойством с) $cN \subset M$; $d_k(N, M)$ называется *детерминантным дивизором* индекса k решетки N относительно решетки M.

б) Имеет место соотношение $d_k(N, M) \geqslant d_{k+1}(N, M)$ и $d_n(N, M) = 0$. Показать, что если положить

$$e_k(N, M) = d_{n-k}(N, M) - d_{n-k+1}(N, M),$$

то

$$e_k(N, M) \leqslant e_{k+1}(N, M)$$

для $1 \leqslant k \leqslant n$; дивизоры $e_k(N, M)$ называются *инвариантными множителями* решетки N относительно решетки M (свести к случаю, когда A — кольцо главных идеалов).

в) Показать, что $d_0(N, M) = \chi(M, N)$ (n° 5).

г) Когда M является решеткой в пространстве V, а N — решеткой в некотором подпространстве W в V ранга $q < n$, то *инвариантными множителями* решетки N относительно решетки M называются инвариантные множители решетки N относительно $M \cap W$. Показать, как можно обобщить упражнения 8—10 и упражнения 14—16 из *Алгебры*, гл. VII, § 4 (предполагая, при необходимости, в некоторых случаях, что A нётерово и целозамкнуто).

12) Пусть A — целозамкнутое нётерово кольцо и M, N — два A-модуля без кручения конечного типа и одинакового ранга r, причем $N \subset M$; пусть $j : N \to M$ — каноническое вложение.

а) Показать, что для любого k отображение $\bigwedge^k j : \bigwedge^k N \to \bigwedge^k M$ псевдоинъективно, что $\operatorname{Coker}\left(\bigwedge^k j\right)$ является A-модулем кручения и что

$$\chi\left(\operatorname{Coker}\left(\bigwedge^k j\right)\right) = \binom{r-1}{k-1} \chi(\operatorname{Coker}(j)).$$

б) Используя а), показать, что если M — некоторый A-модуль без кручения конечного типа, то подмодуль кручения модуля $\bigwedge^k M$ является псевдонулевым для любого k и $c\left(\bigwedge^k M\right) = \binom{r-1}{k-1} c(M)$, где M имеет ранг r; в частности, $c\left(\bigwedge^r M\right) = c(M)$.

13) Пусть k — поле, A — кольцо многочленов $k[X, Y]$.

а) Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал $AX + AY$ в A; показать, что существует псевдоизоморфизм из $\mathfrak{m}$ в A, но не существует псевдоизоморфизма из A в $\mathfrak{m}$.

б) Пусть $\mathfrak{m}'$ — максимальный идеал $A(X-1) + AY$ в A; показать, что $c(\mathfrak{m}) = c(\mathfrak{m}') = 0$, но не существует псевдоизоморфизма из $\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{m}'$ или из $\mathfrak{m}'$ в $\mathfrak{m}$.

в) Пусть $\mathfrak{p} = AX$, $\mathfrak{q} = AY$ — простые идеалы высоты 1. В A-модуле $L = A^2$ рассмотрим подмодули $M = \mathfrak{p}e_1 \otimes \mathfrak{q}e_2$, $N = Ae_1 \otimes \mathfrak{p}\mathfrak{q}e_2$ (e_1, e_2 — векторы из канонического базиса модуля L). Показать, что M и N изоморфны и что существуют псевдоизоморфизм из L/M в L/N и псевдоизоморфизм из L/N в L/M, но не существует псевдоизоморфизма из L в себя, при котором M переходит в N или N переходит в M (заметить, что псевдоизоморфизм из L в себя обязательно является автоморфизмом L, для чего воспользоваться предложением 10).

¶ 14) Пусть A — прюферово кольцо (§ 2, упражнение 12) и M, N — две решетки конечного типа в векторном пространстве V конечного ранга n над полем частных кольца A. Для любого $c \neq 0$ из A, удовлетворяющего условию $cN \subset M$, рассмотрим детерминантные идеалы $\mathfrak{d}_k(M/cN)$ (упражнение 10) и положим

$$\mathfrak{d}_k(N, M) = c^{k-n}\mathfrak{d}_k(M/cN).$$

а) Показать, что идеал $\mathfrak{d}_k(N, M)$ не зависит от выбора элемента, для которого $cN \subset M$; эти идеалы называются *детерминантными идеалами* решетки N относительно решетки M.

б) Имеют место соотношения $\mathfrak{d}_k(N, M) \subset \mathfrak{d}_{k+1}(N, M)$ и $\mathfrak{d}_n(N, M) = A$. Показать, что если положить $\mathfrak{e}_k(N, M) = \mathfrak{d}_{n-k}(N, M)\,(\mathfrak{d}_{n-k+1}(N, M))^{-1}$, то целые идеалы $\mathfrak{e}_k(N, M)$ таковы, что $\mathfrak{e}_k(N, M) \supset \mathfrak{e}_{k+1}(N, M)$ для $1 \leqslant k \leqslant n$; идеалы конечного типа $\mathfrak{e}_k(N, M)$ называются *инвариантными множителями* решетки N относительно решетки M (рассмотреть $A_{\mathfrak{m}}$-модули $M_{\mathfrak{m}}$ и $N_{\mathfrak{m}}$ для каждого максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца A).

в) Когда M является решеткой в V, а N — решеткой в подпространстве W пространства V ранга $q < n$, то *инвариантными множителями* решетки N относительно M называются инвариантные множители решетки N относительно $M \cap W$. Показать, как можно обобщить упражнения 8—10 и упражнения 14—16 из *Алгебры*, гл. VII, § 4.

15) Пусть A — кольцо многочленов $\mathbf{Z}[X, Y, T, U, V, W]$, пусть L — свободный A-модуль A^4, пусть $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 4}$ — его канонический базис и M — подмодуль в L, порожденный четырьмя векторами Xe_1, Ye_2, $Te_3 + Ve_4$, $Ve_3 + We_4$. Показать, что

$$\mathfrak{d}_1(L/M)\,\mathfrak{d}_3(L/M) \not\subset (\mathfrak{d}_2(L/M))^2$$

(сравнить с упражнением 14б)).

¶ 16) а) Пусть A — прюферово кольцо и M — решетка конечного типа в векторном пространстве V ранга n над полем частных K кольца A. Показать, что существуют базис $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ пространства V и n дробных идеалов $\mathfrak{a}_i$ ($1 \leqslant i \leqslant n$), такие, что модуль M равен прямой сумме модулей $\mathfrak{a}_i e_i$.

(Провести индукцию по n; если $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — произвольный базис в V, то рассмотреть дробный идеал конечного типа $\mathfrak{b}_1$, порожденный координатами при u_1 элементов модуля M; рассматривая A-модуль $\mathfrak{b}_1^{-1}M$, свести к случаю, когда $\mathfrak{b}_1 = A$.)

Вывести отсюда, что если W — векторное подпространство в V, то $M \cap W$ является прямым слагаемым в M.

б) Предположим, что M есть подмодуль в A^n, равный прямой сумме модулей $\mathfrak{a}_i e_i$, где $\mathfrak{a}_i$ — идеалы (целые) конечного типа в A и $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ — канонический базис в A^n. Показать, что существуют базис $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ модуля A^n и идеалы $\mathfrak{b}_i$ в A, такие, что M является прямой суммой модулей $\mathfrak{b}_i u_i$ и при этом $\mathfrak{b}_i$ *делит* $\mathfrak{b}_{i+1}$ для $1 \leqslant i \leqslant n-1$. (Свести к случаю, когда $n = 2$ и $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = A$.)

17) Пусть k — поле, A — кольцо многочленов $k[X, Y]$, L — свободный A-модуль A^2 и (e_1, e_2) — канонический базис в L. Пусть M — подмодуль в L, порожденный двумя векторами $(X+1)e_1 + Ye_2$, $Ye_1 + Xe_2$. Показать, что не существует псевдоизоморфизма из L в себя, ограничение которого на M оказалось бы псевдоизоморфизмом из M в некоторый подмодуль N вида $\mathfrak{a}u + \mathfrak{b}v$, где (u, v) — некоторый базис A-модуля L и $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — два идеала в A, или ограничение которого на N было бы псевдоизоморфизмом из N в M. (Рассматривая детерминантные идеалы (упражнение 10) и замечая, что модуль M рефлексивен, можно ограничиться случаем, когда N — тоже рефлексивный модуль, и тогда обязательно будут выполняться равенства $\mathfrak{a} = A$, $\mathfrak{b} = AP$, где $P(X, Y) = X(X+1) - Y^2$ — экстремальный элемент из A; показать, наконец, что для всякого базиса (u, v) модуля L модуль $M \cap Au$ не может ни содержать Au, ни содержаться в APu.)

¶ 18) Пусть A — дедекиндово кольцо, K — его поле частных и M, N — две решетки в векторном пространстве V конечного ранга n над полем K. Пусть $\mathfrak{e}_k = \mathfrak{e}_k(N, M)$ — инвариантные множители решетки N относительно решетки M (упражнение 14). Показать, что существует такой базис $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ пространства V, что модуль M равен прямой сумме $\bigoplus_i \mathfrak{a}_i u_i$, где $\mathfrak{a}_i$ — дробные идеалы, а N равен прямой сумме $\bigoplus_i \mathfrak{e}_i \mathfrak{a}_i u_i$. (Воспользоваться теорией модулей конечного типа над кольцом главных идеалов (*Алгебра*, гл. VII, § 4, n° 2, теорема 1) и теоремой об аппроксимации в унимодулярной группе $\mathbf{SL}(n, A)$ (§ 2, n° 4).)

Распространить этот результат на случай, когда A является объединением возрастающего фильтрующегося семейства подколец, являющихся дедекиндовыми кольцами (например, целое замыкание дедекиндова кольца в алгебраическом замыкании его поля частных).

19) Пусть A — дедекиндово кольцо и $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — два дробных идеала в A. Показать, что A-модули $A + \mathfrak{ab}$ и $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ изоморфны.

20) Пусть A — дедекиндово кольцо, P — проективный A-модуль и N — некоторый подмодуль в P. Показать, что N проективен и является прямой суммой модулей, изоморфных идеалам кольца A. (Можно ограничиться случаем, когда модуль P свободен. Далее действовать так же, как в упражнении 16, используя трансфинитную индукцию, по аналогии с рассуждением в *Алгебре*, гл. VII, § 3, теорема 1.)

21) Пусть P — проективный модуль над дедекиндовым кольцом A. Показать, что если P не является модулем конечного типа, то он свободен. (В силу упражнения 20 можно записать P как бесконечную прямую сумму $\bigoplus_\lambda (\mathfrak{b}_\lambda + \mathfrak{c}_\lambda)$, где для каждого индекса λ через $\mathfrak{b}_\lambda$ и $\mathfrak{c}_\lambda$ обозначены идеалы кольца A. Используя упражнение 19, получить, что $P = L + Q$, где L изо-

морфен $A^{(I)}$ (множество I бесконечно) и $Q = \bigoplus_{\alpha \in I} \mathfrak{a}_\alpha$, где $\mathfrak{a}_\alpha$ — идеалы кольца A. После этого применить упражнение 3 из *Algèbre*, chap. II, 3e éd., § 2).

¶ 22) Пусть A — локальное кольцо, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал и E — некоторый A-модуль конечного типа.

а) Если $r = \gamma(E)$ — наименьшее число элементов в системе образующих модуля E, то r есть также наименьшее целое число h, такое, что детерминантный идеал $\mathfrak{d}_h(E)$ равен A и наименьшее из таких целых чисел k, что $\bigwedge^{k+1} E = 0$ (заметить, что r равно рангу пространства $E/\mathfrak{m}E$ над полем $A/\mathfrak{m}$).

б) Если положить $\mathfrak{e}(E) = \mathfrak{d}_{r-1}(E)$, то показать, что модуль $\bigwedge^r E$ изоморфен модулю $A/\mathfrak{e}(E)$. Для того чтобы некоторый идеал $\mathfrak{a}$ кольца A содержал $\mathfrak{e}(E)$, необходимо и достаточно, чтобы $E/\mathfrak{a}E$ был свободным $(A/\mathfrak{a})$-модулем (свести к случаю $\mathfrak{a} = 0$).

в) Если $\mathfrak{e}(E)$ есть главный идеал $A\alpha$, то показать, что E содержит прямое слагаемое, изоморфное модулю $A/A\alpha$ (записать E как фактормодуль модуля A^r по некоторому подмодулю R и заметить, что в R имеется элемент вида αy, где y — элемент некоторого базиса модуля A^r).

г) Пусть $\mathfrak{d}'_h(E)$ — аннулятор модуля $\bigwedge^{h+1} E$ для $0 \leqslant h \leqslant r-1$. Показать, что следующие условия эквивалентны:

α) Идеалы $\mathfrak{d}_h(E)$ $(0 \leqslant h \leqslant r-1)$ являются главными.

β) Идеалы $\mathfrak{d}'_h(E)$ $(0 \leqslant h \leqslant r-1)$ являются главными.

γ) Модуль E является прямой суммой r модулей, изоморфных $A/A\lambda_h$, где λ_{h+1} делят λ_h для $0 \leqslant h \leqslant r-1$.

Кроме того, когда эти условия выполнены, имеют место равенства $\mathfrak{d}'_h(E) = A\lambda_h$ для $0 \leqslant h \leqslant r-1$ и $\mathfrak{d}_h(E) = \lambda_h\lambda_{h+1}\lambda_{r-1}$ для $0 \leqslant h \leqslant r-1$. (Провести индукцию по r, используя в).)

д) Предположим, кроме того, что кольцо A целостное. Показать, что если $\mathfrak{p}$ — такой простой идеал в A, что $E/\mathfrak{p}E$ является свободным $(A/\mathfrak{p})$-модулем и $E_\mathfrak{p}$ — свободным $A_\mathfrak{p}$-модулем, то E — свободный A-модуль (используя б), показать, что $\gamma(E_\mathfrak{p}) = \gamma(E)$ и что $\mathfrak{e}(E_\mathfrak{p}) = (\mathfrak{e}E)$).

23) Пусть A — кольцо, E — некоторый A-модуль конечного типа, r — наименьшее из целых чисел k, для которых $\bigwedge^{k+1} E = 0$, и $\mathfrak{e}(E)$ — аннулятор модуля $\bigwedge^r E$. Показать, что для любого идеала $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{e}(E)$ в A модуль $E/\mathfrak{a}E$ над кольцом $A/\mathfrak{a}$ является плоским (свести к случаю, когда A — локальное кольцо, и воспользоваться упражнением 22б)). Вывести отсюда, что если $\mathfrak{r}$ — радикал кольца A и если для всех максимальных идеалов $\mathfrak{m}$ кольца A ранг векторного $(A/\mathfrak{m})$-пространства $E/\mathfrak{m}E$ один и тот же, то $E/\mathfrak{r}E$ является плоским $(A/\mathfrak{r})$-модулем.

24) Пусть A — целозамкнутое нётерово кольцо. Для того чтобы решетка M (относительно кольца A) была рефлексивной, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла следующему условию: для любой пары (a, b) элементов из A, в которой $a \neq 0$, гомотетия умножения на b в кольце A/aA инъективна, гомотетия умножения на b в модуле M/aM инъективна. (Для доказательства необходимости рассмотреть такие два элемента x, y из M, что $ax + by = 0$ и показать, что для всякого $\mathfrak{p} \in P(A)$ справедливо включение $y \in aM_\mathfrak{p}$. Для доказательства достаточности условия воспользоваться критерием в) из теоремы 2 и заметить, используя предложение 8 из § 1, n° 4, что условие записывается в виде:

$$\mathrm{Ass}(M/aM) = \mathrm{Ass}(A/aA)$$

для всякого $a \neq 0$ из A, и что для любой решетки модуля E, содержащей M, существует такой элемент $a \neq 0$ из A, что $aM \subset aE \subset M$.)

25) Пусть $A = \bigoplus_{n \geqslant 0} A_n$ — нётерово кольцо, градуированное по положительным степеням. Показать, что если кольцо A факториально, то A_0 факториально и A_0-модули A_n рефлексивны. (Чтобы доказать, что A_0 факториально, воспользоваться критерием в) из теоремы 1 в § 3, п° 2; для доказательства рефлексивности модулей A_n воспользоваться упражнением 24.)

¶ 26) Пусть A — нётерово кольцо и M — некоторый A-модуль конечного типа. Для того чтобы симметрическая алгебра $\mathbf{S}(M)$ была факториальным кольцом, необходимо и достаточно, чтобы A было факториальным кольцом и чтобы симметрические степени $\mathbf{S}^n(M)$ были рефлексивными A-модулями. (Чтобы доказать достаточность условия, надо сначала заметить, что если $T = A - \{0\}$, то $\mathbf{S}(M)$ можно отождествить с подкольцом в $T^{-1}\mathbf{S}(M)$; показать после этого, что любой экстремальный элемент p из A экстремален и в $\mathbf{S}(M)$, сводя это к доказательству того, что если p делит в $\mathbf{S}(M)$ некоторое произведение xy двух однородных элементов, то p делит и один из них; наконец, применить предложение 3 § 3, п° 4.)

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

К ГЛАВАМ I—VII

(N. B. Римские цифры, указанные в скобках, относятся к библиографии, помещенной в конце этого очерка.)

Абстрактная коммутативная алгебра была создана недавно, но понять ее развитие можно, лишь рассматривая его как результат развития теории алгебраических чисел и алгебраической геометрии, благодаря которым она и возникла.

Не особенно греша против истины, можно предположить, что знаменитое „доказательство" неразрешимости уравнения $x^p + y^p = z^p$ в целых числах x, y, z, отличных от нуля, при простом нечетном p, якобы полученное Ферма, основано на разложении

$$(x+y)(x+\zeta y)\dots(x+\zeta^{p-1}y) = z^p$$

в кольце $\mathbf{Z}[\zeta]$ (где $\zeta \neq 1$ — корень p-й степени из единицы) и рассмотрении делимости в этом кольце в предположении, что оно является кольцом главных идеалов. В любом случае мы приходим к рассуждению, аналогичному тому, которое наметил Лагранж ((II), т. II, стр. 531); с помощью различных вариантов этого рассуждения (а именно замен переменных, понижающих степень уравнения) Эйлер ((I), т. I, стр. 488)[1]) и Гаусс ((III), t. II, p. 387) доказали теорему Ферма для $p = 3$, а Гаусс (loc. cit.) и Дирихле ((IV), т. I, стр. 42) — для $p = 5$; Дирихле аналогичным методом доказал неразрешимость уравнения $x^{14} + y^{14} = z^{14}$ ((IV), т. I, стр. 190). Наконец, Куммер в своих первых исследованиях в области теории чисел получил этим способом общее доказательство, содержащее, однако, ошибку (на которую ему указал Дирихле); несомненно, что именно эта ошибка привела Куммера к изучению арифметики циклотомических полей, в результате чего ему, наконец, удалось получить правильный вариант своего доказательства теоремы Ферма для простых чисел $p < 100$ (VII d).

---

[1]) В своем доказательстве Эйлер действовал так, как если бы кольцо $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ было кольцом главных идеалов; это, однако, не так. Тем не менее рассуждения Эйлера будут корректными, если рассмотреть кондуктор кольца $\mathbf{Z}[\rho]$ (ρ — кубический корень из единицы) на $\mathbf{Z}(\sqrt{-3})$ (ср. Sommer, Introduction á la theorie des nombres algébriques (trad. A. Lévy), Paris (Hermann), 1911, стр. 190).

С другой стороны, знаменитая работа Гаусса (1831 г.) о биквадратичных вычетах, выводы которой явились результатом детального исследования делимости в кольце $\mathbf{Z}[i]$ „целых гауссовых чисел“ ((III), т. II, стр. 109), ясно продемонстрировала пользу, которую приносит классическим проблемам теории чисел распространение понятия делимости на алгебраические числа[1]); не удивительно поэтому, что между 1830 и 1850 гг. эта теория стала объектом исследования в многочисленных работах немецких математиков — сначала Якоби, Дирихле и Эйзенштейна, а затем, немного позднее, Куммера и его ученика и друга Кронекера. Нам нет нужды говорить здесь о теории единиц, весьма частной для теории чисел с ее стремительным развитием, укажем лишь, что Эйзенштейн выяснил структуру группы единиц в кубических полях, а Кронекер — в циклотомических; это произошло незадолго до того, как Дирихле в 1846 г. ((IV), т. I, стр. 640) доказал общую теорему, до которой почти дошел Эрмит ((VIII), т. I стр. 159). Гораздо более трудным оказался вопрос (центральный для всей теории) о разложении на простые множители. После того как Лагранж привел примеры чисел вида x^2+Dy^2 (x, y, D — целые числа), которые обладают делителями, не представимыми в виде m^2+Dn^2 ((II), т. II, стр. 465), стало в сущности ясно, что не следует ожидать, что в общем случае кольца $\mathbf{Z}[\sqrt{-D}]$ являются кольцами главных идеалов, и за смелыми утверждениями Эйлера последовали гораздо более осторожные. Так, например, когда Дирихле доказывал, что соотношение $p^2-5q^2=r^5$ (p, q, r — целые числа) эквивалентно соотношению $p+q\sqrt{5}=(x+y\sqrt{5})^5$ с целыми x, y, он ограничился лишь указанием на то, что „*аналогичные теоремы верны для многих других простых чисел* (а не только для 5)“ ((IV), т. I, стр. 31). Правда, в диссертации Гаусса (1831 г.) и работе Эйзенштейна о кубических вычетах (VI а) мы находим попытку развить арифметику для кольца главных идеалов $\mathbf{Z}[i]$ и $\mathbf{Z}[\rho]$ ($\rho=(-1+i\sqrt{3})/2$ — кубический корень из единицы) в полной аналогии с теорией целых рациональных чисел; в связи с этими примерами весьма явной становится тесная связь между арифметикой квадратичных полей и теорией бинарных квадратичных форм, развитой Гауссом. Однако для общей

[1]) Исследования Гаусса по делению лемнискаты и эллиптическим функциям, связанным с этой кривой, при его жизни не были опубликованы, но относятся они примерно к 1800 г.; эти исследования должны были уже тогда привести его к размышлениям об арифметических свойствах кольца $\mathbf{Z}[i]$, так как операция деления на числа из него играла важную роль в теории Гаусса. См. по этому поводу Якоби ((V), т. VI, стр. 275); вычисления, связанные с этими вопросами, можно, кроме того, найти в работах Гаусса ((III), т. II, стр. 411, см. также (III), т. X_2, стр. 33 и след.).

картины не хватало „словаря“, который позволил бы излагать теорию квадратичных полей с помощью простой переформулировки теории Гаусса [1]).

В действительности проблема была решена сначала не для квадратичных, а для циклотомических полей (по причинам, которые станут ясны лишь позднее (ср. стр. 659)). С 1837 г. Куммер, который в начале своего пути был аналитиком, обращается к арифметике циклотомических полей; исследования этого предмета заняли у него 25 лет. Подобно своим предшественникам, Куммер изучал делимость в кольце $\mathbf{Z}[\zeta]$, где ζ — корень p-й степени из единицы, отличный от единицы (p — простое нечетное число); он скоро заметил, что в этих рассмотрениях тоже встречаются кольца, которые не являются кольцами главных идеалов и для которых никак не удается продвинуться в развитии законов арифметики (VIIa). Только в 1845 г., после восьми лет кропотливой работы, Куммеру удалось, наконец, пролить свет на эти вопросы благодаря определению „идеальных чисел“ ((VIIc) и (VIIId)).

То, что сделал Куммер, на современном языке приводит к определению *нормирований* поля $\mathbf{Q}(\zeta)$: они находятся во взаимно однозначном соответствии с куммеровыми „идеальными числами“, а „показатель“, с которым такой множитель входит в „разложение“ числа $x \in \mathbf{Z}[\zeta]$, есть не что иное, как значение на числе x соответствующего нормирования. Поскольку элементы, сопряженные с x, также принадлежат $\mathbf{Z}[\zeta]$ и так как их произведение $N(x)$ („норма“ элемента x [2])) является целым рациональным числом, то „идеальные простые множители“,

---

[1]) Читатель может найти точное описание указанного соответствия между квадратичными формами и квадратичными полями в книге Зоммера, loc. cit., стр. 205 — 229.

[2]) Понятие нормы алгебраического числа восходит к Лагранжу: пусть α_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — корни некоторого многочлена степени n. Лагранж рассматривал „норменную форму“

$$N(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n} \left(x_0 + \alpha_i x_1 + \ldots + \alpha_i^{n-1} x_{n-1}\right)$$

от переменных x_i, которая, несомненно, была подсказана ему его собственными исследованиями в области решения уравнений, а также „резольвентами Лагранжа“ ((II), т. VII, стр. 170). Следует подчеркнуть, что именно свойство мультипликативности нормы привело Лагранжа к его тождеству в бинарных квадратичных формах, с помощью которого Гаусс ввел „композицию“ на этих формах ((II), т. II, стр. 522). С другой стороны, когда где-то в окрестности 1830 г. возникла теория алгебраических чисел, новые задачи стали возникать в связи с решеннем уравнений $N(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \lambda$ (в частности, при $\lambda = 1$ так находились единицы) или с изучением „норменных форм“ (называемых также „разложимыми формами“); и даже в недавних работах свойства этих частных диофантовых уравненнй находят применение, особенно в теории p-адических чисел (Сколем, Шаботи).

которые нам надлежит определить, должны быть „делителями“ рациональных простых чисел; поэтому, чтобы дать их определение, достаточно сказать, что „идеальные простые множители“ суть „идеальные простые делители“ простых чисел $q \in \mathbf{Z}$. Для случая $q = p$ Куммер в сущности уже доказал (VIIa), что главный идеал $(1-\zeta)$ прост и что его $(p-1)$-я степень совпадает с главным идеалом (p); этот случай, таким образом, к новой проблеме не приводит. Для $q \neq p$ идея, которой, по-видимому, руководствовался Куммер, заключалась в том, чтобы заменить циклотомическое уравнение $\Phi_p(z) = 0$ сравнением $\Phi_p(u) \equiv 0 \pmod{q}$, т. е. разложить циклотомический многочлен $\Phi_p(X)$ *над полем* $\mathbf{F}_q$ на неприводимые множители и связать с каждым неприводимым множителем этого многочлена „идеальный простой множитель“. Вот простой случай (точно описанный в заметке (VII b), где Куммер приводит свои результаты без доказательства): $q \equiv 1 \pmod{p}$; если $q = mp + 1$ и если $\gamma \in \mathbf{F}_q$ — первообразный корень $(q-1)$-й степени из 1, то в кольце $\mathbf{F}_q[X]$ имеет место равенство

$$\Phi_p(X) = \prod_{k=1}^{p-1} (X - \gamma^{km}),$$

так как $\gamma^{pm} = 1$. Сопоставив каждому множителю $X - \gamma^{km}$ „идеальный простой множитель“ $\mathfrak{q}_k$ числа q, Куммер говорит, что элемент $x \in \mathbf{Z}[\zeta]$, минимальным многочленом которого над полем $\mathbf{Q}$ является P, *делится на* $\mathfrak{q}_k$, если в поле $\mathbf{F}_q$ выполняется равенство $P(\gamma^{km}) = 0$. Короче говоря, если пользоваться современным языком, Куммер записывает факторкольцо $\mathbf{Z}[\zeta]/q\mathbf{Z}[\zeta]$ как прямую сумму полей, изоморфных $\mathbf{F}_q$. Для $q \not\equiv 1 \pmod{p}$ неприводимые множители многочлена $\Phi_p(X)$ в кольце $\mathbf{F}_q[X]$ уже не являются многочленами первой степени, и поэтому вместо X в многочлен $P(X)$ следует подставлять уже „мнимые корни Галуа“ множителей многочлена Φ_p в кольце $\mathbf{F}_q[X]$. Куммер обошел эту трудность, совершив переход, как мы говорим сегодня, к *полю разложения* K числа q; если f — такое наименьшее целое число, что $q^f \equiv 1 \pmod{p}$, и если положить $p - 1 = ef$, то поле K окажется не чем иным, как подполем в $\mathbf{Q}(\zeta)$, состоящим из элементов, инвариантных относительно подгруппы порядка f группы Галуа (циклической группы порядка $p-1$) расширения $\mathbf{Q}(\zeta)$ поля $\mathbf{Q}$; иначе говоря, это то единственное подполе в $\mathbf{Q}(\zeta)$, которое имеет степень e над $\mathbf{Q}$. Благодаря „Исследованиям“ Гаусса было хорошо известно, что это поле порождено „периодами“:

$$\eta_i = \zeta_k + \zeta_{k+e} + \zeta_{k+2e} + \ldots + \zeta_{k+(f-1)e}$$

($0 \leqslant k \leqslant e-1$, $\zeta_v = \zeta^{g^v}$, где g — первообразный корень сравнения $z^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$), которые составляют нормальный базис. Основываясь на формулах Гаусса, Куммер доказал, что если $R(X)$ — минимальный многочлен (унитарный и с целыми рациональными коэффициентами) какого-нибудь из „периодов“ η, то над полем $\mathbf{F}_q$ многочлен $R(X)$ тоже разлагается на различные множители $X - u_j$ ($1 \leqslant j \leqslant e$) первой степени и на этот раз каждому из элементов u_j сопоставляется „идеальной простой множитель“ $\mathfrak{q}_j$. Чтобы определить „делимость на $\mathfrak{q}_j$“, Куммер записывает произвольное число $x \in \mathbf{Z}[\zeta]$ в виде $x = \sum_{k=0}^{f-1} \zeta^k y_k$, где каждое $y_k \in K$ само записывается единственным образом как многочлен степени $\leqslant e-1$ от „периода“ η с целыми рациональными коэффициентами. Куммер говорит, что x делится на $\mathfrak{q}_j$ тогда и только тогда, когда при замене η на u_j в каждом из y_k полученные элементы из $\mathbf{F}_q$ *все* обращаются в нуль. Однако требовалось определить еще „показатель“ множителя $\mathfrak{q}_j$ в элементе x. Для этого Куммер ввел то, что мы сегодня называем *униформизирующей* для $\mathfrak{q}_j$, т. е. такой элемент $\rho_j \in K$, что $N(\rho_j) \equiv 0 \pmod{q}$, $N(\rho_j) \not\equiv 0 \pmod{q^2}$, и при этом ρ_j делится на $\mathfrak{q}_j$ (в указанном выше смысле) и *ни на какой другой* идеальный множитель числа q, отличный от $\mathfrak{q}_j$. Существование такого элемента ρ_j было по существу доказано годом раньше Кронекером в его диссертации ((IXa), стр. 23); итак, положив $\rho'_j = N(\rho_j)/\rho_j$, Куммер определяет показатель множителя $\mathfrak{q}_j$ в x как число h, для которого $x\rho'^h_j \equiv 0 \pmod{q^h}$, но $x\rho'^{h+1}_j \not\equiv 0 \pmod{q^{h+1}}$; конечно, он начал с доказательства эквивалентности соотношения $x\rho'_j \equiv 0 \pmod{q}$ делимости x на $\mathfrak{q}_j$ в прежнем смысле. После этих определений распространение на случай кольца $\mathbf{Z}[\zeta]$ обычных законов делимости для „идеальных чисел“ не представляло серьезной трудности; и в своей первой работе (VIIc) Куммер, воспользовавшись „методом выдвижных ящиков“ Дирихле, смог даже доказать, что „классов“ „идеальных множителей“ *конечное* число [1]).

Мы не станем останавливаться на истории дальнейших исследований Куммера о циклотомических полях, которые относились к определению числа классов и применению к доказа-

[1]) Впрочем, здесь Куммер лишь воспользовался рассуждениями Кронекера из его диссертации, касающимися классов решений уравнений вида $N(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = a$ ((IXa), стр. 25). С другой стороны, Куммер много раз намекал на результаты относительно уравнений такого типа, полученные Дирихле (для произвольного поля алгебраических чисел), однако эти результаты не были ни опубликованы, ни найдены среди записок Дирихле.

тельству теоремы Ферма в отдельных случаях. Упомянем лишь о том способе, которым в 1859 г. он распространил свой метод для получения (по крайней мере частично) „идеальных простых чисел" в „куммеровом поле" $\mathbf{Q}(\zeta, \mu)$, где μ — некоторый корень неприводимого многочлена $P(X) = X^p - a$ и $a \in \mathbf{Z}[\zeta]$ (VIIe). Любопытно, что Куммер изучал эту задачу, рассматривая поле $\mathbf{Q}(\zeta, \mu)$ как циклическое расширение *поля* $\mathbf{Q}(\zeta)$, взятого в качестве „основного поля"[1]): он исходил из „идеального простого числа" $\mathfrak{q}$ кольца $\mathbf{Z}[\zeta]$, о котором предполагалось, что оно не делит ни p, ни a, и на этот раз предметом его рассмотрения (употребляя современные термины) был многочлен $\bar{P}(X) = X^p - \bar{a}$ над *полем вычетов* k нормирования поля $\mathbf{Q}(\zeta)$, соответствующего $\mathfrak{q}$ (через $\bar{a}$ обозначается канонический образ элемента a в поле k). Поскольку $\mathbf{Q}(\zeta)$ является полем корней p-й степени из единицы, многочлен $\bar{P}$ или неприводим над k, или является произведением множителей первой степени. В первом случае Куммер говорит, что $\mathfrak{q}$ является простым в кольце $\mathbf{Z}[\zeta, \mu]$; во втором он вводит элементы w_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ кольца $\mathbf{Z}[\zeta]$, образы которых в k являются корнями многочлена $\bar{P}$, и каждому индексу i сопоставляет идеальный простой множитель $\mathfrak{r}_i$ элемента $\mathfrak{q}$; далее, положив $W_i(X) = \prod_{j \neq i} (X - w_j)$, Куммер для произвольного многочлена f с коэффициентами в $\mathbf{Z}[\zeta]$ говорит, что число $f(\mu)$ содержит m раз идеальный множитель $\mathfrak{r}_i$, если

$$f(w_i)\, W_i^m(w_i) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}^m},$$

но

$$f(w_i)\, W_i^{m+1}(w_i) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}^{m+1}}.$$

В итоге он получил таким способом нормирования поля $\mathbf{Q}(\zeta, \mu)$, *неразветвленные* над $\mathbf{Q}$. Этого было достаточно для тех приложений, которые входили в круг его интересов.

* * *

Так случилось, что в изучении полей специального вида, к которым Куммера привели его первоначальные исследования по теореме Ферма, ему встретился ряд благоприятных обстоя-

[1]) В своей работе о квадратичных формах с коэффициентами в кольце целых гауссовых чисел ((IV), т. I, стр. 533—618) Дирихле в нескольких местах обращался к рассмотрению относительной нормы поля $\mathbf{Q}(\sqrt{D}, i)$ над его квадратичным подполем $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$. Эйзенштейн, изучая корни 8-й степени из единицы, также рассматривал поле, порожденное этими корнями, как квадратичное расширение поля $\mathbf{Q}(i)$ и использовал относительную норму для этого подполя ((VIb), стр. 253). Однако работа Куммера является первым примером углубленного изучения арифметических свойств „относительного поля".

тельств, существенно облегчивших ему работу. Распространение на общий случай результатов Куммера было сопряжено с несомненными трудностями и потребовало годы напряженного труда.

В течение сорока лет после открытия Куммера история теории алгебраических чисел, в которой главные роли принадлежали Кронекеру и Дедекинду, напоминает историю соперничества Ньютона и Лейбница за 180 лет до этого в связи с изобретением исчисления бесконечно малых (к счастью, их отношения не носили столь язвительного характера). Ученик, а затем и сотрудник Куммера в Берлине Кронекер (диссертация которого, как мы видели, составила существенную часть теории Куммера) вплотную заинтересовался „идеальными числами", намереваясь использовать их в собственных исследованиях. Сегодня мы восхищаемся удивительной проницательностью этого математика, когда смотрим на его исследования: начиная с 1853 г. ((IX b), стр. 10), Кронекер сформулировал общую теорему о структуре абелевых расширений поля $\mathbf{Q}$ и, что, возможно, еще более замечательно, в последующие годы основал теорию комплексного умножения, а также создал первые ростки теории полей классов ((IX c) и (IX d)). Его письмо к Дирихле от 1857 г. ((IX), т. V, стр. 418—421) показывает, что уже в это время он владел обобщением теории Куммера. Это подтверждал и сам Куммер в одной из своих работ ((VII c)), p. 57). Кронекер несколько раз намекал на эту теорию в своих работах между 1860 и 1880 гг.[1]).

Однако, хотя в то время математики немецкой школы теории чисел знали о существовании этих работ Кронекера, сам он, по-видимому, не стремился ознакомить с сущностью своих методов кого-либо вне ограниченного круга друзей и учеников. Когда же он, наконец, решил опубликовать эти результаты (в работе 1881 г. о дискриминанте (IX e) и, особенно, в своем большом трактате „Festschrift" 1882 г. (IX f)). Дедекинд не мог сдержать удивления ((X), т. III, стр. 427), поскольку по доходившим до него слухам он ожидал совсем другого ((X), т. III, стр. 287). Кронекер, впрочем, не обладал тем даром красноречия и четкости, который был у Дедекинда. Не удивительно поэтому, что в основном методы Дедекинда, публиковавшиеся с 1871 г., легли в основу теории алгебраических чисел. Как бы ни был интересен метод „присоединения переменных", предложенный Кронекером, в той мере, в какой это относится к теории чисел, он предстает перед нами лишь как вариант аналогичного метода Дедекинда

[1]) Об эволюции идей Кронекера в этой области см. очень интересное введение к его работе 1881 г. о дискриминанте ((IX e), стр. 195).

(ср. гл. VII, § 1, упражнение 31) и, как мы увидим ниже, вся важность для истории коммутативной алгебры идеи Кронекера проявилась при развитии другого ее направления, ориентированного на алгебраическую геометрию.

По некоторым причинам, которые могли стать ясными лишь много лет спустя, любая предварительная попытка подойти к общей теории начиналась с уяснения понятия целого алгебраического числа. Это понятие возникло примерно в 1845—1850 гг., хотя довольно трудно точно указать дату его появления. Представляется весьма правдоподобным, что именно идея о системе, замкнутой относительно сложения и умножения (или, точнее, о том объекте, который мы называем теперь $\mathbf{Z}$-алгеброй конечного ранга), более или менее сознательно привела к общему определению целых алгебраических чисел: ведь к этому определению приходят неизбежно, когда на $\mathbf{Z}$-алгебру вида $\mathbf{Z}[\theta]$ накладывают требование, чтобы она была конечного ранга, по аналогии со случаем кольца $\mathbf{Z}[\zeta]$, порожденного некоторым корнем из единицы, которое находилось в центре внимания математиков, занимавшихся в ту пору арифметикой. Как бы то ни было, когда Дирихле ((IV), т. I, стр. 640), Эрмит ((VIII), т. I, стр. 115 и 146) и Эйзенштейн ((VI c), стр. 236) независимо друг от друга ввели понятие целого алгебраического числа, они, по-видимому, не считали, что речь идет о новой идее и что ее полезно подробно исследовать. Лишь Эйзенштейн доказал в сущности (loc. cit.), что сумма и произведение двух целых алгебраических чисел являются целыми алгебраическими числами; впрочем, он не претендовал на оригинальность этого результата.

Гораздо более тонким оказался вопрос об определении колец, в которых можно было бы надеяться на обобщение теории Куммера. Сам Куммер в своей первой заметке (VII b) с полной уверенностью утверждал, что его методом можно заново построить теорию бинарных квадратичных форм Гаусса, рассматривая кольца $\mathbf{Z}[\sqrt{D}]$ (D — целое число); Куммер никогда не развил эту идею и, по-видимому, ни он, ни кто-либо другой до Дедекинда не заметил, что однозначное разложение на „идеальные“ простые множители в кольцах $\mathbf{Z}[\sqrt{D}]$ невозможно, когда $D \equiv 1 \pmod 4$ (хотя пример кубических корней из единицы показывал, что кольцо $\mathbf{Z}[\rho]$, рассматриваемое со времен Гаусса, отлично от $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$)[1]. До Дедекинда и Кро-

[1] Несмотря на то что Кронекер обращался к изучению арифметики колец $\mathbf{Z}[\sqrt{-D}]$ ($D>0$) в связи со своими работами по комплексному умножению, он ничего не опубликовал по рассматриваемому вопросу, и впервые явное описание целых чисел произвольного квадратичного поля $\mathbf{Q}(\sqrt{D})$ было дано Дедекиндом в 1871 г. ((X c), стр. 105—106).

некера изучались лишь кольца вида $\mathbf{Z}[\theta]$ или, иногда, некоторые кольца частного типа, имевшие вид $\mathbf{Z}[\theta, \theta']$[1]. Что касается Кронекера, то, возможно, на мысль рассмотреть кольцо *всех* целых чисел алгебраического расширения его впервые натолкнуло изучение полей алгебраических функций, где это кольцо вводится естественным образом как множество функций, „конечных на конечном расстоянии"; во всяком случае, он настаивал на таком описании „целых элементов" в этих полях в своей работе 1881 г. о дискриминанте (IX e) (работа была написана и представлена Берлинской академии в 1862 г.). Дедекинд не оставил никаких указаний, что послужило источником его идей по этому вопросу, но, начиная с первых его публикаций о числовых полях в 1871 г., кольцо всех целых элементов такого поля играет основную роль в его теории. Именно Дедекинд прояснил связь между таким кольцом и его подкольцами, имеющими то же самое поле частных, введя понятия *кондуктора* (X c).

Но это была не единственная трудность. Для того чтобы обобщить идеи Куммера, надо было сначала освободиться от перехода к полю разложения, который, естественно, не мог иметь аналогии в случае неабелева расширения. Впрочем, трюк с полем разложения мог бы на первый взгляд показаться весьма удивительным и искусственным, так как если исходить из неприводимого многочлена $\Phi_p(X)$ из $\mathbf{Z}[X]$, напрашивается вопрос, почему Куммер не развил до конца логические следствия своих идей и воздержался от применения теории „мнимых корней Галуа", хорошо известной в его время. Наиболее ясно препятствие предстает в свете неудачной попытки обобщения теории Куммера, предпринятой в 1865 г. Селлингом, учеником Дедекинда: для заданного неприводимого многочлена $P \in \mathbf{Z}[X]$ Селлинг разлагал на неприводимые множители соответствующий многочлен $\overline{P}(X)$ в кольце $\mathbf{F}_q[X]$: корни этого последнего многочлена принадлежат, следовательно, некоторому конечному расширению $\mathbf{F}_r$ поля $\mathbf{F}_q$; однако Селлинг, для того чтобы определить, следуя Куммеру, показатель „идеального простого множителя" числа q в целом числе поля корней многочлена $P(X)$, без всяких колебаний говорил о сравнениях по модулю некоторой *степени числа* q в *поле* $\mathbf{F}_r$ ((XI), стр. 26), а немного позднее, когда он пытался выяснить вопрос о ветвлении, он „присоединил" к полю $\mathbf{F}_r$ „мнимые корни" некоторого уравнения вида $x^h = q$ ((XI), стр. 34). Ясно, что эти вольности (которые оправды-

[1] Выше был рассмотрен пример кольца $\mathbf{Z}[\zeta, \mu]$, введенного Куммером (VII e). До этого Эйзенштейн обращался к детальному исследованию подкольца, порожденного двумя элементами кольца целых алгебраических чисел в поле корней 21-й степени из единицы (VI b).

ваются при замене поля $\mathbf{F}_q$ на q-адическое поле) в то время могли привести только к бессмыслице. К счастью, в 1857 г. Дедекинд (Xa) вновь рассмотрел под названием „теории высших сравнений" теорию конечных полей, но в другой форме [1]): он интерпретировал элементы этих полей как „остатки" многочленов из $\mathbf{Z}[X]$ по „двойному модулю", образованному линейными комбинациями с коэффициентами из $\mathbf{Z}[X]$ некоторого простого числа p и некоторого неприводимого унитарного многочлена $P \in \mathbf{Z}[X]$ (это, несомненно, послужило ему, так же как и Кронекеру, толчком к развитию общего понятия *модуля*, к которому Дедекинд и Кронекер пришли независимо друг от друга немного позднее). По его собственному свидетельству ((Xd), стр. 218), Дедекинд приступил к разработке проблемы „идеальных множителей" простого числа p в поле $\mathbf{Q}(\xi)$, где $P \in \mathbf{Z}[X]$ — минимальный многочлен числа ξ (по крайней мере в „неразветвленном" случае, т. е. когда в $\mathbf{F}_p[X]$ многочлен $\overline{P}$, соответствующий многочлену P, не имеет кратных корней), следующим образом: в кольце $\mathbf{Z}[X]$ записывается равенство

$$P = P_1 P_2 \dots P_h + p \cdot G,$$

где $\overline{P}_i$ — различные неприводимые многочлены в $\mathbf{F}_p[X]$; можно предполагать, что G не делится (в кольце $\mathbf{Z}[X]$) ни на один многочлен P_i, и для любого i положить $W_i = \prod_{j \neq i} P_j$. Тогда если $f \in \mathbf{Z}[X]$, то, по определению Дедекинда, $f(\xi)$ содержит k раз „идеальный множитель" $\mathfrak{p}_i$ числа p, соответствующий многочлену P_i, если

$$f W_i^k \equiv 0 \ (\mathrm{modd}\, p^k,\ P)$$

и

$$f W_i^{k+1} \not\equiv 0 \ (\mathrm{modd}\, p^{k+1},\ P).$$

Близость к методу, который применил Куммер к „куммеровым полям", здесь совершенно очевидна и равным образом легко можно возвратиться этим способом к исходному определению Куммера для циклотомических полей (см., например, работу Е. И. Золотарева (XIV), который независимо от Дедекинда, но несколько позже развил эти идеи).

Однако ни Дедекинду, ни Кронекеру, который, по-видимому, тоже предпринимал аналогичные попытки, не удалось продвинуться дальше по этому пути из-за трудностей, которые

[1]) Известно, что некоторые результаты этой теории, опубликованные сначала Галуа, были получены (на языке сравнений) Гауссом около 1800 г. После смерти Гаусса Дедекинд взял на себя заботу о публикации его трудов и среди бумаг, оставленных Гауссом, нашел, в частности, работу о конечных полях ((III), т. II, стр. 212—240).

доставляло ветвление ((Xd), стр. 218 и (IXf), стр. 325). Если кольцо целых чисел A рассматриваемого числового поля K допускает базис (над $\mathbf{Z}$), образованный степенями одного и того же числа θ, то не представляет труда обобщить предыдущий метод на простые числа, разветвленные в $\mathbf{Z}[\theta]$ (на это указывал Е. И. Золотарев (loc. cit.)). Однако существуют поля K, в кольце A целых элементов которых нет базиса указанного типа, и Дедекинд в конце концов обнаружил, что бывают случаи, когда некоторые простые числа p („экстраординарные множители дискриминанта" поля K) обладают тем свойством, что *для любого* $\theta \in A$ применение предыдущего метода к минимальному многочлену числа θ над $\mathbf{Q}$ приводит к сопоставлению числу p кратных идеальных множителей, тогда как на самом деле p не разветвлено в A [1]). Дедекинд признавал, что эта неожиданная трудность его надолго задержала, он преодолел ее, создав вполне завершенную теорию модулей и идеалов; эти результаты он мастерски изложил (и притом пользуясь весьма современным стилем, чего нельзя сказать о его современниках) в работе, без сомнения являющейся его шедевром: это знаменитое „XI добавление" к книге Дирихле по теории чисел (Xf). Известны три последовательных варианта этого труда, однако уже первый из них (опубликованный как „X добавление" ко второму изданию книги Дирихле в 1871 г. (IV bis) содержал сущность дедекиндова метода, и практически благодаря единственному рывку теория алгебраических чисел совершила переход от первых попыток и неуверенных шагов к вполне зрелой дисциплине, уже обладающей основным своим аппаратом. С самого начала кольцо всех целых элементов числового поля было поставлено на центральное место в теории; Дедекинд доказал существование базиса этого кольца над $\mathbf{Z}$ и получил отсюда определение дискриминанта поля — дискриминантом был назван квадрат определителя, образованного элементами базиса кольца целых алгебраических чисел и их сопряженными. Однако в „XI добавлении" Дедекинд дал описание разветвленных простых чисел (как простых множителей дискриминанта) только для квадратичных полей ((Xf), стр. 202), несмотря на то что имел общую теорему уже в 1871 г. [2]). Центральным результатом

[1]) Кронекер упоминал, что он обнаружил то же явление в некотором подполе поля корней 13-й степени из единицы, которое, впрочем, он детально не исследовал ((IXf), стр. 384). Пример экстраординарного множителя дискриминанта, предложенный Дедекиндом, подробно рассматривается в книге Hasse H., Zahlentheorie, Berlin, Acad. Verlag, 1949, стр. 333. Позднее Хассе дал пример поля K, в котором дискриминант не имеет экстраординарных множителей, но для которого нет такого элемента $\theta \in A$, что $A = \mathbf{Z}[\theta]$ (loc. cit., 335).

[2]) Он опубликовал доказательство этой теоремы только в своей работе 1882 г. о дифференте (Xe).

этого труда является теорема существования и единственности разложения идеалов на простые множители, для которой Дедекинд развивает элементарную теорию „модулей“; на самом же деле в „XI добавлении“ он употребляет этот термин для $\mathbf{Z}$-подмодуля числового поля, но понятия, которые там введены, и доказанные там результаты изложены таким образом, что могут быть непосредственно применены к модулям самой общей природы [1]). Между прочим, следует отметить, что в 1871 г. было введено понятие „кондуктора“, игравшее важную роль (как и „условие обрыва возрастающих цепей“) в первом доказательстве теоремы об однозначном разложении. В двух последующих изданиях Дедекинд дал два других доказательства этой теоремы, которую справедливо рассматривал как краеугольный камень своей теории. Здесь надо подчеркнуть, что именно в третьем доказательстве появились дробные идеалы (уже введенные Куммером в 1859 г. для циклотомических полей) и указан тот факт, что они образуют *группу*; в дальнейшем мы вернемся ко второму доказательству (стр. 670).

Все эти результаты (с точностью до терминологии), несомненно, были известны Кронекеру около 1860 г. как частные случаи его более общих концепций, о которых мы поговорим ниже (в то время как Дедекинд признавал, что преодолел последние трудности своей теории только в 1869—1870 гг. ((Xe), стр. 351) [2]); что касается числового поля, то следует, в частности, подчеркнуть, что в то время Кронекер уже знал, что вся эта теория применима без существенных изменений к случаю, когда выбрано некоторое „основное поле“ k, которое само является числовым полем (отличным от $\mathbf{Q}$); к такой точке зрения естественным образом приводит теория комплексного умножения. Кронекеру было также известно, что для некоторых полей k существуют такие их *алгебраические расширения* $K \neq k$, которые *над* k не разветвлены ((IXf), стр. 269); при $k = \mathbf{Q}$ этого быть не может (это следует из оценок снизу Эрмита и Минковского для дискриминанта). Дедекинд, по-видимому, никогда не становился на эту точку зрения (хотя он указывал на ее возможность в своей работе 1882 г. о дифференте), и первое систематическое изложение теории „относительных полей“ было дано Гильбертом (XVI d).

---

[1]) В своей работе 1882 г. об алгебраических кривых (совместной с Вебером) (X bis) он использовал аналогичным образом теорию модулей над кольцом $\mathbf{C}[X]$.

[2]) Кронекеру, однако, не удалось получить его методами полного описания разветвленных идеалов в случае числового поля. Тем не менее он получил это описание для полей алгебраических функций от одной переменной и, кроме того, доказал, что в этом случае отсутствуют „экстраординарные множители“ дискриминанта (IXe).

Наконец, в 1882 г. (Xe) Дедекинд завершил свою теорию, введя понятие *дифференты*, которое дало ему новое определение дискриминанта и позволило явно выразить показатели идеальных простых множителей в его разложении. Приблизительно в это же время Дедекинд заинтересовался теми особенностями, которые возникают при рассмотрении расширений Галуа; он ввел понятия группы разложения и группы инерции (в работе (Xg), которая была опубликована лишь в 1894 г.) и даже дал (в записках, не опубликованных при его жизни ((X), т. II, стр. 410—411)) набросок теории групп ветвления, которую (независимо от него) несколько позднее развил Гильберт ((XVI c) и (XVI d)).

Таким образом, к 1895 г. теория алгебраических чисел завершила первый этап своего развития. Методы, созданные в течение этого периода формирования, позволили почти немедленно перейти к следующему этапу — общей теории полей классов (или, что то же самое, теории абелевых расширений числовых полей), которая продолжает развиваться и в наши дни и которой мы здесь не касаемся. С точки зрения коммутативной алгебры можно сказать, что к этому времени теория дедекиндовых колец была практически завершена, за исключением аксиоматического их описания, а также исследования структуры модулей конечного типа над этими кольцами (которая для случая числового поля была по существу выяснена лишь Штейницем в 1912 г. (XX b)[1]).

* * *

Дальнейший прогресс коммутативной алгебры происходил в связи с довольно широким кругом проблем, возникших в алгебраической геометрии (которая, впрочем, непосредственно влияла на теорию чисел и до начала „абстрактного“ ее развития в современную эпоху).

Мы не будем здесь подробно рассматривать историю алгебраической геометрии, та ее часть, которая развивалась после смерти Римана, не имеет прямого отношения к нашей теме. Нам достаточно напомнить, что алгебраическая геометрия ставила себе целью главным образом изучение алгебраических кривых на комплексной проективной плоскости, действуя чаще всего методами проективной геометрии (используя координаты или обходясь без них). Параллельно в трудах Абеля, Якоби, Вейерштрасса и Римана развивалась теория „алгебраических функций“ от одной комплексной переменной и их интегралов; очевидно, что эти ученые сознавали наличие

[1]) Начало изучению модулей над кольцом целых алгебраических чисел было уже положено Дедекиндом (Xh).

связи между этой теорией и геометрией плоских алгебраических кривых и умели при случае „применить анализ к геометрии", но методы, использовавшиеся для изучения алгебраических функций, по природе своей были в основном „трансцендентными", даже до Римана [1]); в работах последнего этот характер исследования еще более усилился в связи с введением „римановых поверхностей" и рассмотрением аналитических функций, определенных на них. Почти сразу после смерти Римана Рох и, особенно, Клебш нашли возможность вывести из глубоких результатов, которые были получены трансцендентными методами Римана, многочисленные и яркие приложения к проективной геометрии кривых, что, естественно, побудило геометров того времени дать этим результатам чисто „геометрические" доказательства. Такая программа, неполностью выполненная Клебшем и Горданом, была завершена Брилем и М. Нётером несколькими годами позже (XIII) с помощью изучения систем переменных точек на заданной кривой и вспомогательных кривых („адъюнктов"), проходящих через такие системы точек. Но даже современникам Римана казалось, что у его трансцендентных методов шаткие основы (особенно это относилось к использованию им топологических понятий и „принципа Дирихле"); и хотя Брилль и Нётер были аккуратней большинства „синтетических" геометров тех времен (см. дальше стр. 667), их геометро-аналитические рассуждения все же не безупречны. Именно для того, чтобы дать теории плоских алгебраических кривых солидное основание, Дедекинд и Вебер опубликовали в 1882 г. большую работу по этой теме (Xbis): „*Предлагаемые исследования*, — писали они, — *имеют целью заложить фундамент теории алгебраических функций одной переменной — одного из важнейших творений Римана — одновременно в простой, строгой и совершенно общей форме. В предшествующих работах на эту тему, как правило, налагались ограничения на особенности рассматривае-*

[1]) Нужно, однако, заметить, что Вейерштрасс в своих исследованиях по абелевым функциям (которые восходят к 1857 г., но были изложены в его лекциях лишь около 1865 г., а опубликованы только в Полном собрании сочинений ((XVII), т. IV)) дал в противовес Риману чисто алгебраическое определение рода кривой как такого наименьшего целого числа p, для которого на кривой существуют рациональные функции, имеющие полюсы в произвольно заданных $p+1$ точках. Интересно обратить внимание на следующее: пытаясь найти элементы, которые заменили бы ему функции, имеющие только один полюс на кривой, Вейерштрасс в конце концов использовал для этой цели трансцендентные функции, однако еще до этого он побуждал Кронекера, по свидетельству последнего ((IXe), стр. 197), распространить на алгебраические функции от одной переменной результаты, которые он к этому времени получил для числовых полей, где „идеальные простые множители" по существу играют ту роль, которая была желательна Вейерштрассу).

мых функций и так называемые исключительные случаи упоминались мимоходом как предельные или вовсе оставлялись без внимания. Кроме того, использовалось несколько фундаментальных теорем о непрерывности или аналитичности, „очевидность" которых основывалась на геометрической интуиции той или иной природы" ((X bis) стр. 181) [1]).

Основная идея этой работы заключалась в том, чтобы построить теорию алгебраических функций одной переменной по аналогии с теорией алгебраических чисел в том виде, в каком ее только что развил Дедекинд. Для этого им пришлось перейти на „аффинную" точку зрения (в противоположность их современникам, всегда рассматривавшим алгебраические кривые уже вложенными в комплексное проективное пространство), следовательно, они исходили из конечного алгебраического расширения K поля $\mathbf{C}(X)$ рациональных дробей и кольца A „целых алгебраических функций" поля K, т. е. тех элементов поля K, которые являются целыми над кольцом многочленов $\mathbf{C}[X]$. Их основной результат, установленный без какого бы то ни было обращения к топологии [2]), заключается в следующем: кольцо A дедекиндово и с соответствующими изменениями к нему могут быть приложены все результаты „XI добавления" (и даже более простым образом, как это заметили Дедекинд и Вебер, не видевшие еще ясно причины этого ((X), т. 1, стр. 268)). Затем они доказали, что их теоремы в действительности биррационально инвариантны (другими словами, зависят только от поля K), и, в частности, не зависят от выбора „бесконечно удаленной прямой", выделенной вначале. Без сомнения, еще более интересным для нас является то, что, желая определить точки „римановой поверхности", соответствующей полю K (и, в частности, „бесконечно удаленные" точки, которые не соответствуют идеалам кольца A), они пришли к понятию *точки* поля K: Дедекинд и Вебер оказались перед лицом ситуации, с которой вновь столкнулся

[1]) Известно, что, несмотря на усилия Дедекинда, Вебера и Кронекера, нетребовательность в понимании того, что такое корректное доказательство, которая ощущалась уже в немецкой школе алгебраической геометрии 1870—1880 гг., становилась все более заметной в работах французских и особенно итальянских геометров двух последующих поколений, которые, следуя немецким геометрам и развивая их методы, приступили к теории алгебраических поверхностей; алгебраисты несколько раз поднимали по этому поводу „скандал" (особенно, начиная с 1920 г). Однако эти „нестрогие" методы в некоторой степени оправдывались блестящими результатами, достигнутыми с их помощью, тогда как ортодоксальные последователи Дедекинда вплоть до 1940 года проявляли неспособность сформулировать с достаточной гибкостью и силой алгебраические понятия, которые позволили бы дать корректные доказательства полученным результатам.

[2]) Они отмечали, что благодаря этому факту все их результаты останутся верными, если заменить поле $\mathbf{C}$ на поле всех алгебраических чисел ((X), т. 1, стр. 240).

И. М. Гельфанд в 1940 г. при основании теории нормированных алгебр, и заключавшейся в том, что рассматривалось множество K некоторых элементов, не заданных заранее в виде функций, которые, тем не менее, желательно было рассматривать как таковые. Чтобы получить множество определения этих гипотетических функций, они первыми воспользовались следующей идеей (которую вновь применил Гельфанд и которая стала банальной благодаря использованию в современной математике на каждом шагу): сопоставить произвольной точке x некоторого множества E и некоторому множеству $\mathscr{F}$ отображений из E в какое-то множество G отображение $f \to f(x)$ из $\mathscr{F}$ в G; иначе говоря, наперекор классической традиции рассмотреть в выражении $f(x)$ *символ* f *как переменную, а* x *— как фиксированную величину*. Исходя из понятия точки им было нетрудно определить „положительные дивизоры“ („многоугольники“ в их терминологии), которые содержали идеалы кольца A в качестве частного случая и соответствовали „системам точек“ Брилля и М. Нётера. Но хотя главные дивизоры и дивизоры дифференциалов были записаны ими как „частные“ положительных дивизоров, общего определения *дивизоров* они не дали; только Гензель и Ландсберг в 1902 г. ввели по аналогии с дробными идеалами это понятие, всегда приводившее в замешательство приверженцев чисто „геометрических“ методов (несмотря на то что последние были вынуждены все-таки определить дивизоры под названием „виртуальных систем“, но были смущены тем, что не могли дать им „конкретную“ интерпретацию).

В том же 1882 г. появилась большая работа Кронекера, готовившаяся более 20 лет (IXf). Намного более претенциозное, чем работа Дедекинда — Вебера, это произведение, к несчастью, было и более расплывчатым и неясным. Его центральной темой (на современном языке) было изучение идеалов некоторого целостного кольца, являющегося конечной алгеброй над одним из колец многочленов $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$ или $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$; Кронекер ограничился a priori теми из указанных идеалов, которые имеют конечный тип [то, что таковыми являются *все* эти идеалы, было доказано Гильбертом только несколькими годами позднее (для идеалов кольца $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$) в процессе его работы по теории инвариантов (XVI a)]. Что касается колец $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$ и $\mathbf{Z}]X_1, \ldots, X_n]$, то естественным образом возникала мысль связать с каждым идеалом в одном из них „алгебраическое многообразие“, образованное общими нулями всех многочленов, входящих в данный идеал; изучение геометрии в размерностях 2 и 3, проводившееся на протяжении XIX века, интуитивно приводило к идее о том, что любое многообразие представляет собой объединение конечного числа „неприводимых“ многообразий,

„размерности“ которых не обязаны быть одинаковыми. По-видимому, доказательство этого факта входило в планы Кронекера, хоть явно об этом он нигде и не говорил, а в его работе нельзя найти никакого определения ни „неприводимого многообразия“, ни размерности. В действительности же он ограничился кратким указанием на то, каким образом с помощью общего метода исключения [1]) исходя из произвольной системы образующих данного идеала определяется конечное число алгебраических многообразий, для каждого из которых в подходящей системе координат некоторые координаты произвольны, а другие являются „их алгебраическими функциями“ [2]). Но если при этом Кронекер действительно стремился к получению разложения на неприводимые многообразия, то приходится признать, что он достиг его только в элементарном случае *главного* идеала, где он, в сущности, доказал, обобщая классическую лемму Гаусса о кольце $\mathbf{Z}[X]$ ((III), т. 1, стр. 34), что кольца $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$ и $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ являются факториальными кольцами, в общем же случае мы можем лишь задать вопрос о том, было ли у Кронекера понятие простого идеала (то, что он называл „простой системой модулей“ (Primmodulsystem), является идеалом, *неразложимым в произведение* двух других ((IX f), p. 336); это тем более удивительно, что определение Дедекинда, данное в 1871 г., было совершенно общим!).

Следует, однако, сказать, что метод исключения Кронекера при подходящем применении все-таки приводит к разложению алгебраического многообразия на неприводимые компоненты: это совершенно четко было установлено Ласкером в начале его большой работы 1905 г. о полиномиальных идеалах (XIX); он корректно определил неприводимое многообразие

---

[1]) Этот метод заключается в следующем. Можно предполагать, что после линейного преобразования координат образующие F_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ данного идеала представляют собой многочлены, в которых старший члеи по X_1 имеет вид $c_i X_1^{m_i}$, где c_i — некоторая ненулевая константа. Можно также предположить, что многочлены F_i не имеют общего множителя. Затем для $2r$ переменных u_i, v_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ рассматриваются многочлены $\sum_{i=1}^{r} u_i F_i$ и $\sum_{i=1}^{r} v_i F_i$, записанные как *многочлены* от X_1, строится их результант Сильвестра, представляющий собой многочлен от u_i и v_i с коэффициентами из $\mathbf{C}[X_2, \ldots, X_n]$ (соответственно $\mathbf{Z}[X_2, \ldots, X_n]$); при приравнивании к нулю коэффициентов этого результанта получается система уравнений, решения $(x_2, \ldots, x_n)$ которой являются в точности проекциями решений $(x_1, \ldots, x_n)$ системы $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Эту процедуру можно продолжить далее индукцией по n.

[2]) Число произвольных координат в этом случае Кронекер называл *размерностью* („Stufe“).

(в $\mathbf{C}^n$) как такое алгебраическое многообразие V, на котором произведение двух многочленов лишь тогда всюду равно нулю, когда всюду на V равен нулю один из них; Ласкер ввел также определение размерности, не зависящее от выбора осей. В интересных исторических рассмотрениях, которые он поместил в своей работе, указывалось, с другой стороны, что автор связывает свои исследования не только с чисто алгебраической линией Кронекера и Дедекинда, но также и с проблемами, возникающими в связи с геометрическими методами Клебша и М. Нётера и особенно со знаменитой теоремой, доказанной Нётером в 1873 году (XII). Речь, по существу, шла, как мы бы сегодня сказали, об определении идеала $\mathfrak{a}$ многочленов кольца $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$, обращающихся в нуль в точках заданного в $\mathbf{C}^n$ множества M, причем чаще всего M было „алгебраическим многообразием" общих нулей конечного числа многочленов f_i, и долгое время считали (разумеется, без обоснований), что по крайней мере при $n=2$ и $n=3$ идеал $\mathfrak{a}$ порождается просто многочленами f_i[1]). Нётер показал, что уже для $n=2$ и двух многочленов f_1, f_2 это положение, вообще говоря, неверно; он привел достаточные условия для того, чтобы идеал $\mathfrak{a}$ порождался многочленами f_1 и f_2. Десятью годами позже Нетто доказал, что без каких-либо предположений относительно многочленов f_1 и f_2 некоторая *степень* идеала $\mathfrak{a}$ содержится в идеале, порожденном многочленами f_1 и f_2 (XV); эту теорему обобщил Гильберт в 1893 году своей знаменитой „теоремой о нулях" (XVIb). Несомненно, что именно этот результат побудил Ласкера ввести в своей работе общее понятие *примарного* идеала[2]) в кольцах $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_n]$ и $\mathbf{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ (после того, как в этих кольцах было введено понятие простого идеала, представлявшее собой перефразировку определения Дедекинда) и доказать[3]) существование примарного разложения для

[1]) См. замечания М. Нётера в начале его работы (XIII). Интересно отметить по этому поводу, что Кэли около 1860 года предположил, что для любой алгебраической кривой двоякой кривизны в $\mathbf{C}^3$ имеется конечное число многочленов, порождающих идеал многочленов в $\mathbf{C}[X, Y, Z]$, обращающихся в нуль на данной кривой (иначе говоря, это был частный случай теоремы Гильберта о конечности базиса (XVIa).

[2]) Примеры примарных идеалов, не равных степени простого идеала, встречались еще Дедекинду „в порядках", т. е. кольцах алгебраических чисел, для которых данное числовое поле является полем частных ((X), т. III, стр. 306). Кронекер также привел в качестве примера идеала, „неразложимого" в произведение двух других нетривиальных, идеал в $\mathbf{Z}[X]$, порожденный элементами p^2 и X^2+p, где p — простое число (этот идеал примарен относительно простого идеала, порожденного элементами X и p ((IXf), стр. 341).

[3]) Ласкер проводил индукцию по максимальной размерности h неприводимых компонент многообразия V нулей рассматриваемого идеала $\mathfrak{a}$. Говоря в современных терминах, он рассматривал сначала простые идеалы

любого идеала в этих кольцах[1]). О вопросах *единственности* этого разложения речь тогда, по-видимому, не шла. Мэколей был первым, кто несколько позднее (XXI) ввел различие между „погруженными“ и „непогруженными“ примарными идеалами и показал, что вторые определяются единственным образом, а первые — нет. Наконец, следует отметить, что Ласкер также распространил свои результаты на кольцо *целых рядов, сходящихся* в окрестности некоторой точки, опираясь на „подготовительную теорему“ Вейерштрасса. В этой части работы Ласкера указанное кольцо без сомнения впервые рассматривается с чисто алгебраической точки зрения, и методы, в этой связи развитые, должны были оказать сильное влияние на Крулля, когда в 1938 г. он создал общую теорию локальных колец (ср. (XXIXd), стр. 204 и др.).

* * *

Идеи, которые привели к современной коммутативной алгебре, начали оформляться около 1910 г. Если общее понятие поля использовалось уже с начала XX века, то общее понятие кольца было определено впервые в работе Френкеля 1914 г. (XXIII). К этому времени уже имелись в качестве примеров колец не только целостные кольца теории чисел и алгебраической геометрии, но также и кольца рядов (формальных или сходящихся) и, наконец, алгебры (не обязательно коммутативные) над каким-либо полем. Однако роль катализатора в формировании как теории колец, так и теории полей сыграла, по-видимому, теория *p-адических чисел* Гензеля, на которую Френкель, а также Штейниц (XXa) специально указывали как на отправной пункт своих исследований.

$\mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, содержащие $\mathfrak{a}$ и соответствующие неприводимым компонентам многообразия V максимальной размерности h. Каждому $\mathfrak{p}_i$ он сопоставил насыщение $\mathfrak{q}_i$ идеала $\mathfrak{a}$ относительно $\mathfrak{p}_i$ (ср. гл. IV, § 2, n° 3, предложение 5), затем он рассматривал коидуктор $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{a} : \mathfrak{q}_i$ идеала $\mathfrak{q}_i$ в $\mathfrak{a}$, брал в $\sum_i \mathfrak{b}_i$ элемент c, не принадлежащий ни одному из $\mathfrak{p}_i$, и показывал, что, с одной стороны, $\mathfrak{a}$ является пересечением идеалов $\mathfrak{q}_i$ и идеала $\mathfrak{a} + (c) = \mathfrak{a}'$, а с другой стороны, что неприводимые компоненты многообразия нулей V' идеала $\mathfrak{a}'$ имеют размерность $\leqslant h - 1$, что и позволило провести индукцию.

[1]) Интересно отметить, что второе доказательство Дедекинда теоремы об однозначном разложении начиналось с доказательства существования хотя бы одного редуцированного примарного разложения, и в одном из разделов, не вошедших в XI добавление, Дедекинд явно отмечает, что эта часть доказательства проходит не только для кольца A всех целых элементов числового поля K, но также и для всех „порядков“ в K ((X), т. III, стр. 303). Лишь после этого, установив, что кольцо A „вполне целозамкнуто“ (с точностью до терминологии), он доказывал, используя указанный факт, что примарные идеалы из предыдущего разложения являются на самом деле степенями простых идеалов (X, т. III, стр. 307).

Первая публикация Гензеля на эту тему относится к 1897 г.; он исходил в ней из выявленной Дедекиндом и Вебером аналогии между точками римановой поверхности поля алгебраических функций K и простыми идеалами числового поля k; Гензель задался целью перенести в теорию чисел „разложения Пюизё“ (ставшие классическими с середины XIX века), которые позволяют выразить каждый элемент $x \in K$ в окрестности произвольной точки римановой поверхности поля K в виде сходящегося ряда степеней „униформизирующей“ в рассматриваемой точке (ряда, имеющего лишь конечное число членов с отрицательными показателями). Гензель показал, что если $\mathfrak{p}$ — простой идеал поля k, лежащий над некоторым простым числом p, то каждому элементу $x \in k$ также можно сопоставить „p-адический ряд“ вида $\sum_i \alpha_i p^i$ (или $\sum_i \alpha_i p^{i/e}$, когда $\mathfrak{p}$ разветвлено над p), где α_i берутся в заданной системе представителей поля вычетов идеала $\mathfrak{p}$; но величайшая оригинальность Гензеля заключалась в идее рассматривать такие „разложения“ даже тогда, когда они не соответствуют *никакому элементу из* k, по аналогии с разложениями в целый ряд трансцендентных функций на римановой поверхности (XVIIIa).

Все оставшиеся годы работы Гензель занимался постепенным усовершенствованием своего нового исчисления; и если его попытки могут показаться нам робкими или неуклюжими, то не следует забывать о том, что, по крайней мере вначале, он еще не был вооружен ни топологическим, ни алгебраическим аппаратом современной математики, которые ему облегчили бы его задачу. В своих первых публикациях он почти не обращался к топологическим понятиям, и в итоге кольцо целых $\mathfrak{p}$-адических чисел ($\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца A целых элементов числового поля k) было для него, употребляя современные термины, проективным пределом колец $A/\mathfrak{p}^n$ при бесконечно возрастающем n в чисто алгебраическом смысле; для того, чтобы установить свойства этого кольца и его поля частных, Гензель должен был на каждом шагу пользоваться с большим или меньшим трудом рассуждениями, приспособленными специально для данного случая (например, при доказательстве того, что $\mathfrak{p}$-адические числа образуют целостное кольцо). Мысль ввести в $\mathfrak{p}$-адическое поле топологические понятия появилась у Гензеля, вероятно, около 1905 г. (XVIIId); и лишь в 1907 г., после полного завершения книги, где он в свете своих идей переизлагает теорию алгебраических чисел (XVIIIf), Гензель пришел к определению и основным свойствам $\mathfrak{p}$-адических абсолютных значений (XVIIIe)), исходя из которых он смог развить по аналогии с теорией Коши целый „$\mathfrak{p}$-адический анализ“, который с большим успехом был применен в теории чисел (осо-

бенно благодаря использованию p-адических экспонент и логарифмов) и значительность которого не переставала возрастать с годами.

С самого начала Гензель хорошо видел те упрощения, которые привносила его теория в классические изложения: она позволяла „локализовывать“ проблемы и переходить в такое поле, где не только свойства делимости тривиальны, но где и изучение многочленов, „редукция“ которых по mod p не имеет кратных корней, сводится к изучению многочленов над конечным полем; этот последний переход оказался возможным благодаря лемме Гензеля, установленной им в 1902 г. (XVIIIc). С 1897 г. он дал несколько ярких примеров (XVIIIb) таких упрощений, особенно в вопросах, касающихся дискриминанта (в частности, короткое доказательство критерия существования „экстраординарных делителей“, установленного им же несколькими годами раньше). Но, по-видимому, в течение долгого времени p-адические числа вызывали у математиков большое недоверие—позиция, несомненно, распространенная при столкновении со слишком „абстрактными“ идеями, тем более, что их автор (как это часто бывает в математике среди поборников новых теорий) своим чрезмерным энтузиазмом отчасти этому способствовал: неудовлетворенный плодотворным применением его теории к алгебраическим числам и восхищенный подобно всем его современникам доказательством трансцендентности чисел e и π, Гензель, введенный, возможно, в заблуждение эпитетом „трансцендентный“, применяемым одновременно и к числам и функциям, пришел из-за этого к мысли о том, что существует связь между его p-адическими числами и трансцендентными вещественными числами, и ему показалось, что он, основываясь на этой идее, получил простое доказательство трансцендентности числа e и даже числа e^e ((XVIIId), стр. 556) [1].

Вскоре после 1910 г. ситуация изменилась с появлением нового поколения, на которое оказали влияние топологические идеи Фреше и Ф. Рисса, алгебраические идеи Штейница и первые завоевания „абстрактной математики“; оно сумело сделать понятными и поставить на должное место работы Гензеля. Начиная с 1913 г. Кюршак (XXII) дал общее определение понятия абсолютного значения, осознал важность ультраметриче-

1) Это стремление любой ценой провести аналогию между p-адическими рядами и рядами Тэйлора приводило Гензеля к постановке странных проблем: например, он доказал, что любое целое p-адическое число может быть записано в виде ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$, где рациональные числа a_k выбраны так, что этот ряд сходится не только в $\mathbf{Q}_p$, но и в $\mathbf{R}$ (не под влиянием ли воспоминаний о рядах Тэйлора, сходящихся одновременно в нескольких местах?) (XVIIIe и f).

ских абсолютных значений (примером которых является p-адическое абсолютное значение), доказал (скопировав доказательство со случая вещественных чисел) существование пополнения поля относительно абсолютного значения и — это главное — дал общее доказательство возможности продолжения абсолютного значения на произвольное алгебраическое расширение данного поля. Однако Кюршак не заметил, что ультраметрический характер абсолютного значения обнаруживается уже в случае простого поля; это было замечено Островским, которому принадлежит также определение всех абсолютных значений поля $\mathbf{Q}$ и фундаментальная теорема, характеризующая поля с неультраметрическим абсолютным значением как подполя поля $\mathbf{C}$ (XXIV). В промежутке между 1920 и 1935 г. эта теория завершилась детальным исследованием абсолютных значений (не только дискретных), содержащим среди прочего изучение различных обстоятельств, возникающих при переходе к алгебраическому или трансцендентному расширению (Островский, Дойринг, Ф. К. Шмидт); с другой стороны, в 1931 г. Крулль ввел и изучил общее понятие нормирования (XXIXb), которое нашло значительное применение в последующие годы у Зарисского и его школы алгебраической геометрии [1]). Нам следует здесь также упомянуть, хоть это и не входит в нашу тему, более глубокие исследования структуры полных нормированных полей и полных локальных колец, которые относятся к той же эпохе (Хассе — Шмидт, Витт, Тейхмюллер, И. Коэн).

* * *

Упомянутая выше (стр. 670) работа Френкеля рассматривала лишь один очень частный тип колец (артиновы кольца с единственным простым идеалом, который к тому же предполагался главным). Если не считать трактата Штейница о полях (XXa), то первыми важными работами в области изучения общих коммутативных колец были две большие статьи Э. Нётер по теории идеалов: первая 1921 г. (XXVa), посвященная примарному разложению и содержащая в наиболее общем, полном и усовершенствованном виде результаты Ласкера и Мэколея, вторая 1927 г., в которой дано аксиоматическое описание дедекиндовых колец (XXVb). Подобно тому как это было у Штейница в случае полей, мы видим в этих работах, каким образом совсем небольшое число абстрактных идей — понятие неприводимого идеала, условия обрыва цепей и идея целозамкнутого кольца (две последние, как мы видели, были уже

[1]) Пример нормирования высоты 2 был случайно найден Юнгом в 1925 году (XXVII).

у Дедекинда) — может привести к общим результатам, которые в известных ранее случаях казались сугубо вычислительными.

Названными работами Э. Нётер, совместно с несколько более поздними исследованиями Артина — Ван дер Вардена по дивизориальным идеалам (XXXI) и Крулля, связавшего эти идеалы с существенными нормированиями (XXIXb), завершается долгое изучение разложения идеалов, начавшееся еще в прошлом веке [1]); именно в этот период и было положено начало современной коммутативной алгебре.

Бесчисленные работы по коммутативной алгебре, выходившие в свет позднее, удобней всего сгруппировать вокруг нескольких основных направлений.

А) *Локальные кольца и топологии.* Несмотря на то что общая идея локализации содержалась в зародыше уже в первых работах по теории чисел и алгебраической геометрии, ее выделение происходило очень медленно. Общее понятие кольца частных было дано лишь в 1926 г. Греллем, учеником Э. Нётер, да и то лишь для целостных колец (XXVIII), его распространение на кольца более общего типа было осуществлено только в 1944 г. К. Шевалле для нётеровых колец и в 1948 г. А. И. Узковым для общего случая. Вплоть до 1940 г. практически лишь Крулль и его школа использовали в общих рассуждениях рассмотрение локальных колец $A_\mathfrak{p}$ целостного кольца A; эти кольца в явном виде появились в алгебраической геометрии лишь с работами Шевалле и Зарисского, начиная с 1940 г. [2]).

Начало общему изучению собственно локальных колец было положено в 1938 г. большой работой Крулля (XXIXd). Наиболее важные результаты этой работы касались теории размерности и регулярных колец, о которых мы здесь говорить не будем. Но в этой же работе впервые появилось пополнение произвольного нётерова локального кольца, а также, еще в несовершенной форме, градуированное кольцо, ассоциированное с локальным кольцом [3]); последний объект был определен только

---

[1]) После определения дивизориальных идеалов довольно много исследований (Прюфер, Крулль, Лоренцен и др.) было посвящено идеалам, *устойчивым* относительно других операций $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}'$, удовлетворяющих аксиоматически заданным условиям, которые аналогичны свойствам операции $\mathfrak{a} \to A : (A : \mathfrak{a})$, приводящей к дивизориальным идеалам, результаты, полученные на этом пути, до сих пор не нашли приложения ни в алгебраической геометрии, ни в теории чисел.

[2]) В работах Гензеля и его учеников по теории чисел локальным кольцам $A_\mathfrak{p}$ постоянно предпочитали их пополнения; несомненно, что причиной тому служила возможность применения к последним леммы Гензеля.

[3]) Если $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал рассматриваемого нётерова локального кольца A и $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ — минимальная система образующих идеала $\mathfrak{m}$, то для каждого $x \neq 0$ в A Крулль следующим образом определил „на-

в 1948 г. П. Самюэлем (XXXVI) и, независимо от него, Лере и А. Картаном в исследованиях по алгебраической топологии. В упомянутой работе Крулль вовсе не использует топологического языка; однако примерно в 1928 г. (XXIX a) он доказал, что в нётеровом кольце A пересечение степеней любого идеала $\mathfrak{a}$ представляет собой множество таких $x \in A$, что $x(1-a)=0$ при некотором $a \in \mathfrak{a}$; отсюда легко получалось, что для любого идеала $\mathfrak{m}$ из A $\mathfrak{m}$-адическая топология кольца A индуцирует на произвольном идеале $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{m}$-адическую топологию; в работе 1938 г. Крулль дополнил этот результат, доказав, что в нётеровом локальном кольце любой идеал замкнут. Позднее эти теоремы были распространены Шевалле на нётеровы полулокальные кольца, а затем Зарисским на кольца, носящие его имя (XXXIII b). К Шевалле восходит также введение „линейной компактности" в топологических кольцах, а также определение структуры полных полулокальных колец (XXXII b).

Б) *Переход от локального случая к глобальному.* После Вейерштрасса вошло в привычку сопоставлять аналитической функции одной переменной (и, в частности, алгебраической функции) множество ее „разложений" во всех точках римановой поверхности, в которых она определена. Во введении к своей книге по теории чисел ((XVIII f), стр. V) Гензель аналогичным образом сопоставил каждому элементу поля k алгебраических чисел множество тех элементов, которые ему соответствуют в *пополнениях* поля k *по всем* абсолютным значениям на k[1]).

Можно сказать, именно эта процедура в современной Коммутативной алгебре заменила разложение идеала в произведение простых (которое в известном смысле можно рассматривать как продолжение исходной точки зрения Куммера). Замечание Гензеля неявно указывало на вложение поля k в *произведение* всех его пополнений; явным же образом это сделал Шевалле в 1936 г. своей теории „иделей" (XXXII a), в которой

чальные формы" элемента x: если j — такое наибольшее целое число, что $x \in \mathfrak{m}^j$, то начальными формами элемента x являются все однородные многочлены $P(X_1, \ldots, X_r)$ степени j с коэффициентами в поле вычетов $k = A/\mathfrak{m}$, удовлетворяющие условию $x \equiv P(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \pmod{\mathfrak{m}^{j+1}}$. Каждому идеалу $\mathfrak{a}$ кольца A Крулль сопоставил градуированный идеал кольца $k[X_1, \ldots, X_r]$, порожденный начальными формами всех элементов из $\mathfrak{a}$ („ведущий идеал"); эти два понятия играли у него роль ассоциированного градуированного кольца.

[1]) В качестве неультраметрических абсолютных значений на расширении K степени n поля $\mathbf{Q}$ Гензель брал функции $x \to |x^{(i)}|$ (где $x^{(i)}$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ — сопряженные с x элементы), которые широко использовались со времен Дирихле; Островский несколько позднее показал, что этими функциями исчерпываются все неультраметрические абсолютные значения на K.

были усовершенствованы аналогичные идеи, ранее высказывавшиеся Прюфером и фон Нейманом (последние ограничивались вложением поля k в произведении его $\mathfrak{p}$-адических пополнений [1]). И хотя это и выходит за пределы наших планов, нам важно упомянуть здесь о том, что благодаря топологии, введенной на группе иделей, к теории чисел оказалось возможным весьма эффективно применить всю технику локально-компактных групп (включая меру Хаара).

Что касается более общей ситуации, то теорема Крулля (XXIXb), описывающая целозамкнутые кольца как пересечение колец нормирования (это вновь приводит к вложению рассматриваемого кольца в произведение колец нормирования), зачастую облегчает изучение этих колец, хотя этот метод по-настоящему удобен лишь для существенных нормирований колец Крулля. У Крулля, впрочем, часто можно найти примеры (довольно элементарные) (XXIXe) применения метода „перехода от локального случая к глобальному", состоящего в доказательстве некоторого свойства какого-либо целостного кольца A посредством сведения к проверке его для „локализаций" $A_{\mathfrak{p}}$ кольца A по всем его простым идеалам [2]); совсем недавно Серр заметил, что этот метод применим к произвольным коммутативным кольцам A; он применим также к A-модулям и их гомоморфизмам и в большинстве случаев достаточно осуществлять „локализацию" лишь по максимальным идеалам кольца A (гл. II, § 3, теорема 1); эта точка зрения тесно примыкает к идеям теории „спектров" и пучков над этими спектрами (см. ниже стр. 678).

B) *Целые элементы и целое замыкание.* Мы видели, что понятие целого алгебраического числа, введенное сначала для числовых полей, уже Кронекером и Дедекиндом было перенесено на поле алгебраических функций, хоть в этом случае оно представлялось довольно искусственным (не соответствующим

---

[1]) В связи с этим замечанием Гензеля вошло в привычку называть (допуская непоследовательность в терминологии) неультраметрические абсолютные значения числового поля k „бесконечными точками" этого поля по аналогии с тем, как Дедекинд и Вебер определяли „бесконечно удаленные точки" римановой поверхности аффинной кривой (ср. стр. 666).

[2]) Когда говорят о „переходе от локального случая к глобальному", то часто имеют в виду гораздо более сложные вопросы, связанные с теорией полей классов, наиболее известные примеры которых помещены в работах Хассе ((XXVIa) и (XXVIb)) по квадратичным формам над полем алгебраических чисел k; среди прочего там показывается, что для разрешимости уравнения $f(x_1, \ldots, x_n) = a$ в k^n (f — квадратичная форма и $a \in k$), необходимо и достаточно, чтобы это уравнение имело решение во всех пополнениях поля k. По свидетельству Хассе, идею теорем такого типа ему подсказал его учитель Гензель (XXVIc). Распространение „принципа Хассе" на группы, отличные от ортогональной, является одной из задач современной теории „аделей" алгебраических групп.

никакому проективному понятию). Однако работа Э. Нётер 1927 г. и последовавшие за ней работы Крулля (начиная с 1931 г.) выявили тот интерес, который представляют эти понятия для изучения более общих колец [1]). Круллю, в частности, принадлежат теоремы о подъеме простых идеалов в целых алгебрах (XXIXc), а также обобщение теории групп разложения и инерции Дедекинда — Гильберта (XXXIXb). Что касается Э. Нётер, то ей принадлежит общая формулировка леммы о нормализации [2]) (откуда, в частности, следует теорема Гильберта о нулях), а также первый общий критерий (переформулировка классических рассуждений Кронекера и Дедекинда), позволяющий утверждать, что целое замыкание целостного кольца является *конечным* над этим кольцом.

Наконец, необходимо указать, что одна из причин, в силу которых понятие целозамкнутости кольца оказалось столь важным в настоящее время, связана с исследованиями Зарисского по теории алгебраических многообразий. Зарисский обнаружил, что „нормальные" многообразия (т. е. такие многообразия, локальные кольца которых целозамкнуты) отличаются весьма приятными свойствами и в первую очередь тем, что они не имеют „особенностей в коразмерности 1"; впоследствии было замечено, что аналогичные явления имеют место и в „аналитических пространствах". Поэтому „нормализация" (т. е. операция, состоящая в том, что для локальных колец некоторого многообразия берутся их целые замыкания) стала мощным орудием в арсенале современной алгебраической геометрии.

Г) *Изучение модулей и влияние гомологической алгебры.* Одной из ярких черт, присущих алгебраическим работам Э. Нётер и Крулля, является тенденция к „линеаризации", продолжающая аналогичное направление, намеченное в теории полей Дедекиндом и Штейницем; другими словами, идеалы прежде всего рассматриваются как *модули*, и к ним поэтому применимы все конструкции линейной алгебры (взятие фактормодуля, произведения, позднее — тензорного произведения, а также образование модуля гомоморфизмов), которые, вообще говоря, приводят к модулям, не являющимся идеалами. Было очень скоро замечено, что во многих вопросах (где речь к тому

[1]) Крулль и Э. Нётер ограничивались целостными кольцами, но расширение их методов на общий случай не представляет труда; наиболее интересной в этом направлении является работа И. Коэна и Зейденберга, распространяющая теоремы Крулля о подъеме и точно указывающая границы, в которых они справедливы (XXXV). Следует отметить, что Э. Нётер явно указывала на возможность таких обобщений в своей работе 1927 г. ((XXVb), стр. 30).

[2]) Частный случай был сформулирован еще Гильбертом в 1893 г. ((XVIb), стр. 316).

же идет не обязательно о коммутативных кольцах) не имеет смысла ограничиваться изучением лишь идеалов некоторого кольца A, а, напротив, следует формулировать наиболее общие теоремы для A-модулей (подчиненных в случае необходимости некоторым условиям конечности).

Вмешательство гомологической алгебры лишь усилило указанную тенденцию, так как эта ветвь алгебры занимается исключительно *линейными* по своей природе вопросами. Мы не собираемся здесь рассматривать ее историю; однако интересно отметить, что многие фундаментальные понятия гомологической алгебры (такие, как понятие проективного модуля и функтора Tor) возникли в связи с углубленным изучением поведения модулей над дедекиндовым кольцом относительно тензорного произведения; это исследование было проведено А. Картаном в 1948 г.

И наоборот, можно было предвидеть, что новые классы модулей, естественным образом введенные в гомологической алгебре как „универсальные аннуляторы" функторов Ext (проективные и инъективные модули) и функторов Tor (плоские модули), прольют новый свет на коммутативную алгебру. Случилось, однако, так, что наибольшее применение нашли модули проективные, а также плоские; важность этих последних связана прежде всего со следующим замечанием, впервые сделанным Серром (XXXVIII b): локализация и пополнение естественным образом приводят к плоским модулям, что „объясняет" гораздо более удовлетворительным образом уже известные свойства этих двух операций и значительно облегчает их исследование. Нужно сказать (мы увидим это в последующих главах), что приложения гомологической алгебры этим далеко еще не ограничиваются и что она играет все более и более важную роль в алгебраической геометрии.

Д) *Понятие спектра.* Оно является самым поздним среди новых понятий коммутативной алгебры и имеет сложную историю. Спектральная теорема Гильберта ввела упорядоченные множества ортогональных проекторов гильбертова пространства, образующие булеву алгебру (или, скорее, булеву решетку [1])), находящуюся во взаимно однозначном соответствии с некоторой *булевой решеткой* классов измеримых (по подходящей мере) подмножеств пространства $\mathbf{R}$. Несомненно, что эти более ранние работы об операторах в гильбертовом простран-

[1]) *Булева решетка* представляет собой решеточно-упорядоченное множество E, обладающее наименьшим элементом α и наибольшим элементом ω, где каждая из операций sup и inf *дистрибутивна* относительно другой и где для каждого $a \in E$ существует, и притом единственный, элемент $a' \in E$, такой, что $\inf(a, a') = \alpha$ и $\sup(a, a') = \omega$ (ср. Theorie des Ensemble, chap. III, 2e éd., § 1, exercice 17).

стве привели в 1935 г. Стоуна к общему исследованию булевых решеток, и в частности к поиску их „представлений" подмножествами некоторого множества (или классами подмножеств по некоторому отношению эквивалентности). Он заметил, что булева решетка становится *коммутативным кольцом* (впрочем, весьма частного типа), когда в ней определяют умножение формулой $xy = \inf(x, y)$, а сложение — формулой $x + y = \sup(\inf(x, y'), \inf(x', y))$. В частности, если исходить из булевой решетки $\mathfrak{P}(X)$ всех подмножеств *конечного* множества X, легко заметить, что элементы из X находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с *максимальными идеалами* соответствующего „булева" кольца; и Стоун получил свою общую теорему о представлении булевой решетки, рассматривая множество максимальных идеалов соответствующего кольца и сопоставляя каждому элементу булевой решетки множество максимальных идеалов, его содержащих (XXXa).

С другой стороны, классическим примером булевой решетки служит множество подмножеств топологического пространства, являющихся одновременно открытыми и замкнутыми. Во второй своей работе (XXX b) Стоун показал, что в действительности *любая* булева решетка изоморфна булевой решетке такого вида. Для этого, конечно, пришлось определить *топологию* на множестве максимальных идеалов „булева" кольца; сделать это очень просто, приняв в качестве замкнутых множеств множество максимальных идеалов, содержащих идеал $\mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a}$ пробегает множество всех идеалов.

Мы не говорим здесь о влиянии этих идей на Функциональный анализ, где они сыграли важную роль при рождении теории нормированных алгебр, развитой И. М. Гельфандом и его школой. Но в 1945 г. Джекобсон заметил (XXXIV), что процесс определения топологии, предложенный Стоуном, может быть на самом деле приложен к *любому* кольцу A (коммутативному или нет), если только в качестве множества рассматриваемых идеалов брать не совокупность максимальных, а множество „примитивных" двусторонних идеалов (т. е. таких двусторонних идеалов $\mathfrak{b}$, что $A/\mathfrak{b}$ является примитивным кольцом); в коммутативном кольце при этом подходе вновь получаются максимальные идеалы. Со своей стороны Зарисский в 1944 г. (XXXV a) воспользовался аналогичным методом для определения топологии на множестве *точек* поля алгебраических функций. Однако эти топологии оставались для большинства алгебраистов просто курьезом, ибо, как правило, они не отделимы, и вызывали довольно понятное чувство отвращения работать со столь необычными объектами. Это недоверие было развеяно лишь в 1952 г., когда А. Вейль показал, что любое алгебраическое многообразие может быть естественным образом на-

делено топологией типа топологии Зарисского и что эта топология позволяет определить, в полной аналогии со случаем дифференцируемых или аналитических многообразий, понятие *расслоенного пространства* (XXXVII); вскоре после этого у Серра появилась идея распространить на эти многообразия, указанным выше образом топологизированные, теорию *когерентных пучков*, благодаря чему в случае „абстрактных" многообразий топология Зарисского играет ту же роль, что и обычная топология в случае основного поля **C**, особенно если речь идет о применении методов Алгебраической топологии ((XXXVIII a) и (XXXVIIIb)).

С тех пор стало вполне естественным использовать этот геометрический язык в коммутативной алгебре. Вскоре было замечено, что рассмотрения максимальных идеалов, как правило, недостаточно для получения удобных формулировок[1]) и что понятием, отвечающим нужным требованиям, является понятие множества простых идеалов кольца, топологизированного тем же способом. С введением понятия спектра в наши дни появился словарь, позволяющий выразить любую теорему коммутативной алгебры на геометрическом языке, очень близком к языку алгебраической геометрии эпохи Вейля—Зарисского; это, впрочем, тотчас привело к значительному расширению рамок алгебраической геометрии, так что коммутативная алгебра с этой точки зрения представляет собой лишь самую элементарную часть алгебраической геометрии (XXXIX).

[1]) Неудобство в использовании „максимального спектра" проистекает из следующего обстоятельства: если $\varphi\colon A \to B$ — гомоморфизм колец и $\mathfrak{n}$ — максимальный идеал в B, то $\varphi^{-1}(\mathfrak{n})$ не обязательно максимальный идеал в A, тогда как для простого идеала $\mathfrak{p}$ в B идеал $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ прост в A. Поэтому в общем случае гомоморфизму φ нельзя естественным образом сопоставить отображение множества максимальных идеалов кольца B в множество максимальных идеалов кольца A.

БИБЛИОГРАФИЯ

(I) L. Euler, Vollständige Anleitung zur Algebra (=Opera Omnia (1), t. I, Leipzig — Berlin (Teubner), 1911).

(II) J. L. Lagrange, Oeuvres, 14 vol., Paris (Gauthier-Villars), 1867—1892.

(III) C. F. Gauss, Werke, 12 vol., Göttingen, 1870—1927.

(IV) P. G. Lejeune-Dirichlet, Werke, 2 vol., Berlin (Reimer), 1889—1897.

(IVbis) P. G. Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, 2te Aufl., Braunschweig (Vieweg), 1871.

(V) C. C. J. Jacobi, Gesammelte Werke, 7 vol., Berlin (Reimer), 1881—1891.

(VI) G. Eeisenstein: a) Beweis der Reciprocitätsgesetze für die cubischen Reste in der Theorie der aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzen Zahlen, *J. de Crelle*, **XXVII** (1844), 289—310; b) Zur Theorie der quadratischen Zerfällung der Primzahlen $8n+3$, $7n+2$ und $7n+4$, *J. de Crelle*, **XXXVII** (1848), 97—126; c) Über einige allgemeine Eigenschaften der Gleichung von welcher die Teilung der ganzen Lemniscate abhängt, nebst Anwendungen derselben auf die Zahlentheorie, *J. de Crelle*, **XXXIX** (1850), 160—179 et 224—287.

(VII) E. Kummer: a) Sur les nombres complexes qui sont formés avec les nombres entiers réels et les racines de l'unité, *J. de Math.*, (1), **XII** (1847), 185—212; b) Zur Theorie der complexen Zahlen, *J. de Crelle*, **XXXV** (1847), 319—326; c) Über die Zerlegung der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen in Primfactoren, *J. de Crelle*, **XXXV** (1847), 327—367; d) Mémoire sur les nombres complexes composés de racines de l'unité et des nombres entiers, *J. de Math.*, (1), **XVI** (1851), 377—498; e) Über die allgemeinen Reciprocitätsgesetze unter den Resten und Nichtresten der Potenzen deren Grad eine Primzahl ist (*Abh. der Kön. Akad. der Wiss. zu Berlin* (1859), Math. Abhandl., p. 19—159).

(VIII) C. Hermite, Oeuvres, 4 vol., Paris (Gauthier-Villars), 1905—1917.

(IX) L. Kronecker, Werke, 5 vol., Leipzig (Teubner), 1895—1930; a) De unitatibus complexis, vol. I, p. 5—71 (=Inaug. Diss., Berolini, 1845); b) Über die algebraisch auflösbaren Gleichungen I, vol. IV, p. 1—11 (=*Monatsber der Kön. Preuss. Akad. der Wiss.* (1853), p. 365—374); c) Über die elliptischen Functionen für welche complexe Multiplication stattfindet, vol. **IV**, p. 177—183 (=*Monatsber. der Kön. Preuss. Akad. der Wiss.* (1857), p. 455—460); d) Über die complexe Multiplication der elliptischen Functionen,

vol. IV, p. 207—217 (=*Monatsber. der Kön. Preuss. Akad. der Wiss.* (1862), p. 363—372); e) Über die Discriminante algebraischer Functionen der einer Variabeln, vol. II, p. 193—236 (=*J. de Crelle*, **XCI** (1881), 301—334); f) Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, vol. II, p. 237—387 (*J. de Crelle*, **XCII** (1882), 1—122).

(X) R. Dedekind, Gesammelte mathematische Werke, 3 vol., Braunschweig (Vieweg), 1932: a) Abriss einer Theorie der höheren Kongruenzen in bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus, vol. **I**, p. 40—66 (=*J. de Crelle*, **LIV** (1857), 1—26); b) Sur la Théorie des Nombres entiers algébriques, vol. **III**, p. 262—296 (=*Bull. Sci. Math.*, (1), **XI** (1876), 278—288 et (2), **I** (1877), 17—41, 69—92, 144—164, 207—248); c) Über die Anzahl der Ideal-Klassen in den verschiedenen Ordnungen eines endlichen Körpers, vol. **I**, p. 105—157 (=Festschrift der Technischen Hochschule in Braunschweig zur Säkularfeier des Geburtstages von C. F. Gauss Braunschweig, 1877, p. 1—55); d) Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideals und der Theorie der höheren Kongruenzen, vol. I, p. 202—230 (=*Abh. Kön. Ges. Wiss. zu Göttingen*, **XXIII** (1878), 1—23); e) Über die Diskriminanten endlicher Körper, vol. I, p. 351—396 (=*Abh. Kön. Ges. Wiss. zu Göttingen*, **XXIX** (1882), p. 1—56); f) Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen, vol. III, p. 1—222 (=Supplement XI von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie, 4, Aufl. (1894), p. 434—657); g) Zur Theorie der Ideale, vol. II, p. 43—48 (=Nachr. Göttingen, 1894, p. 272—277); h) Über eine Erweiterung des Symbols $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ in der Theorie der Moduln, vol. II, p. 59—85 (=Nachr. Göttingen, 1895, p. 183—208).

(Xbis) R. Dedekind—H. Weber, Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, *J. de Crelle*, **XCII** (1882), 181—290 (=R. Dedekind, Ges. Math. Werke, t. I, p. 238—349).

(XI) E. Selling, Über die idealen Primfactoren der complexen Zahlen, welche aus den Wurzeln einer beliebigen irreductiblen Gleichung rational gebildet sind, *Zeitschr. für Math. und Phys.*, **X** (1865), 17—47.

(XII) M. Noether, Über einen Satz aus der Theorie der algebraischen Funktionen, *Math. Ann.*, **VI** (1873), 351—359.

(XIII) A. Brill—M. Noether, Über algebraische Funktionen, *Math. Ann.*, **VII** (1874), 269—310.

(XIV) G. Zolotareff, Sur la théorie des nombres complexes, *J. de Math.*, (3), **VI** (1880), 51—84 et 129—166.

(XV) E. Netto, Zur Theorie der Elimination, *Acta Math.*, **VII** (1885), 101—104.

(XVI) D. Hilbert: a) Über die Theorie der algebraischen Formen, *Math. Ann.*, **XXXVI** (1890), 473—534; b) Über die vollen Invariantensysteme, *Math. Ann.*, **XLII** (1893), 313—373; c) Grundzüge einer Theorie des Galoischen Zahlkörpers, *Gött. Nachr.*, (1894), 224—236; d) Zahlbericht, Jahresber. der D. M. V., t. IV (1897), p. 175—546 (trad. francaise par A. Lévy et Th. Got sous le nom «Théorie des corps de nombres algébriques», Paris (Hermann), 1913).

(XVII) K. Weierstrass, Mathematische Werke, 7 vol., Berlin (Mayer und Müller), 1894—1927.

(XVIII) K. Hensel: a) Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen, Jahresber der D. M. V., t. VI (1899), p. 83—88; b) Über die Fundamentalgleichung und die ausserwesentlichen Diskriminantentheiler eines algebraischen Körpers, *Gött. Nachr.*, (1897), 254—260; c) Neue Grundlagen der Arithmetik, *J. de Crelle*, **CXXVII** (1902), 51—84; d) Über die arithmetische Eigenschaften der algebraischen und transzendenten Zahlen, Jahresber, der D. M. V., t. XIV (1905), p. 545—558; e) Über die arithmetischen Eigenschaften der Zahlen, Jahresber, der D. M. V., t. XVI (1907), p. 299—319, 388—393, 474—496; f) Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig (Teubner), 1908.

(XIX) E. Lasker, Zur Theorie der Moduln und Ideale, *Math. Ann.*, **LX** (1905), 20—116.

(XX) E. Steinitz: a) Algebraische Theorie der Körper, *J. de Crelle*, **CXXXVII** (1910), 167—308; b) Rechteckige Systeme und Moduln in algebraischen Zahlkörpern, *Math. Ann.*, **LXXI** (1912), 328—354 et **LXXII** (1912), 297—345.

(XXI) F. S. Macaulay, On the resolution of a given modular system into primary systems including some properties of Hilbert numbers, *Math. Ann.*, **LXXIV** (1913), 66—121.

(XXII) J. Kürschak, Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, *J. de Crelle*, **CXLII** (1913), 211—253.

(XXIII) A. Fraenkel, Über die Teiler der Null und die Zerlegung von Ringen, *J. de Crelle*, **CXLV** (1914), 139—176.

(XXIV) A. Ostrowski, Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\varphi(x)\cdot\varphi(y)=\varphi(x\cdot y)$, *Acta Math.*, **XLI** (1917), 271—284.

(XXV) E. Noether: a) Idealtheorie in Ringbereichen, *Math. Ann.*, **LXXXIII** (1921), 24—66; b) Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, *Math. Ann.*, **XCVI** (1927), 26—61.

(XXVI) H. Hasse: a) Über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratischen Formen im Körper der rationalen Zahlen, *J. de Crelle*, **CLII** (1923), 129—148; b) Über die Äquivalenz quadratischer Formen im Körper der rationalen Zahlen, *J. de Crelle*, **CLII** (1923), 205—224; c) Kurt Hensels entscheidender Anstoss zur Entdeckung des Lokal-Global-Prinzips, *J. de Crelle*, **CCIX** (1960), 3—4.

(XXVII) H. Jung, Algebraischen Flächen, Hannover (Helwing), 1925.

(XXVIII) H. Grell, Beziehungen zwischen den Idealen verschiedener Ringe, *Math. Ann.*, **XCVII** (1927), 490—523.

(XXIX) W. Krull: a) Primidealketten in allgemeine Ringbereichen, Sitz. Ber. Heidelberg Akad. Wiss., 1928; b) Allgemeine Bewertungstheorie, *J. de Crelle*, **CLXVII** (1931), 160—196; c) Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, III, *Math. Zeitschr.*, **XLII** (1937), p. 745—766; d) Dimensionstheorie in Stellenringen, *J. de Crelle*, **CLXXIX** (1938), 204—226; e) Idealtheorie, Berlin (Springer), 1935.

(XXX) M. H. Stone: a) The theory of representation for Boolean algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **XL** (1936), 37—111; b) Applications of the theory of Boolean rings to general topology, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **XLI** (1937), 375—481.

(XXXI) B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, t. II, Berlin (Springer), 1931. (Перевод: Ван-дер-Варден, Современная алгебра, т. 1 и 2, Гостехиздат, М.—Л., 1947.)

(XXXII) C. Chevalley: a) Généralisation de la théorie du corps de classes pour les extensions infinies, *J. de Math.*, (9), **XV** (1936), 359—371; b) On the theory of local rings, *Ann. of Math.*, **XLIV** (1943), 690—708.

(XXXIII) O. Zariski: a) The compactness of the Riemann manifold of an abstract field of algebraic functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **L** (1944), 683—691; b) Generalized semi-local rings, *Summa Bras. Math.*, **I** (1946), 169—195.

(XXXIV) N. Jacobson, A topology for the set of primitive ideals in an arbitrary ring, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **XXXI** (1945), 333—338.

(XXXV) I. Cohen—A. Seidenberg, Prime ideals and integral dependence, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **XII** (1946), 252—261.

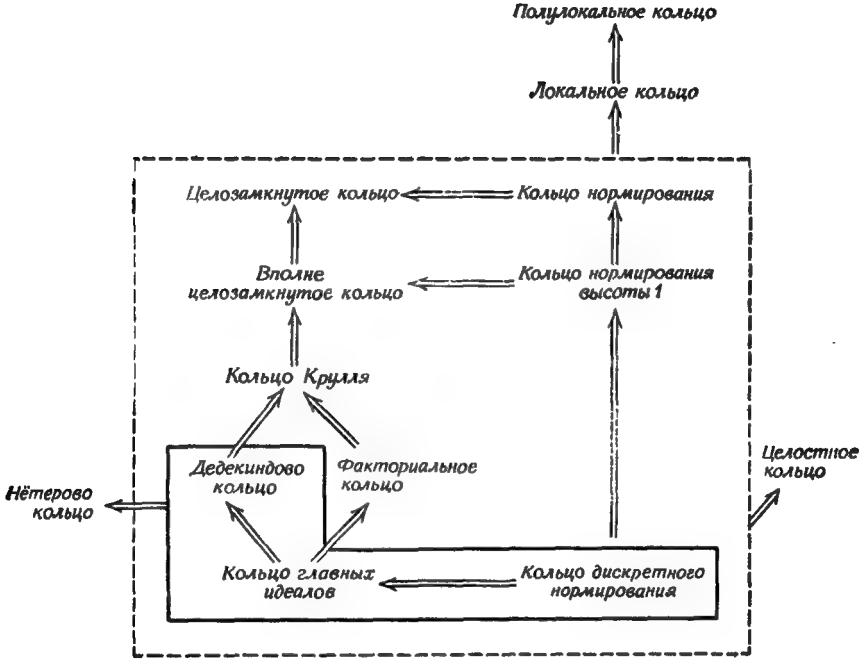
(XXXVI) P. Samuel, La notion de multiplicité en Algèbre et en Géométrie algébrique, *J. de Math.*, (9), **XXX** (1951), 159—274.

XXXVII A. Weil, Fibre-spaces in Algebraic Geometry (Notes bu A. Wallace), Chicago Univ., 1952.

(XXXVIII) J. P. Serre: a) Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. of Math.*, **LXI** (1955), 197—278; b) Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier*, **VI** (1956), 1—42.

(XXXIX) A. Grothendieck, Eléments de géométrie algébrique, Publ. math. Inst. Htes. Et. Scient., 1960.

СХЕМА ЗАВИСИМОСТИ ПОНЯТИЙ



В случае нётеровых колец эта таблица сводится к следующей:

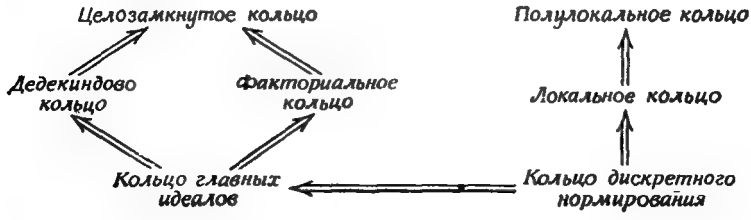


ТАБЛИЦА УСТОЙЧИВОСТИ СВОЙСТВ. I

В этой и следующей таблице каждая строка соответствует некоторому свойству, которым может обладать кольцо, а каждый столбец — кольцу, полученному из кольца A ($\mathfrak{p}$ означает простой идеал в A, S — мультипликативную систему в A, не содержащую 0, и A' — целое замыкание кольца A в некотором расширении L конечной степени поля частных K кольца A). Предполагается, что кольцо A обладает свойством, которое указано в строке; слово «ДА» (соответственно «НЕТ», «?»), стоящее на пересечении этой строки и какого-либо столбца, означает, что любое кольцо, построенное из A способом, указанным в столбце, обладает (соответственно не обладает, не установлено, обладает ли) свойством, указанным в строке.

Ссылки относятся к этой книге или к *Алгебре*, где доказаны упоминаемые результаты, а также к двум следующим работам, когда речь идет о результатах, не упоминающихся ни в данном тексте, ни в упражнениях:

(1) Grothendiek A., Eléments de géométrie algébrique, chap. IV, Publ. Inst. Hotes Etudes Scient., n° 20 et 24, 1964.

(2) Nagata M., Local rings, Interscience, New York, 1962.

	$A/\mathfrak{p}$	$S^{-1}A$	$A[X]$	$A[[X]]$	A'
A — кольцо главных идеалов	ДА	ДА	НЕТ *Алгебра*, гл. VII, § 1, упр. 1	НЕТ	НЕТ *Алгебра*, гл. VII, § 1, упр. 12
A — дедекиндово кольцо	ДА	ДА	НЕТ *Алгебра*, гл. VII, § 1, упр. 1	НЕТ гл. VII, § 1, упр. 9	ДА гл. VII, § 2, следствие 2, предл. 6
A — факториальное кольцо	НЕТ гл. V, § 1, упр. 9	ДА гл. VII, § 3, предл. 3	ДА гл. VII, § 3, теор. 2	НЕТ гл. VII, § 3, упр. 9	НЕТ *Алгебра*, гл. VII, § 1, упр. 12
A — нётерово целозамкнутое кольцо	НЕТ гл. V, § 1, упр. 9	ДА гл. V, § 1, следствие 1 из предл. 13	ДА гл. V, § 1, следствие 1 из предл. 13	ДА гл. V, § 1, предл. 14	? (ДА, если L сепарабельно, гл. V, § 1, следствие из предл. 18)
A — поле или кольцо дискретного нормирования	ДА гл. VI, § 3 n° 6	ДА гл. VI, § 3, n° 6	НЕТ *Алгебра*, гл. VII, § 1, упр. 1	НЕТ гл. VII, § 1, упр. 9	НЕТ гл. V, § 2, упр. 6
A — поле или кольцо нормирования высоты 1	ДА гл. VI, § 4	ДА гл. VI, § 4, предл. 1	НЕТ *Алгебра*, гл. VII, § 1, упр. 1	НЕТ гл. VII, § 1, упр. 9	НЕТ гл. V, § 2, упр. 6

Продолжение

	$A/\mathfrak{p}$	$S^{-1}A$	$A[X]$	$A[[X]]$	A'
A — кольцо нормирования	ДА гл. VI, § 1, теорема 1	ДА гл. VI, § 1, теорема 1	НЕТ *Алгебра*, гл. VII, § 1, упр. 1	НЕТ гл. VII, § 1, упр. 9	НЕТ гл. V, § 2, упр. 6
A — полное кольцо нормирования	ДА гл. VI, § 5, предл. 1	ДА гл. VI, § 7, предл. 3	НЕТ *Алгебра*, гл. VII, § 1, упр. 1	НЕТ гл. VII, § 1, упр. 9	НЕТ гл. V, § 2, упр. 6
A — кольцо Крулля	НЕТ гл. V, § 1, упр. 9	ДА гл. VII, § 1, предл. 6	ДА гл. VII, § 1, предл. 13	ДА гл. VII, § 1, упр. 9	ДА гл. VII, § 1, предл. 12

ТАБЛИЦА УСТОЙЧИВОСТИ СВОЙСТВ. II

В этой таблице через a обозначается идеал кольца, отличный от A, через S — мультипликативная система в A и через A' — целое замыкание кольца A, когда последнее является целостным кольцом.

	A/a	$S^{-1}A$	$A[X]$	$A[[X]]$	A'
A — локальное кольцо	ДА	НЕТ гл. II, § 2, предл. 11	НЕТ	ДА *Алгебра*, гл. IV, § 5, предл. 4	НЕТ гл. V, § 2, упр. 20
A — полное локальное кольцо	? ДА, если A — нётерово (гл. III, § 3, предл. 6)	НЕТ гл. II, § 2, предл. 11	НЕТ	ДА гл. III, § 2, предл. 6	? ДА, если H — нётерово (1)
A — полулокальное кольцо	ДА	НЕТ гл. IV, § 2, упр. 23в)	НЕТ	ДА *Алгебра*, гл. IV, § 5, предл. 4	? ДА, если A — нётерово, гл. V, § 2, упр. 7
A — полулокальное полное кольцо	? ДА, если A — нётерово (гл. III, § 3, предл. 6)	НЕТ гл. IV, § 2, упр. 23в)	НЕТ	ДА гл. III, § 2, предл. 6	
A — нётерово кольцо	ДА *Алгебра*, гл. VIII, § 2, предл. 6	ДА следствие 2 из предл. 10	ДА гл. III, § 2, следствие 1 из теоремы 2	ДА гл. III, § 2, следствие 6 из теоремы	НЕТ гл. V, § 1, упр. 21 ДА, если A — полное и локальное (1) A' в любом случае является кольцом Крулля (2)

ТАБЛИЦА УСТОЙЧИВОСТИ СВОЙСТВ ПРИ ПОПОЛНЕНИИ

а) Пусть A — кольцо и $\mathfrak{m}$ — некоторый идеал в нем, отличный от самого A. Наделим A $\mathfrak{m}$-адической топологией и обозначим через $\hat{A}$ отделимое пополнение данного кольца.

	$\hat{A}$
A отделимо	ДА
A нётерово	ДА (гл. III, § 3, предл. 8)
A локальное	ДА (гл. III, § 2, предл. 19)
A полулокальное	ДА (гл. III, § 2, следствие из предл. 19)
A — кольцо Зарисского	ДА (гл. III, § 3, предл. 8)

б) Предположим теперь, что кольцо A локально и нётерово и что $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал.

	$\hat{A}$
A целостное	НЕТ (гл. III, § 3, упр. 15б)
A целозамкнуто	НЕТ (2) ДА для исключительных колец (1)
A — кольцо дискретного нормирования	ДА (гл. VI, § 5, предл. 5)
A редуцированное	НЕТ (2) ДА для исключительных колец (1)

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Цифры, указанные в ссылках, последовательно обозначают номер главы, номер параграфа, номер пункта (или, в отдельных случаях, номер упражнения) и номер страницы.

1_E (E — множество), $U \cdot V$, UV (U, V — аддитивные подгруппы), $\mathfrak{a}^0$ ($\mathfrak{a}$ — идеал) — соглашения, предшествующие гл. I				11
$E:F$	I	2	10	40
$A[S^{-1}]$, a/s (A — кольцо, S — подмножество в A, s — произведение элементов из S)	II	2	1	76 и 77
i_A^S	II	2	1	77
$S^{-1}A$, $A_\mathfrak{p}$ (S — мультипликативная система, $\mathfrak{p}$ — простой идеал)	II	2	1	79 и 80
$M[S^{-1}]$, m/s, i_M^S (M — некоторый A-модуль, S — подмножество в A, $m \in M$, s — произведение элементов из S)	II	2	2	81
$S^{-1}M$, $M_\mathfrak{p}$ (M — некоторый A-модуль, S — мультипликативная система в A, $\mathfrak{p}$ — простой идеал в A)	II	2	2	81
$S^{-1}u$, $u_\mathfrak{p}$ (u — гомоморфизм A — модулей)	II	2	2	84
$r(\mathfrak{a})$ ($\mathfrak{a}$ — идеал)	II	2	6	96
$V(M)$, $V(f)$ (M — подмножество кольца A, $f \in A$)	II	4	3	140
Spec (A)	II	4	3	141
X_f ($f \in A$, $X = \mathrm{Spec}(A)$)	II	4	3	141
$\mathfrak{I}(Y)$ (Y — подмножество в Spec (A))	II	4	3	141
${}^a h$ (h — гомоморфизм колец)	II	4	3	144
Supp (M) (M — некоторый A-модуль)	II	4	4	148
A_f, M_f, u_f (A — кольцо, M — некоторый A-модуль, u — некоторый A-гомоморфизм, $f \in A$)	II	5	1	157
$\mathrm{rg}_\mathfrak{p}(P)$ (P — проективный модуль)	II	5	3	161
rg (P) (P — проективный модуль)	II	5	3	162
$\mathbf{P}(A)$, cl (M) (A — кольцо, M — проективный A-модуль ранга 1)	II	5	4	165
$\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}(A)$	II	5	7	170
det (u), χ_u (u — эндоморфизм проективного модуля ранга n)	II	5	упр. 9	173

$A^{(d)}$, $M^{(d,\ k)}$, $M^{(d)}$ (A — градуированное кольцо, M — градуированный A-модуль)	III	1	3	182
$A_{(\mathfrak{p})}$, $M_{(\mathfrak{p})}$ (A — градуированное кольцо, $\mathfrak{p}$ — простой градуированный идеал из A, M — градуированный A-модуль)	III	1	4	187
$\mathrm{gr}_n(G)$, $\mathrm{gr}(G)$ (G — фильтрованная группа)	III	2	3	194
$\mathrm{gr}(h)$ (h — гомоморфизм, согласованный с фильтрациями)	III	2	4	198
$\mathbf{Z}_n$ (n — целое число >1)	III	2	12	226
$\hat{\mathbf{Z}}$	III	2	13	228
$A\{X_1, \ldots, X_p\}$ (A — линейно топологизированное кольцо)	III	4	2	271
$f(b_1, \ldots, b_p)$ (f — ограниченный формальный ряд)	III	4	2	274
$\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$, $M_{\mathbf{f}}$, $M_{\mathbf{f}}(\mathbf{X})$, $J_{\mathbf{f}}$, $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{X})$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{1}_n$ ($\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ — системы формальных рядов, $\mathbf{g}$ — система без свободного члена)	III	4	4	279
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{f}$ — система формальных рядов, $\mathbf{x}$ — система топологически нильпотентных элементов)	III	4	5	282
$\mathfrak{m}^{\times n}$ ($\mathfrak{m}$ — идеал)	III	4	5	282
$\mathrm{Ass}_A(M)$, $\mathrm{Ass}(M)$ (M — некоторый A-модуль)	IV	1	1	300
$\mathrm{Ass}_f(M)$	IV	1	упр. 17	310
$A^{\mathcal{G}}$ (A — алгебра, $\mathcal{G}$ действует на A)	V	1	9	368
$\mathcal{G}^Z(\mathfrak{p}')$, $\mathcal{G}^Z$, $A^Z(\mathfrak{p}')$, A^Z ($\mathcal{G}$ — группа, действующая на кольце A', $\mathfrak{p}'$ — простой идеал в A')	V	2	2	383
$\mathcal{G}^T(\mathfrak{p}')$, $\mathcal{G}^T$, $A^T(\mathfrak{p}')$, A^T ($\mathcal{G}$ — группа, действующая на кольце A', $\mathfrak{p}'$ — простой идеал в A')	V	2	2	383
$K^Z(\mathfrak{p}')$, K^Z, $K^T(\mathfrak{p}')$, K^T (K — поле частных целозамкнутого кольца A, $\mathfrak{p}'$ — простой идеал в целом замыкании кольца A в некотором расширении типа Галуа поля K)	V	2	3	398
$Y^{\mathbf{p}}$ (где $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, а p_i — целые числа $\geqslant 0$	V	3	1	410
$\mathfrak{m}(A)$, $\kappa(A)$, $U(A)$ (A — локальное кольцо) — соглашения, предшествующие гл. VI				424
$\tilde{K}$, ∞	VI	2	2	435
$+\infty$	VI	3	1	441
Γ_A, v_A	VI	3	2	444
$\mathfrak{a}(M)$ (M — мажорное множество)	VI	3	5	449
$h(G)$ (G — совершенно упорядоченная группа)	VI	4	4	459
$\mathcal{T}_v$ (v — нормирование)	VI	5	2	469
$e(v'/v)$, $e(A'/A)$, $e(L/K)$	VI	8	1	494
$f(v'/v$, $f(A'/A)$, $f(L/K)$	VI	8	1	494
$\mathfrak{e}(G, H)$ (G — совершенно упорядоченная группа, H — подгруппа конечного индекса в G)	VI	8	4	502
$\mathfrak{e}(v'/v)$ (v — нормирование, v' — продолжение v)	VI	8	4	503
$\mathrm{mod}(x)$, $\mathrm{mod}_K(x)$ (K — неднскретное локально компактное поле, $x \in K$)	VI	9	1	521
$r(G)$ (рациональный ранг коммутативной группы)	VI	10	2	531
$d(K'/K)$, $s(v'/v)$, $r(v'/v)$ (v — нормирование на K, v' — продолжение v на некоторое трансцендентное расширение K' поля K)	VI	10	3	533

$I(A)$, $D(A)$ (A — область целостности)	VII	1	1	537	и 538
$\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, $\operatorname{div}(\mathfrak{a})$, $\operatorname{div}(x)$ ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — дробные идеалы, x — элемент поля частных)	VII	1	1	538	
$\tilde{\mathfrak{a}}$ ($\mathfrak{a}$ — дробный идеал)	VII	1	1	538	
$d_1 \leqslant d_2$ (d_1, d_2 — дивизоры)	VII	1	1	538	
$\mathfrak{b} : \mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — дробные идеалы)	VII	1	1	538	
$J(A)$ (A — область целостности)	VII	1	2	542	
$P(A)$ (A — кольцо Крулля)	VII	1	3	544	
$\mathfrak{p}^{(n)}$ ($\mathfrak{p}$ — дивизорнальный простой идеал)	VII	1	4	548	
$v_{\mathfrak{p}}$ ($\mathfrak{p}$ — простой идеал высоты 1 в кольце Крулля)	VII	1	10	555	
$F(A)$, $C(A)$ (A — кольцо Крулля)	VII	1	10	555	
$e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ ($\mathfrak{p} \in P(A)$, $\mathfrak{P} \in P(B)$, A, B — кольца Крулля, $A \subset B$, $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$)	VII	1	10	556	
i (гомоморфизм из $D(A)$ в $D(B)$ или из $C(A)$ в $C(B)$)	VII	1	10	558	
$\bar{i}$ (гомоморфизм из $C(A)$ в $C(B)$)	VII	1	10	558	
A, A_0, $\Delta(K)$ (кольца ограниченных аделей)	VII	2	4	574	и 575
$\mathfrak{P}^*$, $\mathfrak{P}^*(A)$ (A — область целостности)	VII	3	2	589	
M^* (решетка, двойственная решетке M)	VII	4	2	612	
$l_{\mathfrak{p}}(T)$, $\chi(T)$ (T — некоторый A-модуль кручения, $\mathfrak{p}$ — простой идеал высоты 1)	VII	4	5	624	
$\boldsymbol{F}(A)$, $\boldsymbol{T}(A)$, $\mathrm{cl}(M)$	VII	4	5	625	
$\chi(M, M')$ (M, M' — решетки)	VII	4	6	627	
$c(d)$ (d — дивизор)	VII	4	7	628	
$c(M)$, $r(M)$, $\gamma(M)$ (M — решетка)	VII	4	7	632	
$\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$, $e_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}}$, $f_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}}$, $f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ (A, B — кольца Крулля, причем B является конечной A-алгеброй, $\mathfrak{p} \in P(A)$, $\mathfrak{P} \in P(B)$, $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$)	VII	4	8	633	
$N_{B/A}$, $i_{B/A}$	VII	4	8	634	

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

Цифры, указанные вслед за терминами, означают соответственно номер главы, параграфа, пункта (или упражнения) и страницы.

Абсолютно плоское кольцо	I	2	упр. 17	49
Абсолютное значение	VI	6	1	476
— — ультраметрическое	VI	6	2	478
Адель ограниченный	VII	2	4	574
— — главный	VII	2	4	575
Алгебра Адзумайя	II	5	упр. 14	176
— конечного типа	III	1	1	180
— целая над кольцом	V	1	1	346
Алгебраически зависимые элементы	III	1	1	179
— замкнутое поле в алгебре	V	1	2	350
— независимые элементы	III	1	1	179
— свободное семейство	III	1	1	179
— связанное семейство	III	1	1	179
Алгебраический тороидальный сопряженный модуль	VI	5	упр. 9	474
Алгебранческое замыкание поля (в алгебре)	V	1	2	350
— целое число	V	1	1	346
Аппроксимация абсолютных значений	VI	7	3	492
Артина — Рисса лемма	III	3	1	244
Ассоцнированная с градуировкой фильтрация	III	2	1	190
Ассоциированное с градуированным кольцом фильтрованное кольцо	III	2	1	190
Ассоциированные кольца, точкн и нормирования	VI	3	3	446
Ассоцнированный с градуированным модулем фильтрованный модуль	III	2	1	191
— — модулем простой идеал	IV	1	1	300
Безу кольцо	VII	1	упр. 20	565
Ветвлення индекс	VI	8	1	494
Взаимно простые идеалы	II	1	2	69
Вложенный простой идеал	IV	2	3	317
Возрастающая фильтрация	III	2	1	189
Вполне целозамкнутое кольцо	V	1	4	355
Высота нормнрования	VI	4	4	459
— упорядоченной группы	VI	4	4	459
Вычетов поле	II	3	1	114
— ранг	VI	8	5	508
— степень	VI	8	1	494
Гаусса лемма	VII	3	5	590
Гауссовы целые числа	V	1	1	346

Гельфанда — Мазура теорема	VI	6	4	481
Гензелево кольцо	III	4	упр. 3	289
Геизеля теорема	III	4	3	275
— условия	III	4	5	280
Главиый дивизор кольца	VII	1	1	538
— ограниченный адель	VII	2	4	575
Гомоморфизм локальный	II	3	1	114
— псевдобиективный	VII	4	4	620
— псевдоинъективный	VII	4	4	620
— псевдонулевой	VII	4	4	620
— псевдосюръектнвный	VII	4	4	620
— согласованный с фильтрациями	III	2	4	198
Градуированная группа, ассоцнированная с фильтрованной группой	III	2	3	194
Градуированное кольцо, ассоциированное с фильтрованным кольцом	III	2	3	194
Градуированный идеал существенный	III	1	4	185
— модуль, ассоциированный с фильтрованным модулем	III	2	3	195
Группа, действующая на кольце	V	1	9	368
— значений нормирования	VI	3	2	444
— инерции	V	2	2	383
— классов обратимых модулей	II	5	7	170
— операторов локально конечная	V	1	9	368
— порядков	VI	3	2	444
— разложения	V	2	2	383
— упорядоченная высоты n	VI	4	4	459
— фильтрованная	III	2	1	189
Дедекиндово кольцо	VII	2	1	570
Детерминант эндоморфнзма проективного модуля	II	5	упр. 9	173
Детерминантный дивизор	VII	4	упр. 11	647
— идеал	VII	4	упр. 14	648
Джекобсона кольцо	V	3	4	417
Диаграмма змеевидная	I	1	4	15
— коммутативная	I	1	2	13
Дивизор детерминантный	VII	4	упр. 11	647
— кольца	VII	1	1	538
— — главный	VII	1	1	538
— конечного типа	VII	1	упр. 11	562
Дивизориальный дробный идеал	VII	1	1	538
Дивизоры эквивалентные	VII	1	2	541
Дискретная фильтрацня	III	2	5	200
Дискретное нормированне	VI	3	6	450
Доминирующее над локальным кольцом локальное кольцо	VI	1	1	424
Дробный идеал	VII	1	1	537
— — дивизориальный	VII	1	1	538
Евклндово упорядоченное поле	VI	2	упр. 4	440
Зарисского кольцо	III	3	3	250
— основная теорема	V	3	упр. 7	422
— топология	II	4	3	141
Змеевидная диаграмма	I	1	4	15
Значение абсолютное	VI	6	1	476

Идеал градуированный существенный	III	1	4	185
— детерминантный	VII	4	упр. 14	648
— дробный	VII	1	1	537
— лежащий над идеалом	V	2	1	377
— неразветвленный	V	2	упр. 18 и 19	406
— нормирования	VI	3	2	444
— обратимый дробный	II	5	7	172
— определения топологии	III	3	2	249
— примарный	IV	2	1	311
— простой	II	1	1	67
— — высоты $\leqslant 1$	VII	1	6	550
— — минимальный	II	2	6	95
— точки	VI	2	3	437
— целый	VII	1	1	537
Идеала корень	II	2	6	94
— радикал	II	2	6	94
Идеально отделимый модуль	III	5	1	291
Идеалы взаимно простые	II	1	2	69
Изолированная подгруппа	VI	4	2	456
Инвариантные множители решетки	VII	4	упр. 14	648
Индекс ветвления	VI	8	1	494
— начальный подгруппы упорядоченной группы	VI	8	4	502
Индуцированная фильтрация	III	2	1	192
Инерции группа	V	2	2	383
— кольцо	V	2	2	383
— поле	V	2	2	398
Исчерпывающая фильтрация	III	2	1	189
Канонический гомоморфизм группы разложения простого идеала $\mathfrak{P}'$ кольца A' в группу автоморфизмов кольца $A'/\mathfrak{P}'$	V	2	2	384
Каноническое разложение нормирования	VI	3	2	445
— разложение точки	VI	2	3	437
Класс дивизоров, связанный с модулем	VII	4	7	629
Классов дивизоров моноид	VII	1	2	541
Когерентное кольцо (слева, справа)	I	2	упр. 12	47
Когерентный модуль	I	2	упр. 11	47
Кольца локальные родственные	VI	1	упр. 1	431
— нормирования независимые	VII	7	2	484
Кольцо абсолютно плоское	I	2	упр. 17	49
— Безу	VII	1	упр. 19	565
— вполне целозамкнутое	V	1	4	355
— гензелево	III	4	упр. 3	289
— дедекиндово	VII	2	1	570
— Джекобсона	V	3	4	417
— Зарисского	III	3	3	250
— инерции	V	2	2	383
— когерентное (слева, справа)	I	2	упр. 12	47
— Крулля	VII	1	3	543
— линейно топологизированное	III	4	2	271
— локальное	II	3	1	114
— неразветвленное	V	2	упр. 19	408
— нормирования	VI	1	2	427
— нормирования поля	VI	1	2	427
— паранормированное	VI	1	упр. 8	433
— полулокальное	II	3	5	129

Кольцо прюферово	VII	2	упр. 12	583
— псевдоглавное	VII	1	упр. 19	565
— псевдопрюферово	VII	2	упр. 19	585
— разложения	V	2	2	383
— регулярно целозамкнутое	VII	1	упр. 30	569
— редуцированное	II	2	6	97
— точкн	VI	2	3	437
— факториальное	VII	3	1	586
— фильтрованное	III	2	1	190
— целозамкнутое	V	1	2	350
— — конечного характера	VII	1	упр. 26	567
— целонётерово	V	3	упр. 6	422
— частных	II	2	1	76
— — полное	II	2	1	77
Коммутативная диаграмма	I	1	2	13
Компонента неприводимая	II	4	1	136
Кондуктор	I	2	10	41
Кондуктор подкольца	V	1	5	359
Конечная в элементе точка	VI	2	2	436
— свободная резольвента	VII	4	7	631
Конечно представимый модуль	I	2	8	35
Конечного типа алгебра	III	1	1	180
— — дивизор	VII	1	упр. 11	562
Корень идеала	II	2	6	94
Кошн тождество	VII	3	упр. 18	603
Критерий неприводимостн Эйзенштейна	VII	3	упр. 20	603
Крулля кольцо	VII	1	3	543
Крулля — Акидзуки теорема	VII	2	5	578
Крулля теорема	III	3	2	247
Ласкеров модуль	IV	2	упр. 23	334
Лемма Артина — Рисса	III	3	1	244
Лемма Гаусса	VII	3	5	590
— о нормализации	V	3	1	408
Линейная топология	II	2	упр. 16	105 и
	III	2	упр. 14	234
Локальное кольцо, домннирующее над другим локальным кольцом	VI	1	1	424
Локально конечная группа операторов	V	1	9	368
Локальные кольца родственные	VI	1	упр. 1	431
Линейно топологизированное кольцо	III	4	2	271
— топологизнрованный модуль	III	2	упр. 14	234
Локальное кольцо	II	3	1	114
— — некоторого кольца в простом идеале	II	3	1	115
— — простого идеала	II	3	1	115
Локальный гомоморфизм	II	3	1	114
Мажорное подмножество	VI	3	5	449
Минимальный простой идеал	II	2	6	95
Многоугольник Ньютона	VI	4	упр. 11	466
Многочлен отмеченный	VII	3	8	595
Множество мультнпликативное	II	2	1	74
— неприводимое	II	4	1	135
Модуль идеально отделимый	III	5	1	291
— когеритный	I	2	упр. 11	47
— конечно представимый	I	2	8	35

Модуль ласкеров	IV	2	упр. 23	334
— линейно топологизированный	III	2	упр. 14	234
— плоский	I	2	3	27
— — относительно модуля M (M-плоский модуль)	I	2	2	23
— псевдокогерентный	I	2	упр. 11	47
— псевдонулевой	VII	4	4	620
— строго плоский	I	3	1	53
— частных	II	2	2	81
— чистый	I	2	упр. 24	50
Модуля кручения содержание	VII	4	5	624
— носитель	II	4	4	148
Моноид классов дивизоров	VII	1	2	541
Морфизм не всюду определенного закона композиции	VI	2	1	434
Мультипликативная система	II	2	1	75
— насыщенная	II	2	упр. 1	102
Мультипликативное множество	II	2	1	74
$\mathfrak{m}$-адическая топология	III	2	5	202
— фильтрация	III	2	1	191
— $\mathfrak{m}$-хорошая фильтрация	III	3	1	243
Насыщение подмодуля	II	2	4	90
Насыщенная мультипликативная система	II	2	упр. 1	102
Насыщенный подмодуль	II	2	4	90
Начальный индекс ветвления нормирования	VI	8	4	502
— — подгруппы упорядоченной группы	VI	8	4	502
Невырожденный подмодуль	II	5	5	166
Независимые кольца нормирования	VI	7	2	489
— нормирования	VI	7	2	489
Непрерывное отображение, ассоциированное с гомоморфизмом колец	II	4	3	144
Неприводимая компонента	II	4	1	136
Неприводимое множество	II	4	1	135
— пространство	II	4	1	134
Неразветвленное кольцо	V	2	упр. 19	408
— нормирование	VI	8	1	494
Неразветвленный идеал	V	2	упр. 18 и 19	406
Несобственное нормирование	VI	3	1	442
Нётерово пространство	II	4	2	138
Нильрадикал	II	2	6	94
Нормирование	VI	3	1	442
— дискретное	VI	3	6	450
— неразветвленное	VI	8	1	494
— несобственное	VI	3	1	442
— существенное	VII	1	4	546
— элемента (=порядок элемента относительно нормирования)	VI	3	2	444
Нормирования кольцо	VI	1	2	427
— начальный индекс ветвления	VI	8	4	502
— независимые	VI	7	2	489
— высота	VI	4	4	459
— эквивалентные	VI	3	2	444
Нормированное дискретное нормирование	VI	3	6	450
Носитель модуля	II	4	4	148
Нуль идеала	V	3	3	416
Ньютона многоугольник	VI	4	упр. 11	466
$\mathfrak{n}$-адические целые числа	III	2	12	226

Обратимый дробный идеал	II	5	7	172
— подмодуль	II	5	6	168
Общая точка	II	4	упр. 1	151
Ограниченный адель	VII	2	4	574
Основная теорема Зарисского	V	3	упр. 7	422
Островского теорема	VI	6	4	485
Отделимая фильтрация	III	2	1	189
Отмеченный многочлен	VII	2	8	595
Относительный инварнант двух решеток	VII	4	6	627
Пара колец, обладающая свойством линейного расширения	I	3	7	61
Паранормированное кольцо	VI	1	упр. 8	433
Плоский модуль	I	2	3	27
Подготовительная теорема	VII	3	8	596
Подгруппа изолированная	VI	4	2	456
Подмодуль насыщенный	II	2	4	90
— невырожденный	II	5	5	166
— обратимый	II	5	6	168
— $\mathfrak{p}$-примарный	IV	2	1	311
— сильно ласкеров	IV	2	упр. 28	336
— — примарный	IV	2	упр. 27	336
Поле алгебраически замкнутое в алгебре	V	1	2	350
— вычетов	II	3	1	114
— — нормирования	VI	3	2	444
— — точки	VI	2	3	437
— инерции	V	2	2	398
— значений точки	VI	2	2	436
— проективное	VI	2	2	435
— разложения	V	2	2	398
— упорядоченное евклидово	VI	2	упр. 4	440
Полная система продолжений нормирования	VI	8	2	496
Полное кольцо частных	II	2	1	77
— разложение простого идеала	V	2	2	391
Полулокальное кольцо	II	3	5	129
Порядка функция	III	2	2	193
Порядок ряда редуцированный	VII	3	8	593
— элемента относительно нормирования (=нормирование элемента)	VI	3	1	444
Почти нильпотентный эндоморфизм	VI	1	1	306
Представление длины n (=n-представление)	I	2	упр. 6	45
Примарное разложение	IV	2	2	313
— — редуцированное	IV	2	3	314
Примарный идеал	IV	2	1	311
Принцип нётеровой индукции	II	4	2	139
Проективное поле	VI	2	2	435
Проективный модуль ранга n	II	5	3	161
Произведение фильтраций	III	2	1	192
Простой вполне распадающийся идеал	V	2	2	391
— идеал	II	1	1	67
— — ассоциированный с модулем	IV	1	1	300
— — вложенный	IV	2	3	317
— — высоты $\leqslant 1$	VII	1	6	550
— — минимальный	II	2	6	95
— спектр кольца	II	4	3	141
Пространство неприводимое	II	4	1	134
— нётерово	II	4	2	138

Прюферово кольцо	VII	2	упр. 12	583
Псевдобезу-кольцо	VII	1	упр. 21	565
Псевдобиективный гомоморфизм	VII	4	4	620
Псевдоглавное кольцо	VII	1	упр. 21	565
Псевдоизоморфизм	VII	4	4	620
Псевдоинъективный гомоморфизм	VII	4	4	620
Псевдокогерентный модуль	I	2	упр. 11	47
Псевдонулевой гомоморфизм	VII	4	4	620
— модуль	VII	4	4	620
Псевдопрюферово кольцо	VII	2	упр. 19	585
Псевдосюръективный гомоморфизм	VII	4	4	620
$\mathfrak{p}$-примарный идеал	VI	2	1	311
— подмодуль	IV	2	1	311
Радикал идеала	II	2	6	94
Разложенне идеала на простые множители в дедекиндовом кольце	VII	2	3	573
— примарное	IV	2	2	313
— простого идеала полное	V	2	2	391
— точки каноническое	VI	2	3	437
Разложения группа	V	2	2	383
— кольцо	V	2	2	383
— поле	V	2	2	398
Раиг вычетов	VI	8	5	508
— вычетов нормировання	VI	8	5	508
— рациональный коммутативной группы	VI	10	2	530
— проективного модуля	II	5	3	161
— — — в простом идеале	II	5	3	161
Расширение типа Галуа	V	2	2	385
Рациональный ранг коммутатнвной группы	VI	10	2	530
Регулярно целозамкнутое кольцо	VII	1	упр. 30	569
Редуцнрованное кольцо	II	2	6	97
— примарное разложение	IV	2	3	314
Редуцированный порядок ряда	VII	3	8	593
— ряд	VII	3	8	593
Резольвента конечная свободная	VII	4	7	631
Рефлексивная решетка	VII	4	2	613
Решетка векторного пространства	VII	4	1	606
— рефлексивная	VII	4	2	613
— сопряженная	VII	4	2	612
Решетки инвариантные множители	VII	4	упр. 14	648
Родственные локальные кольца	VI	1	упр. 1	431
Ряд редуцированный	VII	3	8	593
— формальный ограниченный	III	4	2	271
Свойство, имеющее место для почти всех идеалов данного множества	VII	4	3	617
Семейство алгебраически свободное	III	1	1	179
— — связанное	III	1	1	179
— формально свободное	III	2	9	213
Сильно взаимно простые элементы	III	4	1	268
— ласкеров подмодуль	IV	2	упр. 28	336
— примарный подмодуль	IV	2	упр. 27	336
Система мультипликативная	II	2	1	75
— — насыщениая	II	2	упр. 1	102
— полная продолжений нормирования	VI	8	2	496

Система представителей экстремальных элементов	VII	3	3	589
Содержание многочлена	VII	1	упр. 23	566
— — над факториальным кольцом	VII	3	5	590
— модуля кручения	VII	4	5	624
Сопряженная решетка	VII	4	2	612
Спектр (простой) кольца	II	4	3	141
Спектральная топология	II	4	3	141
Степень вычетов одного нормирования относительно другого	VI	8	1	494
Строго плоский модуль	I	3	1	53
Существенное нормирование	VII	1	4	546
Существенный градуированный идеал	III	1	4	185
Теорема Гельфанда — Мазура	VI	6	4	481
— Гензеля	III	4	3	275
— Гильберта о нулях	V	3	3	417
— Крулля	III	3	2	247
— Крулля — Акидзуки	VII	2	5	578
— о нулях	V	3	3	415
— об аппроксимации для абсолютных значений	VI	7	3	492
— — — — нормирований	VI	7	2	490
— Островского	VI	6	4	485
— подготовительная	VII	3	8	596
— Штикельбергера	VI	8	упр. 18	520
Тождество Коши	VII	3	упр. 18	603
Топологический тороидальный сопряженный модуль	VI	5	упр. 10	475
Топология Зарисского	II	4	3	141
— линейная	II	2	упр. 16	105 и
	III	2	упр. 14	234
— определенная фильтрацией	III	2	5	200
— спектральная	II	4	3	141
— $\mathfrak{m}$-адическая	III	2	5	202
Топологически нильпотентный элемент	III	4	3	275
Тороидальный сопряженный алгебраический модуль	VI	5	упр. 9	474
— — топологический модуль	VI	5	упр. 10	475
Точка общая	II	4	упр. 1	151
— поля	VI	2	2	435
— конечная в элементе	VI	2	2	436
— тривиальная	VI	2	2	436
Точки эквивалентные	VI	2	3	438
Тривиальная точка	VI	2	2	436
— фильтрация	III	2	1	191
Убывающая фильтрация	III	2	1	189
Ультраметрическое абсолютное значение	VI	6	2	478
Унаразветвленное локальное кольцо	V	2	упр. 8	403
Униформизирующая дискретного нормирования	VI	3	6	450
Упорядоченная группа высоты n	VI	4	4	459
Уравнение целой зависимости	V	1	1	345
Условия Гензеля	III	4	5	280
Факториальное кольцо	VII	3	1	586
Факторфильтрация	III	2	1	192
Фильтраций произведение	III	2	1	192
Фильтрация, ассоциированная с градуировкой	III	2	1	190

Фильтрация возрастающая	III	2	1	189
— дискретная	III	2	5	200
— индуцированная	III	2	1	192
— исчерпывающая	III	2	1	189
— модуля, порожденная фильтрацией кольца	III	2	1	191
— отделимая	III	2	1	189
— согласованная со структурой кольца	III	2	1	189
— — — — модуля	III	2	1	190
— тривиальная	III	2	1	191
— убывающая	III	2	1	189
— $\mathfrak{m}$-адическая	III	2	1	191
— $\mathfrak{m}$-хорошая	III	3	1	243
Фильтрованная группа	III	2	1	189
Фильтрованное кольцо	III	2	1	190
— кольцо, ассоциированное с градуировкой	III	2	1	190
Фильтрованный модуль	III	2	1	190
— — ассоциированный с градуированным модулем	III	2	1	191
Формальная система образующих	III	2	9	213
Формальное свободное семейство	III	2	9	213
Формальный ограниченный ряд	III	4	2	271
Функция порядка	III	2	2	193
Целая алгебра (над кольцом)	V	1	1	346
Целое алгебраическое число	V	1	1	346
— гауссово число	V	1	1	346
— замыкание кольца (в алгебре)	V	1	2	350
Целозамкнутое кольцо	V	1	2	350
Целонётерово кольцо	V	3	упр. 6	422
Целостное кольцо размерности	I—VI	4	упр. 7	463
Целые $\mathfrak{n}$-адические числа	III	2	12	226
Целый идеал	VII	1	1	537
— элемент (над кольцом)	V	1	1	345
Чистый модуль	I	2	упр. 24	50
Штикельбергера теорема	VI	8	упр. 18	520
Эйзенштейна критерий неприводимости	VII	3	упр. 20	603
Эквивалентные дивизоры	VII	1	2	541
— нормирования	VI	3	2	444
— точки	VI	2	3	438
Элемент топологически нильпотентный	III	4	3	275
— целый над кольцом	V	1	1	345
Элементы алгебраически зависимые	III	1	1	179
— — независимые	III	1	1	179
Эндоморфизм почти нильпотентный	IV	1	1	306

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 5

Глава I. **Плоские модули** 11

§ 1. Диаграммы и точные последовательности 11

1. Диаграммы 11
2. Коммутативные диаграммы 12
3. Точные последовательности 13
4. Змеевидная диаграмма 15
Упражнения 20

§ 2. Плоские модули 22

1. Тензорные произведения 22
2. *M*-плоские модули 23
3. Плоские модули 25
4. Примеры плоских модулей 28
5. Плоскостность фактормодулей 29
6. Свойства пересечения 31
7. Тензорные произведения плоских модулей 33
8. Конечно представляемые модули 35
9. Расширение скаляров в модулях гомоморфизмов 37
10. Расширение скаляров: случай коммутативных колец . . . 38
11. Интерпретация плоскостности в терминах соотношений . . 44
Упражнения 44

§ 3. Строго плоские модули 51

1. Определение строго плоских модулей 51
2. Тензорные произведения строго плоских модулей 54
3. Замена колец 55
4. Сужение скаляров 56
5. Строго плоские кольца 56
6. Строго плоские кольца и условия конечности 59
7. Линейные уравнения над строго плоским кольцом 61
Упражнения 62

§ 4. Плоские модули и функторы «Tor» 63
Упражнение 66

Глава II. **Локализация** 67

§ 1. Простые идеалы 67

1. Определение простых идеалов 67
2. Взаимно простые идеалы 69
Упражнения 72

§ 2. Кольца частных и модули частных 74

1. Определение колец частных 74
2. Модули частных 80
3. Изменение мультипликативной системы 85

4. Свойства модулей частных 88
5. Идеалы в кольце частных 91
6. Нильрадикал и минимальные простые идеалы 94
7. Модули частных тензорных произведений и модулей гомоморфизмов 97
8. Приложения к алгебрам 99
9. Модули частных градуированных модулей 100
Упражнения 102

§ 3. Локальные кольца. Переход от локального случая к глобальному 113

1. Локальные кольца 113
2. Модули над локальным кольцом 116
3. Переход от локального случая к глобальному 122
4. Поведение плоских модулей при локализации 127
5. Полулокальные кольца 128
Упражнения 130

§ 4. Спектры колец и носители модулей 134

1. Неприводимые пространства 134
2. Нётеровы топологические пространства 138
3. Простой спектр кольца 140
4. Носитель модуля 148
Упражнения 151

§ 5. Проективные модули конечного типа. Обратимые дробные идеалы 156

1. Локализация относительно элемента 156
2. Локальное описание проективных модулей конечного типа . 158
3. Ранги проективных модулей 161
4. Проективные модули ранга 1 164
5. Невырожденные подмодули 166
6. Обратимые подмодули 168
7. Группа классов обратимых модулей 170
Упражнения 172

Глава III. Градуировки, фильтрации и топологии 179

§ 1. Градуированные алгебры конечного типа 179

1. Системы образующих коммутативной алгебры 179
2. Критерии конечности для градуированных колец 180
3. Свойства кольца $A^{(d)}$ 182
4. Градуированные простые идеалы 185
Упражнения 188

§ 2. Общие сведения о фильтрованных кольцах и модулях 189

1. Фильтрованные кольца и модули 189
2. Функция порядка 193
3. Градуированный модуль, ассоциированный с фильтрованным модулем 194
4. Гомоморфизмы, согласованные с фильтрациями 198
5. Топология, определенная фильтрацией 200
6. Полные фильтрованные модули 203
7. Свойства линейной компактности полных фильтрованных модулей 206
8. Подъем гомоморфизмов ассоциированных градуированных модулей 208

9. Подъем семейства элементов ассоциированного градуированного модуля 211
10. Приложение: примеры нётеровых колец 216
11. Полные $\mathfrak{m}$-адические кольца и проективные пределы 218
12. Отделимое пополнение фильтрованного модуля 221
13. Отделимое пополнение полулокального кольца 227
Упражнения 231

§ 3. $\mathfrak{m}$-адические топологии на нётеровых кольцах 242

1. Хорошие фильтрации 242
2. $\mathfrak{m}$-адические топологии на нётеровых кольцах 247
3. Кольца Зарисского 249
4. Отделимое пополнение нётерового кольца 251
5. Пополнение кольца Зарисского 255
Упражнения 260

§ 4. Подъем в полных кольцах 268

1. Сильно взаимно простые многочлены 268
2. Ограниченные формальные ряды 271
3. Лемма Гензеля 275
4. Композиция систем формальных рядов 278
5. Системы уравнений над полными кольцами 280
6. Приложение к разложению колец 286
Упражнения 287

§ 5. Плоскостные свойства фильтровальных модулей 291

1. Идеально отделимые модули 291
2. Формулировка критерия плоскостности 291
3. Доказательство критерия плоскостности 293
4. Приложения 296
Упражнения 298

Глава IV. Ассоциированные простые идеалы и примарное разложение . 300

§ 1. Простые идеалы, ассоциированные с модулем 300

1. Определение ассоциированных простых идеалов 300
2. Локализация ассоциированных простых идеалов 302
3. Связь с носителем 304
4. Случай модулей конечного типа над нётеровым кольцом . . 305
Упражнения 307

§ 2. Примарное разложение 311

1. Примарные подмодули 311
2. Существование примарного разложения 313
3. Свойства единственности в примарном разложении 314
4. Локализация примарного разложения 317
5. Кольца и модули конечной длины 318
6. Примарное разложение и расширение скаляров 325
Упражнения 329

§ 3. Примарное разложение в градуированных модулях 339

1. Простые идеалы, ассоциированные с градуированным модулем 339
2. Примарные подмодули, соответствующие градуированным простым идеалам 341
3. Примарное разложение в градуированных модулях 342
Упражнения 343

Глава V. **Целые элементы** 344

§ 1. Понятие целого элемента 344

1. Элементы, целые над кольцом 344
2. Целое замыкание кольца. Целозамкнутые кольца 350
3. Примеры целозамкнутых колец 352
4. Вполне целозамкнутые кольца 355
5. Целое замыкание кольца частных 357
6. Нормы и следы целых элементов 360
7. Расширение скаляров для целозамкнутой алгебры 363
8. Целые элементы над градуированным кольцом 365
9. Приложение: инварианты группы автоморфизмов алгебры . . 368

Упражнения 370

§ 2. Подъем простых идеалов 377

1. Первая теорема существования 377
2. Группа разложения и группа инерции 383
3. Разложение и инерция в случае целозамкнутых колец . . . 393
4. Вторая теорема существования 400

Упражнения 402

§ 3. Алгебры конечного типа над полем 408

1. Лемма о нормализации 408
2. Целое замыкание алгебры конечного типа над полем . . . 414
3. Теорема о нулях 415
4. Кольца Джекобсона 417

Упражнения 420

Глава VI. **Нормирования** 424

§ 1. Кольца нормирования 424

1. Отношение доминирования между локальными кольцами . . 424
2. Кольца нормирования 425
3. Характеризация целых элементов 428
4. Примеры колец нормирования 429

Упражнения 431

§ 2. Точки 434

1. Понятие морфизма для не всюду определенных законов композиции 434
2. Точки 435
3. Точки и кольца нормирования 436
4. Продолжение точек 438
5. Характеризация целых элементов с помощью точек 439

Упражнения 440

§ 3. Нормирования 441

1. Нормирования на кольце 441
2. Нормирование на теле 443
3. Переформулировки 446
4. Примеры нормирований 447
5. Идеалы кольца нормирования 449
6. Дискретные нормирования 450

Упражнения 452

§ 4. Высота нормирования 454

1. Отношение включения между кольцами нормирования данного поля 454
2. Изолированные подгруппы упорядоченной группы 456
3. Сравнение нормирований 457
4. Высота нормирования 458
5. Нормирования высоты 1 459

Упражнения 461

§ 5. Топология, определенная нормированием 466

1. Топология, определенная нормированием 466
2. Топологические векторные пространства над телом с нормированием 469
3. Пополнение тела с нормированием 470

Упражнения 472

§ 6. Абсолютные значения 476

1. Предварительные замечания об абсолютных значениях . . . 476
2. Ультраметрические абсолютные значения 478
3. Абсолютные значения на поле $\mathbf{Q}$ 480
4. Структура тела с неультраметрическим абсолютным значением 481

Упражнения 487

§ 7. Теорема об аппроксимации 488

1. Пересечение конечного числа колец нормирования 488
2. Независимые нормирования 489
3. Случай абсолютных значений 492

Упражнения 493

§ 8. Продолжения нормирования на алгебраическое расширение . . 493

1. Индекс ветвления. Степень вычетов 493
2. Продолжение нормирования и пополнение 496
3. Соотношение $\sum_i e_i f_i \leqslant n$ 499
4. Начальный индекс 502
5. Соотношение $\sum e_i f_i = n$ 503
6. Кольца нормирования в алгебраическом расширении . . . 508
7. Продолжение абсолютных значений 510

Упражнения 513

§ 9. Приложение: локально компактные тела 521

1. Функция модуля на локально компактном теле 521
2. Существование представителей 523
3. Структура локально компактных тел 524

Упражнения 526

§ 10. Продолжения нормирования на трансцендентное расширение . 527

1. Случай моногенного трансцендентного расширения . . . .
2. Рациональный ранг коммутативной группы 530
3. Случай произвольного трансцендентного расширения 533

Упражнения 535

Глава VII. **Дивизоры** 537

§ 1. Кольца Крулля 537

1. Дивизориальные идеалы целостного кольца 537
2. Структура моноида на $D(A)$ 540
3. Кольца Крулля 543
4. Существенные нормирования кольца Крулля 546
5. Аппроксимация для существенных нормирований 548
6. Простые идеалы высоты 1 в кольце Крулля 550
7. Приложение: новые характеризации колец дискретного нормирования 552
8. Целое замыкание кольца Крулля в конечном расширении его поля частных 553
9. Кольца многочленов над кольцом Крулля 554
10. Классы дивизоров в кольцах Крулля 555

Упражнения 560

§ 2. Дедекиндовы кольца 570

1. Определение дедекиндовых колец 570
2. Характеризация дедекиндовых колец 571
3. Разложение идеалов в произведение простых идеалов . . 573
4. Теорема об аппроксимации в дедекиндовых кольцах . . . 574
5. Теорема Крулля — Акидзуки 576

Упражнения 580

§ 3. Факториальные кольца 586

1. Определение факториальных колец 586
2. Характеризации факториальных колец 587
3. Разложение на экстремальные элементы 589
4. Кольца частных факториального кольца 590
5. Кольца многочленов над факториальным кольцом 590
6. Факториальные кольца и кольца Зарисского 591
7. Предварительные сведения об автоморфизмах колец формальных рядов 592
8. Подготовительная теорема 593
9. Факториальность колец формальных рядов 597

Упражнения 598

§ 4. Модули над целозамкнутыми нётеровыми кольцами 605

1. Решетки 606
2. Двойственность; рефлексивные модули 612
3. Локальное построение рефлексивных модулей 617
4. Псевдоизоморфизмы 619
5. Дивизоры, связанные с модулями кручения 624
6. Относительный инвариант двух решеток 626
7. Классы дивизоров, связанные с модулями конечного типа . 628
8. Свойства по отношению к конечным расширениям скаляров 633
9. Теорема редукции 639
10. Модули над дедекиндовыми кольцами 643

Упражнения 644

Исторический очерк к гл. I—VII 652
Библиография 681
Схема зависимости понятий 685
Таблица устойчивости свойств. I 686
Таблица устойчивости свойств. II 688
Таблица устойчивости свойств при пополнении 689
Указатель обозначений 690
Указатель терминов 693

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу:

129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир»

Н. БУРБАКИ

Коммутативная алгебра

Редактор *Г. М. Цукерман* Художник *Г. И. Юдицкий*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *М. П. Грибова*

Сдано в набор 11/I 1971 г. Подписано к печати 26/XI 1971 г. Бумага кн. журн. 60×90¹/₁₆=22,13 бум. л. 44,25 печ. л. Уч.-изд. л. 44,97 Изд. № 1/4955 Цена 3 р. 39 к. Зак. 956

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29.